L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

Math.
E

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRECTEURS

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences.
Répétiteur à l'École polytechnique de Paris.

H. FEHR
Privat-docent à l'Université de Genève,
Professeur au Collège et à l'École professionnelle.

COMITÉ DE PATRONAGE

P. APPELL (Paris). — N. BOUGAIEV (Moscou). — Moritz CANTOR (Heidelberg).
L. CREMONA (Rome). — E. CZUBER (Vienne). — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
A.-G. GREENHILL (Woolwich). — F. KLEIN (Göttingen) — V. LIGUINE (Varsovie).
P. MANSION (Gand). — MITTAG-LEFFLER (Stockholm). — G. OLTRAMARE (Genève).
Julius PETERSEN (Copenhague). — E. PICARD (Paris). — H. POINCARÉ (Paris).
P.-H. SCHOUTE (Groningue). — C. STEPHANOS (Athènes). — F. Gomes TEIXEIRA (Porto).
A. VASSILIEF (Kasan). — A. ZIWET (Ann-arbor, Michigan, U. S. A.).

1re Année. 1899.

298928
4. 34
12.

PARIS
GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS
3, RUE RACINE, 3

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/lenseignementmat01inte

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

Il existe aujourd'hui des centaines de publications périodiques excellentes, concernant la science mathématique. Beaucoup de journaux et de revues s'occupent aussi des questions d'enseignement, et souvent avec une grande autorité. Dans ces conditions, il nous semble indispensable, en tête de ce premier numéro, de faire comprendre à nos lecteurs quelle est la raison d'être de l'*Enseignement mathématique*, à quelles préoccupations nous avons obéi en fondant cette nouvelle Revue, et quel est le but que nous poursuivrons.

Dans tous les pays où se cultive la science mathématique, le corps enseignant se compose à tous les degrés de professeurs profondément attachés à leur mission, et qui s'y consacrent avec tout ce qu'ils ont de dévouement, d'instruction et d'intelligence. Mais presque tous en sont venus à comprendre qu'il y a, dans les moyens pédagogiques employés, des perfectionnements possibles ; à l'heure où la science a tant progressé, certaines simplifications peuvent être désirables, les programmes des diverses branches de l'enseignement appellent des réformes plus ou moins complètes. Et avec cela, il y a une question fondamentale dont on ne saurait méconnaître l'importance : c'est celle de la préparation du corps enseignant.

Toutes ces transformations ne sauraient s'accomplir brusquement, ni sans de sérieuses réflexions préalables. Mais, pour procéder à une telle étude d'une façon judicieuse et utile, la première des conditions n'est-elle pas de connaître ce qui se passe dans les autres pays, de savoir quel est dans chacun d'eux le mode d'organisation de l'enseignement

mathématique, quels sont les programmes en vigueur, les moyens de sanction des études, etc. ? Or, sur toutes ces choses, on vit, il faut le reconnaître, dans une ignorance générale profonde, et il n'en peut être autrement. Malgré les relations fréquentes qui se sont établies à notre époque entre savants qui cultivent un même sujet d'étude, malgré les congrès internationaux, si brillamment inaugurés à Zurich en 1897 et dont le principe est désormais établi, le monde de l'enseignement proprement dit n'a pu s'associer jusqu'à présent à ce grand mouvement de solidarité scientifique aussi pleinement qu'il eût été désirable. Même sur les pays les plus rapprochés de nous, nous n'avons, en général, que des notions assez vagues en matière d'enseignement; chaque professeur, retenu par ses obligations quotidiennes, confiné dans son labeur particulier, n'a souvent pas le loisir de se livrer à des spéculations de science pure, ni celui d'entretenir des correspondances un peu suivies avec des collègues étrangers.

Nous avons voulu, par la publication de notre Revue, renverser les obstacles qui s'opposent à ces communications réciproques et créer une sorte de correspondance mutuelle, continue, entre les hommes qui ont consacré leur vie à cette noble mission : l'éducation mathématique de la jeunesse.

En vue de ce résultat, notre premier soin a été de donner à la publication périodique dont il s'agit un caractère franchement et hautement international. Nos lecteurs en ont déjà trouvé la preuve dans la composition du comité sous les auspices duquel nous avons voulu nous placer; ce comité comprend des hommes qui sont l'honneur de la science dans le monde mathématique actuel; si chacun d'eux contribue individuellement à la gloire de son pays, ses découvertes profitent à tous; nous ne saurions nous dispenser ici d'exprimer notre profonde reconnaissance à ces maîtres illustres, qui ont compris et approuvé notre tentative, et dont la haute adhésion est pour nous le plus précieux des encouragements.

Un point sur lequel nous avons eu quelques hésitations, c'est le choix de la langue dans laquelle devrait être publié *l'Enseignement mathématique*. Fallait-il, comme nous l'avons fait, adopter une langue unique ? Fallait-il, au contraire, insé-

rer des articles dans plusieurs langues différentes? Cette dernière solution était séduisante, en ce qu'elle soulignait plus complètement le caractère international de la Revue; mais elle présentait des inconvénients de plus d'une sorte. D'abord, il faut reconnaître que les tentatives qui se sont produites en ce sens sous diverses formes ont peu réussi. Il semble que cette multiplicité des langues employées dans un même Recueil en atténue l'intérêt. Et puis, au point de vue matériel, il eût été bien difficile d'obtenir une correction irréprochable en procédant ainsi. Nous avons donc cru devoir nous arrêter à la première solution, comme présentant le maximum d'avantages et le minimum d'inconvénients. Mais, nous devons y insister, cela n'empêchera pas notre recueil d'être sincèrement et profondément international, et nous comptons sur la collaboration active des professeurs et des mathématiciens de tous les pays. Ainsi que nous l'avons annoncé dans une circulaire remontant à quelques semaines, nous demandons à nos collaborateurs, autant que possible, de nous adresser leurs communications en langue française; mais si c'était pour eux une trop grande peine, nous nous chargerions d'assurer la traduction en français des articles écrits dans l'une des langues européennes d'un usage général.

Chaque numéro de *l'Enseignement mathématique* contiendra, en principe :

1° Des articles généraux; 2° des études pédagogiques; 3° une chronique et des correspondances; 4° une partie bibliographique.

Cette division n'a rien d'absolu, et des modifications pourront être apportées ultérieurement à ce cadre d'ensemble, si l'utilité en est reconnue.

Quant à présent, il nous a semblé que ce plan général pouvait convenir à nos débuts. Quelques brèves indications sur ces divers points nous paraissent nécessaires.

Les articles généraux peuvent avoir une portée philosophique et concerner toute une branche de la science mathématique; en ce cas, sans se rapporter à l'enseignement d'une manière directe, ils seront accueillis par nous avec empressement; car c'est surtout par l'examen un peu syn-

thétique des idées générales que les méthodes d'enseignement arrivent à se coordonner et à s'améliorer.

Une autre espèce d'articles généraux nous semble aussi présenter un intérêt de premier ordre. Nous voulons parler de ceux qui ont pour but de mettre le lecteur au courant de l'organisation de l'enseignement mathématique dans un pays déterminé, ou même de l'enseignement, en ce pays, d'une branche particulière de la science mathématique.

Comme il importe, en ces matières, de descendre des vues d'ensemble aux choses de détail, nous serions particulièrement heureux, par exemple, si dans nos premiers numéros, il nous était possible de publier des études sous la rubrique : « *l'Enseignement mathématique en...* » Beaucoup de professeurs, dans toutes les contrées du monde, sont à même de fournir ainsi un tableau remarquable de l'enseignement dans leur pays; et grâce à la bienveillance des membres de notre comité de patronage, il ne sera pas difficile à ceux-ci de nous recruter de brillants et utiles collaborateurs.

C'est également sur les professeurs que nous comptons pour les études pédagogiques, s'appliquant, soit à une théorie d'ensemble, soit à une démonstration particulière, soit à l'examen critique de tel ou tel point particulier. Programmes, examens, concours, mécanisme des procédés d'enseignement, tout cela prendra naturellement sa place ici.

Tout en montrant le plus large éclectisme et la plus complète impartialité, la Revue aura ses idées propres et sa doctrine, sur lesquelles il est bien inutile d'insister à l'avance, et qui se manifesteront par la nature même des choses. Il pourrait donc arriver que certains articles, même fort bien faits, ne fussent pas accueillis par nous, s'ils se trouvaient en contradiction avec notre tendance générale, ou bien ne fussent insérés qu'avec certaines réserves.

Comme il y a cependant un intérêt de premier ordre, selon nous, à ce que toutes les idées puissent se produire au grand jour ou être soumises à la discussion des hommes de science, la correspondance que nous ajoutons à notre chronique nous semble appelée à rendre de grands services. Sous cette rubrique, nous accueillerons toutes les idées,

même celles auxquelles nous serions totalement opposés, en matière d'enseignement mathématique. Elles se trouveront présentées nécessairement sous une forme un peu condensée; mais cette partie de notre Revue sera une véritable tribune ouverte à tous, sans restriction. Nous y accueillerons même, à l'occasion, des communications dont les auteurs désireraient garder l'anonyme, pourvu, cela va de soi, qu'ils veuillent bien se faire connaître des directeurs et avoir confiance en leur discrétion.

Enfin, la bibliographie, que nous ne voulons pas négliger, comprendra l'annonce ou l'analyse sommaire du plus grand nombre possible des publications, périodiques ou non, intéressant l'enseignement mathématique et qui seront portées à la connaissance de la Direction.

Pour l'accomplissement de ce programme, pour les perfectionnements qu'il devra subir ultérieurement, le concours actif et sympathique de nos correspondants nous est indispensable.

Nous avons la ferme confiance que notre attente, à ce point de vue, ne sera pas trompée. Entre nos lecteurs et nous il devra se créer un lien plus étroit que les relations banales d'un abonné avec le directeur de son journal. Nous collaborons, par la force même des choses, à une œuvre commune; nous avons foi que cette œuvre a une portée plus vaste encore en réalité qu'en apparence. L'avenir de la civilisation dépend en grande partie de la direction d'esprit que recevront les jeunes générations en matière scientifique; et dans cette éducation scientifique l'élément mathématique occupe une place prépondérante. Soit au point de vue de la science pure, soit à celui des applications, le XX^e^ siècle, qui va s'ouvrir, manifestera des exigences auxquelles personne ne doit ni ne peut se dérober.

A cette tâche nous avons voulu contribuer modestement en créant cette Revue nouvelle. Nos collaborateurs et nos correspondants y contribueront plus brillamment et plus complètement que nous-mêmes; c'est sur eux, bien plus que sur nous, que repose l'avenir de cette publication, et c'est là ce qui nous a donné pleine confiance.

LES DIRECTEURS.

LES MATHÉMATIQUES EN ESPAGNE

Pour présenter un aperçu de l'enseignement actuel des Mathématiques en Espagne, il est préalablement nécessaire de faire une rapide excursion historique, en remontant au commencement de ce siècle.

C'est aujourd'hui un fait acquis que, dès le XVII^e^ siècle, la décadence scientifique de l'Espagne se fit sentir, tandis qu'en France, en Italie, en Angleterre, Descartes, Viète, Wallis et d'autres commençaient une renaissance si brillante.

Le manque d'idéalisme relégua nos scentifiques dans les applications, qui ne donnent guère issue à des découvertes ; l'utilitarisme prédominant ne produisit que des praticiens, et des ouvrages d'application à la Navigation, à l'Astronomie, etc.

Au commencement du XIX^e^ siècle seulement furent importés les ouvrages classiques destinés à l'enseignement, entre autres la traduction de la Géométrie descriptive de Monge, celle des ouvrages de Lacroix, la Géométrie de Legendre et les ouvrages espagnols de Bails, Vallejo, parmi lesquels il faut citer les élégantes *Instituciones de calculo diferencial é integral* de D. Josef Chaix, qui furent suivies pour l'éducation mathématique de la jeunesse ; plus tard prédominèrent les ouvrages de Bourdon, Vincent, Cirodde, Lefebure de Fourcy, Legendre, etc.

Dès la deuxième moitié du siècle actuel, quelques ouvrages spéciaux donnèrent une certaine variété à la culture scientifique en Espagne.

Le professeur D. Juan Cortazar, à l'Université de Madrid, publia ses estimables ouvrages élémentaires et aussi son *Complemento de Algebra y Geometria analitica*, et le professeur Elizalde sa *Geometria descriptiva* ; D. José Echegaray, professeur à l'Ecole

de *Ingenieros de Caminos canales y puertos*, donna une traduction libre d'un ouvrage de Trudy, *Memoria sobre la teoria de las determinantes* (1868) et un intéressant mémoire sur la Thermodynamique.

En 1865, parut un ouvrage remarquable par l'originalité des vues, et surtout par l'organisme philosophico-mathématique qu'il présentait. Le professeur de logique de l'*Instituto del Noviciado* de Madrid [1], M. Rey y Heredia, attiré vers l'étude des quantités imaginaires par son collègue M. Vallin, professeur de mathématiques élémentaires, en donna une interprétention très intéressante, fondée sur la division des jugements, due à Kant, dans ses états positif, négatif et limitatif, sous la catégorie de la qualité.

M. Rey admet, avec Kant, l'espace et le temps comme des formes de l'intuition empirique des phénomènes du monde extérieur et intérieur. L'intuition de l'espace dans sa pureté nous est représentée comme une capacité infinie, simultanée et homogène, ainsi que celle du temps comme une série infinie d'instants successifs et transitoires.

L'Algèbre réalise l'harmonie et l'union de l'Arithmétique et de la Géométrie, au moyen de l'interprétation des résultats négatifs et imaginaires des questions mathématiques ; elle est une branche nouvelle qui subordonne les deux autres à son universalité.

Les affections qualitatives correspondent aux directions perpendiculaires, parallèles et obliques des droites ; la théorie géométrique de la position, *desideratum* de Leibniz, s'est tranformée en une théorie algébrique ordinaire, dès l'instant où a été établie la correspondance de signe avec toutes les positions de la droite dans le plan.

La nature positive, négative et imaginaire des quantités n'est que la réalisation du concept logique de la catégorie, de la qualité, imposée par l'entendement.

L'Arithmétique et la Géométrie dépouillent les quantités de leurs propriétés physiques, conservant leurs propriétés numériques ou extensives. L'Algèbre, ensuite, les purifie encore en les soumettant au pur concept de quantités, avec une qualité nécessaire.

---

[1] Aujourd'hui du *Cardenal Cisneros*.

A l'inclusion ou à l'exclusion du concept du sujet dans le concept du *prédicat*, correspondent les jugements positifs et négatifs; et quand nous rapportons le sujet, non à la circonscription intérieure du prédicat, mais à la circonscription externe, c'est-à-dire quand nous rapportons *indirectement* le sujet à un prédicat, nous trouvons les quantités *indirectes* ou imaginaires, qui dérivent ainsi des jugements limitatifs de Kant.

Il faut admettre des quantités possédant ensemble les deux qualités positive et négative, en correspondance avec le nouveau concept de *limitation* de l'entendement.

L'ouvrage de M. Rey y Heredia constitue un développement des théories exposées déjà par Argand, Français, Vallès, Faure, etc., soumis aux concepts de la philosophie kantienne sur les formes du jugement, mais avec une méthode d'exposition très heureuse, dont nous pourrons exprimer l'importance en citant les matières : exposition mathématique des concepts de qualité, selon l'interprétation géométrique ; les quantités imaginaires considérées comme racines ; correspondance du module et de l'argument aux catégories de la quantité et la qualité ; l'interprétation de l'imaginaire dans les coniques, où l'on tire profit de la théorie de Poncelet sur les coniques supplémentaires.

Dans l'exposition des imaginaires sous l'algorithme de la somme, l'auteur donne des relations intéressantes sur les sommes *catégorématiques* (ou suivant le seul concept de quantité) et les sommes *sincatégorématiques* (suivant les deux concepts de la quantité et la qualité, simultanément).

L'algorithme de la production (multiplication), suivant M. Rey, repose sur la réciprocité des facteurs dans son rapport par antithèse, terme moyen entre la substance et la cause, correspondant aux algorithmes de la somme et de la graduation, selon Wronski.

En outre, M. Rey donne quelques développements originaux sur la contraposition des facteurs dans la multiplication des quantités imaginaires et la multiplication ternaire.

Ses aperçus et rapprochements philosophiques sur la graduation sont d'une grande originalité.

Il utilise très habilement la théorie de l'ordre, selon la pensée de Poinsot, pour exposer la théorie des équations binomes, la

propriété reproductive des racines de l'unité, la composition des irradiations des équations d'ordre inférieur dans celles d'ordre supérieur, et aussi la considération, qu'il appelle dynamique, des racines imaginaires ; et la théorie trigonométrique de l'imaginaire permet des représentations élégantes qui conduisent aux constructions graphiques.

La formule $a = \left(1 + \frac{x}{\infty}\right)^{\infty}$ de Wronski lui sert dans la graduation infinie, et il termine en développant le nombre e, qualitatif qui appartient à la graduation infinie sincatégorématique et à la théorie des quantités imaginaires et complexes.

En résumé, l'ouvrage de M. Rey y Heredia comprend trois idées principales : 1° le symbole de la perpendicularité, selon Buée et Argand ; 2° la pensée de Pascal, *les nombres imitent l'espace, malgré la différence de nature* ; 3° le tableau des catégories de l'entendement indique tous les *moments* d'une science spéculative projetée, et donne son ordonnance et son régime.

L'influence de l'ouvrage de M. Rey se fit sentir dans d'autres ouvrages espagnols.

D. José Rochano y Alemany, professeur à l'institut de Grenade, dans ses *Elementos de Algebra* (1870) donna une grande importance à la représentation géométrique des imaginaires, distinguant les deux éléments, qualitatif et quantitatif, dans les opérations du calcul, et développant avec quelque étendue les résultats publiés par M. Rey, qui sont des conséquences de ce qu'on trouve dans l'ouvrage d'Argand sur la représentation géométrique des symboles $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ et $(\sqrt{-1})^{\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha}$.

De son côté le professeur D. Luciano Navarro, à l'Institut de Salamanca, appliqua la représentation géométrique des quantités imaginaires à l'exposition de sa *Geometria elemental* (1874).

Il est vrai qu'en représentant la droite inclinée par l'imaginaire binome et sa grandeur par le module de celle-ci, on arrive à une traduction des raisonnements géométriques en raisonnements algébriques ; mais cela forme une géométrie analytique de la géométrie élémentaire. Cette méthode permet d'ailleurs à M. Navarro d'exposer à la fois la Trigonométrie et la Géométrie.

Les *Elementos de Geometria analitica* du directeur de l'École de marine D. Modesto Dominguez Hervella (1879) forment un

ouvrage très digne d'attention, par la manière originale d'exposer cette science, basée sur l'interprétation géométrique des quantités imaginaires.

Les notions préliminaires sont destinées aux représentations des quantités et des opérations algébriques; l'auteur emploie la forme binaire pour la représentation des droites dans le plan, utilise la double égalité des termes réels et imaginaires dans les équations obtenues, arrive aux formules de Maclaurin et de Moivre, à l'expression au moyen de module et de l'argument, et aux logarithmes; et tout cela lui permet d'exposer la Géométrie dans le plan avec unité dans la méthode et une certaine originalité dans les procédés.

Dans la Géométrie de l'espace, M. Dominguez Hervella démontre que l'imaginaire double $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ est l'*expression analytique d'une unité absolue prise dans la direction perpendiculaire à celles qui sont adoptées pour l'unité réelle et l'imaginaire simple* $i = \sqrt{-1}$, et il obtient la représentation ternaire $OM = a + bi + ci'$ d'un vecteur dans l'espace, s'approchant de la représentation de Hamilton; dans le symbole $e^{i(\varepsilon' + i\varepsilon'')}$ l'exposant $\varepsilon' + i\varepsilon''$ exprime non seulement le nombre ε de fois que e^i entre comme facteur (c'est-à-dire le module $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}$), mais encore la manière d'entrer et le plan où s'est produite l'évolution potentielle.

L'exposition de cette deuxième partie est faite par analogie avec celle de la première, d'après l'étude des opérations de l'Algèbre dans l'espace, ce qui rend l'ouvrage très intéressant.

A cette occasion, je me bornerai à citer mes deux mémoires présentés à l'Académie des sciences de Madrid dans les concours de 1878 et 1879, l'*Exposition historique et didactique de la théorie des quantités imaginaires* et *Sur l'Algèbre historiquement et critiquement considérée*, dont j'ai repris le sujet dans des ouvrages ultérieurs, spécialement dans ma *Critica y sintesis del Algebra* (1888).

En 1881, D. Apolinar Fola [1] donna une autre exposition remarquable, philosophique et mathématique, corrigeant quel-

[1] Il ne faut pas confondre M. Apolinar Fola avec D. José Fola, auteur de la *Moderna ciencia geometrica*, écrite contre les principes de la science admise.

ques conclusions de M. Rey, ouvrage très intéressant, complété en 1891 par un deuxième volume où il tenta d'interpréter les quantités complexes dans l'espace.

M. Fola obtint ainsi le symbole $(\rho + \sigma\sqrt{-1})\,\Pi\,p$, qui exprime un résumé de Géométrie sphérique; mais s'il arrive à des conclusions intéressantes, la démonstration rigoureuse de ses principes lui manque; cependant l'ouvrage reste très estimable. M. Fola signale l'erreur de M. Vallès sur l'expression $e^{-\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$.

Un autre ouvrage important, malgré les nombreux travaux publiés sur cette théorie, est celui de M. Lasala, *Teoria de las cantidades imaginarias* (1894), écrit consciencieusement avec rigueur de méthode; il y a introduit un travail digne d'étude, notamment dans les théories des nombres e et E, dans la graduation pour le cas de l'exposant imaginaire d'une quantité imaginaire, et pour celui de l'unité plus un élément infinitésimal réel ou imaginaire; ceci conduit aux logarithmes dans les systèmes de bases E et $\sqrt{-1}$; ces considérations l'ont amené à un autre ouvrage : *Generacion de las cantidades imaginarias por graduacion infinita y estudio de un genero de curvas llamado Hetoide* (1896).

Il y a une trentaine d'années, l'illustre ingénieur des ponts et chaussées à Madrid, M. Echegaray, aussi brillant dans la Mathématique et la Physique que dans la littérature dramatique, commença un autre développement d'idées.

M. Joseph Echegaray publia son *Introduction à la Geometria superior*, faisant connaître en Espagne la méthode de Chasles, fondée sur le rapport anharmonique, avec l'élégance et l'originalité de style qui accompagnent tous ses ouvrages.

A ce livre succédèrent, quelque temps après, d'autres mémoires et ouvrages de professeurs espagnols, pour la préparation de la jeunesse aux études spéciales au corps du génie; parmi eux nous citerons ceux de M. Cavestany, du P. Obeso et la *Geometria elemental*, dans laquelle j'expose, selon les conclusions de Chasles, la dérivation de la doctrine des porismes d'Euclide et des lemmes de Pappus qui forme cette branche géométrique. Il faut ajouter que les excellents *Appendices* de la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse ont rendu de grands services aux besoins de l'enseignement chez nous.

Il est bon de rappeler ici un ouvrage publié par le professeur à l'Institut de Bilbao, D. Atanasio Lasala, la *Teoria de las lineas proporcionales* (1880).

M. Lasala croit avoir découvert un nouveau principe fondamental de la science géométrique : mais on le trouve dans l'ouvrage de M. Catalan, *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, déduit du théorème de Menelaüs et de celui de Desargues sur les triangles homologiques ; l'énoncé de cette proposition est le suivant : *Si trois droites, issues d'un même point* O, *rencontrent en* A, B, C, *et* A', B', C', *deux transversales, on a* :

$$\frac{BC}{B'C'}\cdot\frac{AO}{A'O}=\frac{CA}{C'A'}\cdot\frac{BO}{B'O}=\frac{AB}{A'B'}\cdot\frac{CO}{C'O}.$$

M. Lasala fait application de ce principe fondamental aux théories des transversales, des rapports anharmonique et harmonique, à l'homographie, à la Trigonométrie et à la Géométrie sphérique.

Ce progrès dans la Géométrie, commencé par M. Echegaray, coïncida avec un autre qui amena l'introduction, dans les programmes de l'Ecole des Ingénieurs de *Caminos canales y puertos*, à Madrid, de l'Algèbre des formes, donnant de la sorte occasion de faire connaître en Espagne les ouvrages de Salmon, et spécialement ceux du maître italien M. Rubini, dont la *Théorie des formes* fut traduite en espagnol par le professeur à l'université de Séville D. Emilio Marquez (1885).

Quelques ouvrages parurent en Espagne sur cette branche de la science mathématique. Il faut citer les traités sur les déterminants de MM. Bacas y Escandon et Fernandez de Prado ; la *Combinatoria* de MM. Suarez et Gascó, professeurs à l'Institut et à l'Université de Valence, livre estimable par sa clarté et sa rigueur didactique ; les *Eléments de la théorie des formes* de D. Luis Octavio de Toledo, professeur à Madrid (1889).

La théorie des formes n'a pas été le seul développement qui fit sortir les professeurs espagnols de l'étude de l'Algèbre d'après la résolution numérique des équations, selon les découvertes dues à Descartes, Newton, Rolle, Lagrange, Budan, Fourier, Sturm, etc.

D. Miguel Merino, directeur de l'Observatoire astronomique de Madrid, publia une traduction libre du mémoire écrit en

allemand par l'astronome M. Encke, c'est-à-dire l'ouvrage : *Résolucion general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe* (1879), faisant ressortir les avantages de cette méthode sur la méthode classique.

L'Académie des sciences de Madrid publia (1877) l'ouvrage couronné de l'astronome D. Elogio Jimenez où sont exposés les principaux résultats de Gauss, Dirichlet et Dedekind sur cette branche ; en outre, D. Cecilio Jimenez Rueda, à présent professeur à l'Université de Valence, publia ses *Prolegómenos de Aritmética universal* (1889), d'après l'exposition faite par M. le professeur Otto Stolz dans ses *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*.

Un autre ouvrage très intéressant fut publié par le commandant d'infanterie D. Ricardo Vazquez Illa : *Propriedades elementales relativas à la divisibilidad de los números enteros* ; ce travail mérita un rapport favorable de l'Académie des sciences de Madrid, ainsi que ceux de MM. Rey, Fola, Dominguez Hervella et Lasala.

Pour ne pas interrompre l'exposition des progrès faits parmi nous dans les théories algébriques, il faut citer à présent les *Disertaciones matematicas sobre la cuadratura del circulo, el método de Wantzel y la division de la circunferencia en partes iguales* par D. José Echegaray, insérées dans le volume XXII de la *Revista de los progresos de las Ciencias*, publiée jusqu'à ces dernières années par l'Académie des sciences de Madrid. Plus tard, M. Echegaray forma de ces théories un beau volume où l'on trouve le développement des travaux de MM. Hermite et Lindeman qui conduisent à la démonstration de l'impossibilité de la quadrature du cercle avec la règle et le compas ; M. Echegaray fait aussi quelques applications de la méthode de Wantzel et donne les raisonnements qui facilitent la compréhension de celle-ci.

Il faut citer encore, de cet illustre savant, sa remarquable *Resolucion de las ecuaciones y teoria de Galois* (1897), d'après ses conférences données à l'athénée de Madrid l'année passée ; il y présente aussi une brillante exposition de la théorie des substitutions, rehaussée par un style qui appartient en propre à cette riche imagination, mise au service d'un esprit si puissant et si profond.

Le savant professeur de Géométrie descriptive à l'Université

centrale, D. Eduardo Torroja, fut l'initiateur d'un autre progrès dans la Mathématique.

Partisan enthousiaste des méthodes de Staudt, de Fiedler et de Culmann, c'est-à-dire de la Géométrie dans toute sa pureté et dégagée des vêtements de l'Analyse, il introduisit, il y a une vingtaine d'années, la Géométrie de Staudt à l'Université de Madrid; il succédait alors, dans la chaire de Géométrie descriptive, au professeur Elizalde, qui laissa incomplète la publication d'un élégant traité de Géométrie descriptive, dont l'achèvement est dû à son collègue D. Gurmersindo Vienna, enlevé à son tour, il y a dix ans, à la science et au professorat espagnols.

M. Torroja, partisan des études graphiques, publia son beau volume *Geometría projectiva* et approfondit l'étude des éléments à l'infini, aussi bien dans cet ouvrage, que dans son profond discours d'entrée à l'Académie des sciences de Madrid : *Reseña de los medios empleados por la geometria pura actual para alcanzar el grado de generalidad y de simplificacion que la distingue de la geometría antigua* (1893), où l'on trouve un résumé très utile de la Géométrie moderne dans ses traits les plus importants.

A ce propos, nous croyons juste de citer encore l'ouvrage de l'élève distingué de M. Torroja, aujourd'hui professeur à l'Université de Madrid, D. Miquel Vegas. Cet estimable professeur, partisan comme M. Torroja des idées de Staudt et Fiedler, publia en 1894 son *Tratado de Geometría analítica* d'après le style et l'allure de Clebsch, Briot et Bouquet, d'Ovidio et Fiedler. Il adopta aussi les idées du professeur italien Dott. Giulio Lazzeri, développées dans son *Trattato di Geometria analitica* (1893).

M. Vegas a introduit dans les cours de nos Universités la Géométrie analytique projective ; il poursuit à présent, en collaboration avec M. Torroja, la publication d'une autre Géométrie, d'après les vues indiquées.

Le professeur à l'Université de Valence D. Cecilio Jimenez Rueda a contribué aussi à répandre parmi nous ces études, en publiant son *Tratado de las formas geometricas*; s'il accorde une grande importance aux résultats qu'on doit à Staudt et Culmann, il harmonise dans son ouvrage cette tendance géométrique avec celles de Chasles et de Steiner.

Dans l'enseignement de la Géométrie analytique, aux ouvrages

de Lefebure de Fourcy, Sonnet et Frontera, et Cirodde, ont succédé ceux, plus modernes, de MM. Salmon, Carnoy, de Longchamps, Imber et Wiell, et le petit traité espagnol du professeur à l'Université, décédé il y a quelques années, D. Ignacio Sanchez Solis. De même, à l'ancien traité d'Analyse de Navier succédèrent, dans nos Facultés des sciences, ceux de MM. Duhamel, Sturm et C. Jordan, et aussi les *Principios fundamentales del Cálculo diferencial* du regretté et très estimable professeur à l'Université centrale D. Simon Archilla : à l'Université de Barcelone furent mis en usage les *Elementos de Cálculo diferencial* du professeur D. Lauro Clariana. Les écoles militaires spéciales suivirent le traité de Calcul différentiel et intégral du lieutenant D. Fernando Garcia de san Pedro, les *Elementos de Cálculo integral* du colonel du génie D. Antonio Torner et, actuellement, le traité écrit par le général du génie D. Diego Ollero. Nous citerons également les brochures du professeur à l'Université de Saragosse D. Gabriel Galan sur *Las funciones hiperbolicas*, *El triangulo infinitesimal* et l'intéressant mémoire du professeur à l'école de *Ingenieros de caminos* D. Antonio Portuondo : *Ensayo sobre el infinito* (1880).

Chez nous, le défaut d'une tradition scientifique nationale n'a pas permis de développer la science dans sa partie technique ; seulement, dans les réceptions des membres de l'Académie des sciences et dans les inaugurations des cours académiques, elle s'est développée dans sa partie formelle ou sa conception philosophique.

Le professeur de philosophie à l'Université de Madrid D. Francisco Giner, dans son ouvrage *Estudios filosoficos y religiosos* (1876) publia une traduction du mémoire du philosophe Krause sur le concept et les divisions de la Mathématique, et le professeur D. Ramon Hermida donna la traduction du petit ouvrage qu'écrivit le Portugais D. I. N. Conceiro da Costa, *Filosofia de las Matématicas y reflexiones pedagógicas sobre la enseñanza de esta asignatura* (1875), qui constitue un précis de la doctrine philosophico-mathématique de Wronski.

Dans mes brochures, *Observaciones útiles en el estudio de las Matemáticas* (1874), *El método aplicado à la ciencia matemática* (1875) *Consideraciones acerca de un nuevo plan para la enseñanza*

de las matemáticas elementales (1877), la Mathématique est étudiée principalement sous son aspect formel, logique et pédagogique. Là sont exprimées la dérivation du problème qui produit le théorème, l'importance de l'étendue des hypothèses et des thèses dans la réciprocité et l'enchaînement scientifique, conduisant à classifier les questions d'après leur nature ; la dérivation des méthodes dans la Mathématique, d'après la méthode générale de la Philosophie ; le besoin de trouver un *pourquoi*, supérieur aux raisonnements mathématiques, ce qui conduit à la critique mathématique ; et dans ce but, la première édition de la Géométrie élémentaire que je publiai (1882) contient une section critique où l'on étudie la méthodologie géométrique, la structure des propositions, les méthodes particulières dérivées des méthodes générales, les substitutions des propositions d'après leur équivalence, les méthodes d'exposition en face de celles d'invention. La question de l'existence ou de la possibilité des figures, et leur génération d'après les déterminations et les corrélations, sont étudiées aussi dans la brochure *Complemento de la Geometria elemental ó critica geometrica* (1881) avec application aux problèmes, selon les équivalences ou transformations mutuelles au moyen des substitutions de conditions équivalentes.

Le but pédagogique a dirigé la composition des divers ouvrages dont je présente un aperçu.

J'ai exprimé dans le *Tratado de Aritmética* (1884) la nécessité de constituer une philosophie mathématique qui expose le criterium de la vérité mathématique, une littérature mathématique qui organise le monde de la beauté mathématique, et une pédagogie mathématique qui harmonise les lois de l'exposition scientifique avec la nature de notre intelligence ; et dans l'impossibilité d'y parvenir d'un seul coup, j'ai réparti le travail dans divers ouvrages.

Notre Arithmétique réduit le nombre concret au nombre abstrait par la considération des systèmes de numération. La théorie du nombre-facteur se rapporte à l'idée de contenance, celle du nombre-reste entre dans la féconde idée des congruences ; dans cette théorie, on a comme principes fondamentaux les théorèmes de Fermat et d'Euler, qui régissent la périodicité et conduisent à la formation du nombre par des séries

et aux criteriums de divisibilité dans tous les systèmes de numération.

Le *Tratado de Algebra elemental* est écrit sous l'influence des doctrines de Wronski au commencement du siècle ; mais aussi en profitant de la prédominance des théories combinatoires introduites par Boole et Grassmann, lesquelles donnent de nouvelles allures à la science ; elles ont amoindri la portée des vues philosophiques du célèbre mathématicien philosophe Wronski, dont le travail synthétique n'obtint pas la faveur qu'il méritait ; cela tient sans doute à ce que la Mathématique aspire toujours à se délivrer des exclusivismes des systèmes philosophiques.

La combinatoire se détachant de l'Algorithmie et dirigeant celle-ci, les algorithmes transcendants impliquant l'idée de l'infini, ou de l'imaginaire ; c'est là une heureuse distinction de Wronski. Les équations se présentent comme des moments de la génération des quantités et conduisent aux algorithmes inverses par leur résolution. La généralisation successive des concepts des quantités et des opérations permet d'harmoniser ce que nous posons dans une question, ou l'élément subjectif, avec ce qui forme la nature de l'objet ou matière de nos investigations ; cette généralisation justifie en outre l'adjonction de nouveaux êtres, dans un domaine où s'expliquent les anomalies qui existent dans des domaines inférieurs [1]. Tout cela rentre dans le plan de notre Algèbre élémentaire, où nous avons cherché l'enchaînement des idées dans le but de former un organisme.

La branche supérieure de l'Algèbre, tranchée en deux divisions, appartenant aux concepts de continuité et de combinaison, s'élève d'une part à la théorie des fonctions de variables complexes, selon la théorie de Cauchy ; d'autre part aux principes combinatoires des substitutions, qui régissent la formation des fonctions, et conduisent à la résolution des équations, d'après les méthodes de Lagrange, Abel et Galois, ce que nous avions annoncé pour la troisième partie de l'Algèbre (non publiée).

Mais dans cette étude directe de l'Algèbre, qui forme son exposition didactique, on en rencontre une autre, qui dirige

---

[1] Tout cela est développé dans la brochure *El concepto del imaginarismo en la ciencia matematica.*

les raisonnements et signale les diverses allures de la science.

L'ouvrage *Crítica y síntesis del Algebra* (1888) répond à cet ordre d'idées.

Kummer, et Dedekind avec ses nombres idéaux et ses idéaux, ont enrichi les domaines explorés par Gauss.

La continuité est étudiée dans les fonctions, notamment depuis Cauchy.

La qualité obtient sa représentation sensible par les travaux d'Argand, Mourey, Faure, Vallès ; sa théorie s'agrandit dans le mémoire *Sur les quantités géométriques* de Cauchy et arrive à la double périodicité représentée dans les travaux de Liouville et d'Hermite ; et la quantité complexe parvient à sa représentation dans la surface de Riemann. Mais la discontinuité acquiert une importance supérieure dans les travaux de MM. Darboux, Weierstrass, Dedekind, Cantor, du Bois-Reymond, où est aussi étudiée la continuité dans de très diverses circonstances ; on y rencontre tout ce qui a conduit aux développements modernes sur les singularités dans les fonctions et dans les courbes ou les surfaces.

D'autre part, la combinatoire progresse à partir de la nouvelle étendue du concept d'opération, due à Boole et à Grassmann ; elle trouve un vaste champ d'application dans l'Algorithme des formes développé par Cayley et concrété par Hamilton et par Grassmann.

D'autre part, Carnot, Poncelet, Cournot, Duhamel, etc., ont expliqué les anomalies des résultats des équations dans leurs rapports avec les données imposées *a priori* dans les énoncés des problèmes.

Et, après que Vandermonde eut créé l'Algorithme des substitutions, perfectionné par Cauchy, la théorie des équations algébriques fut édifiée sur cette base par Lagrange, Abel et Galois.

Un autre ouvrage plus élémentaire, *Problemas de Aritmética y Algebra*, nous a permis de faire une synthèse de l'Arithmétique dans le livre premier, contenant les principes généraux de la méthodologie ; cela nous conduit à une classification des problèmes de l'Algèbre élémentaire ; nous terminons par l'exposition des principes généraux de la technie algébrique, où, d'après les rapports entre la réalité du monde physique et les concepts intellectuels, nous arrivons aux discussions des problèmes, à la corres-

pondance entre les concepts de nombre et d'étendue, en utilisant les conceptions de Carnot sur les systèmes corrélatifs pour les appliquer aux corrélations algébriques.

La deuxième édition de notre Géométrie (1888), s'est accrue des principes de la Géométrie de Chasles, fondée sur le rapport anharmonique, ou le double rapport des Allemands; cette branche forme une continuation des éléments d'Euclide, comme Chasles le démontra dans son ouvrage *Les trois livres de porismes d'Euclide*, en les rétablissant d'après les lemmes de Pappus; nous donnons une grande importance dans notre ouvrage à cette dépendance qui permit à l'illustre géomètre français d'édifier sa nouvelle Géométrie sur les travaux du géomètre grec; mais nous croyons utile et juste d'exposer aussi les principes de la méthode de Staudt qui traduit en constructions graphiques le rapport anharmonique de Chasles.

La Géométrie étant si riche en raison de la variété de ses méthodes qui suggèrent des manières différentes d'opérer pour parvenir au même but, nous avons fait aussi une exposition, non seulement historique, mais critique et didactique, des principaux systèmes géométriques; euclidien, trigonométrique, barycentrique (de Möbius); celui des projections (de Poncelet), rapport anharmonique (de Chasles); de la projectivité des formes harmoniques (de Staudt). Et, parmi les méthodes analytico-géométriques, nous signalons celles d'Argand, de Bellavitis, de Hamilton et de Grassmann, tout ce qui fait l'objet de notre *Géométrie générale*, ainsi que les Géométries non euclidiennes dans leurs traits fondamentaux, sans négliger la nouvelle branche élémentaire appelée *Géométrie du triangle*, qui a enrichi la littérature mathématique à ce point de vue, grâce aux travaux de mathématiciens français, anglais et allemands.

Ces importantes généralisations de la Géométrie qui arrivent jusqu'à la Géométrie n-dimensionnelle, sont aussi exposées dans notre brochure *Las modernas generalizaciones expresadas por el Algebra simbolica, las geometrias euclideas y et concepto de Hiper-espacio* (1896), mais avec une plus haute généralisation. En effet, ces théories sont étudiées non seulement dans la Géométrie, mais aussi dans l'Algèbre à n unités complexes de Weierstrass et Dedekind, et dans les Algèbres symboliques de

Peirce et de Cayley ; enfin, et surtout, les récents travaux de MM. Lie, Klein et Poincaré, nous ont permis de présenter un précis des principes fondamentaux de la théorie des groupes de transformations, où le concept fécond de la projectivité a sa plus haute portée.

Nous avons exposé avec trop d'étendue peut-être le contenu de nos propres ouvrages ; c'est que ceux-ci sont soumis à un plan pédagogique et non purement *expositif*. C'est ce dernier point de vue qui domine dans la majorité des œuvres écrites pour la préparation de la jeunesse dans un but déterminé, et non pas avec la préoccupation de la culture mathématique générale.

Quelques travaux sur divers sujets mathématiques ont été publiés dans plusieurs recueils.

La *Revista de los progresos de las ciencias*, publié jusqu'à une époque qui remonte à une vingtaine d'années, contient quelques travaux très intéressants de M. Echegaray sur la théorie de la lumière, le déterminisme mécanique de M. Boussinesq, et sur l'électro-statique et l'électro-dynamique, dans lesquels ce savant a montré sa fécondité et ses vues originales sur ces sujets. Ce Recueil contient aussi l'exposition des travaux géodésiques dirigés par le regretté général D. Carlos Ibañez. Les revues techniques *Memorial de Artilleria*, *Memorial de Ingenieros*, *Revista de Obras publicas*, *Anuales de la Construccion* [1] contiennent des travaux de mathématiques appliquées à diverses professions techniques, et quelques travaux de Mathématiques pures. De même les anciennes revues : *Revista de los profesores de Ciencias*, publiée il y a une vingtaine d'année à Madrid, et la *Crónica científica*, publiée à Barcelone, consacrée principalement aux sciences physiques, chimiques et naturelles, ont inséré quelques articles sur les Mathématiques ; mais la seule Revue, ayant pour objet la Mathématique pure est le *Progreso matematico*, publié depuis 1895, avec la collaboration de très distingués mathématiciens et ayant un caractère international.

A cette Revue succédèrent, pour une courte période : *El Aspirante*, publié à Tolède, destiné principalement à la jeunesse qui se prépare aux études spéciales, et *El Archivo matematico*.

---

[1] Ce dernier Recueil a cessé de paraître.

La création de quelques cours de Mathématiques à l'Athénée de Madrid tend à favoriser les études mathématiques parmi nous.

M. Echegaray a terminé son remarquable cours sur la *Resolucion de las ecuaciones y teoria de Galois*, qu'il a publié, ainsi que nous l'avons déjà dit. Le savant professeur et ingénieur D. Eduardo Saavedra a commencé aussi un cours sur la *Historia de las matematica desde su origen hasta la época de Newton* ; et nous avons donné, cette année, un cours sur *La moderna organizacion de la Matematica*, comprenant un précis sur les théories : des nombres, des Géométries euclidiennes et non-euclidiennes, et de la Géométrie à n dimensions comprenant l'*analysis situs* ; sur les Algèbres ordinaire, symbolique, des formes et de la logique ; sur la théorie des fonctions de variables complexes ; sur la théorie des groupes de transformation ; et sur l'unification des concepts de la Mathématique dans le siècle actuel.

Ce que nous venons d'exposer résume ce qui a été fait en Espagne dans les diverses branches mathématiques.

Des réformes capitales s'imposent dans les Facultés des sciences, et on doit attendre une nouvelle organisation sur une meilleure base pour que les progrès se fassent sentir.

Il faut reconnaître la nécessité de distinguer les hautes spéculations mathématiques, qui conviennent à l'Université, des Mathématiques étudiées, par leurs applications, dans les écoles spéciales ; et cette confusion a empêché, à notre avis, un plus rapide développement de ces études parmi nous. C'est ce que nous avons exposé déjà dans notre mémoire *La enseñanza de la ciencia matematica en la Universidad*, publié dans le tome IV du *Progreso matematico*.

Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).

LES QUESTIONS DE TERMINOLOGIE

En mathématiques, le choix des mots qu'on emploie pour représenter les faits ou les idées a certainement une grande importance. L'uniformité des termes serait profondément désirable ; il n'est pas rare, en effet, de rencontrer dans des mémoires différents (et parfois dans le même mémoire) plusieurs mots pour représenter la même chose ; et réciproquement un seul mot est souvent employé pour représenter un certain nombre de choses différentes. De là résultent souvent une obscurité et des difficultés que ne comporte pas en lui-même le sujet traité. Ces difficultés et cette obscurité s'accroissent encore lorsqu'il s'agit de l'étude d'un sujet déterminé, dans des travaux écrits en diverses langues. Le sens de certaines locutions échappe parfois totalement ; une expression usitée dans une langue déterminée devient intraduisible dans une autre ; et l'on se trouve de la sorte arrêté par des obstacles purement artificiels.

Si grands que puissent être ces inconvénients, on peut dire cependant qu'ils n'existent pas en matière de science pure, si on les compare à ceux qui résultent, dans l'enseignement, de cette confusion du langage. Un mathématicien consommé peut, en effet, finir par comprendre, au prix de quelques efforts supplémentaires. Il a le loisir de se renseigner, prend le temps nécessaire, met à profit ses connaissances antérieurement acquises. L'élève au contraire ne le peut pas ; le temps dont il dispose lui est rigoureusement mesuré ; les notions qu'il s'agit de lui inculquer pénètrent dans son cerveau pour la première fois, et elles n'y pénètrent que par l'intermédiaire des mots. Ces mots, surtout s'ils sont un peu frappants et expressifs, jouent dans l'enseignement un rôle beaucoup plus considérable qu'on ne le soupçonne d'ordinaire. A tous les degrés, il se rencontre un assez bon nombre d'élèves qui s'y attachent avec une ardeur exceptionnelle, et semblent avoir plus de souci de les connaître et de les répéter que celui de raisonner avec précision et méthode. Or,

les premières impressions reçues sont les plus ineffaçables. Si nous devons admirer la belle et profonde pensée morale, si éloquemment exprimée par le poète [1] dans ces vers bien connus :

> Le cœur d'un homme vierge est un vase profond ;
> Lorsque la première eau qu'on y verse est impure,
> La mer y passerait sans laver la souillure.
> Car l'abîme est immense et la tache est au fond.

il faut bien se pénétrer de ceci : c'est qu'on peut avec autant de justesse au moins transporter cette réflexion dans le domaine intellectuel ; et, pour l'enseignement des sciences mathématiques notamment, il s'ensuit que la responsabilité des premiers éducateurs de l'enfance et de la jeunesse a quelque chose d'effrayant. J'emploie cette expression avec préméditation, et avec la conscience de n'exagérer en rien.

Si dans ces cerveaux tout neufs, instruments admirables pour recevoir facilement des empreintes, on jette des notions confuses enveloppées dans un langage barbare et compliqué, le nombre sera faible de ceux qui sauront plus tard rectifier les idées fausses, mettre de l'ordre et de la clarté à la place du chaos, et qui deviendront ainsi capables de comprendre, de raisonner, d'associer leurs idées.

Pour en revenir au sujet essentiel que nous traitons, c'est-à-dire à l'usage des termes, comment veut-on que des enfants ou des jeunes gens étudiant pour la première fois la science mathématique puissent arriver à se reconnaître dans un vocabulaire compliqué, parfois absurde et échappant à toute logique ?

Pour me borner, car je ne présente ici que des observations rapides, je citerai seulement un petit nombre d'exemples empruntés à la langue française, et méritant à mon avis, et à des titres divers, de provoquer quelques observations.

En Arithmétique, dans l'ancien français, les trois nombres 70, 80, 90 s'exprimaient *septante*, *octante*, *nonante* ; c'était logique, raisonnable, et absolument conforme aux principes fondamentaux de la numération décimale. Il m'a été jusqu'ici impossible de découvrir sous quelles influences, à quelle époque précise s'est introduit l'emploi insensé des appellations aujourd'hui en usage :

---

[1] Alfred de Musset.

soixante-dix, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix*; mais ce que je peux bien dire, c'est que ce fut un grand pas... en arrière. Ce que je peux ajouter, c'est qu'il rendrait un service signalé à son pays, le ministre qui aurait le courage, par une circulaire aux instituteurs de France, de prescrire impérativement le retour aux appellations d'autrefois. Ce qui l'empêchera peut-être à tout jamais, c'est l'habitude que nous avons prise de parler si souvent des immortels principes de *quatre-vingt-neuf*; remplacer cette expression par *octante-neuf* deviendrait peut-être trop cruel pour un grand nombre de mes compatriotes. Et cependant, pourquoi ne dirions-nous pas *trois-vingts* pour exprimer 60? Pourquoi pas *trois-vingt-dix* aussi bien que *soixante-dix*? Mais dans le domaine de l'absurde et de l'incompréhensible, il est oiseux de demander pourquoi.

Toujours en Arithmétique, il n'est pas rare, dans des ouvrages classiques, de rencontrer un peu au hasard les expressions de sous-multiples, diviseurs, parties aliquotes. Croit-on qu'il soit bien facile à un jeune enfant de se reconnaître dans ce dédale?

En algèbre, à propos de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, plusieurs auteurs ou professeurs, depuis un certain nombre d'années, ont adopté l'usage de désigner la quantité $b^2 - 4ac$ sous le nom de *réalisant*. Il serait tout aussi raisonnable de l'appeler *imaginarisant*, puisque les racines sont réelles quand $b^2 - 4ac > 0$ et imaginaires lorsque $b^2 - 4ac < 0$. Si l'on tenait, pour la brièveté du langage, à employer un mot spécial, pourquoi ne pas prendre alors celui de *discriminant*, qu'on retrouvera plus tard dans les équations de degrés supérieurs et qui semble avoir conquis droit de cité? C'est ce que font, du reste, beaucoup d'excellents professeurs.

Dans la théorie de la représentation géométrique des imaginaires, on a introduit le mot déplorable d'*affixe*, qui ne sert exactement à rien, sinon à fausser les idées, et sur lequel les auteurs mêmes qui l'emploient n'arrivent pas à se mettre d'accord. Pour les uns, l'affixe de l'imaginaire $a + bi$ est le point M, de coordonnées a, b; pour d'autres, c'est l'imaginaire qui est l'affixe du point; comment le malheureux commençant arrivera-t-il à avoir des idées précises au milieu d'un tel galimatias?

Je renonce à indiquer seulement les innombrables acceptions du mot *module* en mathématiques.

En Géométrie, doit-on dire *cercle* ou *circonférence* en parlant

de la ligne circulaire? Les vieux auteurs ont attaché une extrême importance à cette distinction. Beaucoup de modernes y renoncent, et à mon avis ils font bien. Est-ce que l'on fait usage de deux mots différents pour distinguer l'ellipse (ligne) et la portion du plan comprise à l'intérieur de cette ligne? Nulle confusion n'est possible ; et, s'il s'agit des questions de mesure, on distinguera toujours facilement entre les aires et les longueurs.

A propos de cette expression d'*aire*, il serait bien désirable de s'y tenir, et de ne pas alternativement s'en servir ou la remplacer par *surface*, comme on le fait trop souvent, ce qui conduit à attribuer à ce dernier mot une double signification, et ce qui empêcherait de comprendre les notions les plus simples de Géométrie, si l'on cherchait à y mettre un peu de logique et de raison. La sphère, en effet, est une surface ; et si l'on dit *la surface d'une sphère*, cela équivaut à *la surface d'une surface*. Libre à qui voudra d'admirer un semblable langage.

Ne devrait-on pas s'en tenir à une règle fixe dans la classification des surfaces, et non pas mêler au hasard et comme à plaisir les expressions *ordre* et *degré*, en les employant dans le même sens? *Degré* est une expression algébrique bien précise. L'*ordre* d'une surface, c'est le *degré* de son équation *ponctuelle*, et la *classe*, c'est le degré de son équation *tangentielle* ; on voit combien la confusion de l'ordre et du degré est déplorable.

L'usage a prévalu de désigner sous le nom de *quadriques* les surfaces du second ordre ; avec mon ami H. Laurent, qui indique ses motifs dans un article de ce Recueil, je le regrette profondément, sans trop espérer une réforme, tellement est invétérée l'habitude vicieuse dont il s'agit.

Enfin, dans la Géométrie du triangle, un volume suffirait à peine pour énumérer les appellations usitées par les divers auteurs, et la surabondance des noms propres dont on a fait usage. Les choses en sont venues à ce point que l'anecdote suivante est absolument authentique ; sous son apparence plaisante, elle est profondément instructive.

Un mathématicien, ayant rencontré l'expression *point de X...* dans des travaux de Géométrie, et ne trouvant pas la définition de cet élément, imagina ne pouvoir mieux faire, pour sortir d'embarras, que de s'adresser directement à M. X..., mathématicien fort

distingué, et de qui je tiens le récit. Et M. X... se vit contraint de répondre à son correspondant : « Je me suis jadis un peu occupé du triangle ; j'ai vaguement appris que mon nom avait été attribué par quelques auteurs à un certain point remarquable : voilà tout ; je vous prie de m'excuser si je me vois hors d'état de vous renseigner, mais j'ignore totalement ce que c'est que *mon point*. »

En cette dernière matière, il y a du reste de larges circonstances atténuantes. Il s'agit d'une branche toute récente de la Géométrie, et peut-être les auteurs, dans cette période d'enfantement, ne pouvaient-ils guère s'y prendre autrement qu'ils ne l'ont fait. Mais aujourd'hui un débroussaillement est devenu nécessaire ; certaines parties de la Géométrie du triangle offrent un assez grand intérêt pour justifier leur introduction dans l'enseignement ; et c'est pour ces questions classiques qu'une nomenclature précise et rigoureuse est maintenant tout à fait indispensable.

Du reste, je tiens beaucoup à ce qu'on ne se méprenne pas sur la portée des critiques que je formule. Il est parfaitement compréhensible, à mon avis, il est même assez légitime qu'un auteur rencontrant une notion nouvelle emploie un mot nouveau pour l'exprimer en évitant de longues périphrases. Si le vocable est heureux et utile, l'emploi pourra s'en généraliser, la science et l'enseignement en tireront profit ; dans le cas contraire, il méritera de tomber dans l'oubli ; mais de toutes façons personne n'éprouvera de ce fait de difficultés sérieuses à comprendre un travail où les termes employés, fussent-ils nouveaux, sont bien définis. Le malheur, surtout quand l'inventeur de l'expression est un géomètre de valeur et jouit d'une assez grande notoriété, c'est que les imitateurs ou commentateurs surviennent, s'emparent de l'expression, bonne ou mauvaise, sans la préciser, sans se demander si elle est bien justifiée, et commencent ainsi à la répandre ; d'autres les suivent, qui font de même ; et un beau jour la langue scientifique est enrichie (?) d'un mot de plus. Celui qui l'avait lancé pour la première fois est souvent le premier à en éprouver du regret.

J'ai hâte d'arriver aux conclusions qui résultent des remarques précédentes. La première de toutes, c'est qu'il faudrait une grande prudence dans l'emploi des mots que l'on peut inventer, et une prudence, poussée plus loin encore, dans la réédition, sans critique ni examen préalable, des expressions nouvelles inventées par autrui.

De plus, j'espère en avoir dit assez pour faire comprendre l'importance du sujet, et pour provoquer des études nouvelles, moins sommaires et moins générales que ce rapide aperçu : c'est avec grande satisfaction que nous accorderons, dans l'*Enseignement mathématique*, l'hospitalité la plus large à des articles consacrés à ces questions, au point de vue des diverses langues en usage.

Dans le même ordre d'idées, j'insiste sur l'intérêt capital que présenterait une sorte de vocabulaire comparatif, fût-il d'abord incomplet, dans lequel figureraient en regard les mots *classiques* du langage mathématique qui se correspondent bien exactement et rigoureusement d'une langue à une autre. Un tel tableau, limité à l'allemand, l'anglais, l'espagnol, le français, l'italien, rendrait déjà de très grands services.

En dernier lieu, il me semble nécessaire de ne pas me borner à de vaines critiques, et de montrer, à côté du mal, quel est, (s'il en est un), le remède possible. Personne, en effet, ne peut empêcher quelqu'un d'employer des expressions vicieuses ou absurdes, surtout si l'habitude a consacré l'emploi de ces expressions. Il n'y a pas de sanction, et l'on cherche en vain quelle serait l'autorité morale qui pourrait intervenir avec assez de puissance. C'est à peu près la même question que pour l'orthographe. Mais, pour nous en tenir à l'exemple de la France, si l'Académie française codifie de loin en loin la langue en se bornant à peu près à consacrer l'état des choses plutôt qu'à décréter arbitrairement des lois, on ne saurait guère exiger de l'Académie des sciences qu'elle se détournât de ses travaux ordinaires pour s'attacher à la confection d'une langue mathématique correcte.

La différence est d'ailleurs essentielle : tandis que la question de l'orthographe concerne une seule nation, celle du vocabulaire mathématique intéresse les savants et les professeurs de tous les pays. Elle est profondément internationale, et c'est précisément cette remarque qui nous fait entrevoir la possibilité d'une solution. C'est, à notre avis, dans l'institution des Congrès internationaux qu'on doit la rechercher. Au congrès de Zurich (1897) qui fut une sorte de session d'organisation, la question ne fut pas discutée et ne pouvait pas l'être ; c'est à peine si elle fut posée en quelques mots. Il n'y avait là, du reste, ni une section de terminologie, ni une section d'enseignement. Il paraît à peu près

décidé qu'au congrès de Paris (1900) il y aura une section d'enseignement, ce dont tout le monde devra se féliciter. Quant à une section de terminologie, la création en serait à mon avis pour le moins inutile; arrivant de tous les points du monde, réunis pour quelques jours, les membres de cette section se trouveraient saisis de questions sur lesquelles beaucoup d'entre eux n'auraient pas eu le loisir de réfléchir à l'avance, et qui, pour être bien résolues, exigent qu'on ne livre rien à l'improvisation.

Mais, autant une section spéciale aurait peu notre approbation, autant nous semblerait intéressante et utile la création d'une commission internationale, destinée sûrement à devenir permanente, et qui comprendrait des professeurs, des philosophes, des historiens, des philologues appartenant au monde mathématique. Deux ou trois séances de cette commission, tenues au lendemain du congrès, suffiraient pour établir le plan d'ensemble des travaux; et ceux-ci se poursuivraient ensuite méthodiquement et sans difficulté sous forme de correspondances entre les divers membres. Dans les années qui s'écouleront entre le congrès de 1900 et le suivant, on serait ainsi parvenu à réunir les matériaux nécessaires à la préparation d'un très intéressant rapport, partiel ou total; la question aurait fait un grand pas en avant. Les congrès suivants achèveraient l'œuvre entreprise; on y mettrait tout le temps qu'il faudrait : dix ans, vingt ans peut-être. Mais on finirait par arriver au but. Le vocabulaire international qui représenterait la conclusion d'un semblable travail ne pourrait être imposé à personne; mais il aurait une telle autorité morale qu'il s'imposerait de lui-même; et l'on serait peut-être alors délivré de la déplorable anarchie de langage dont j'ai essayé de faire ressortir les multiples inconvénients.

En attendant cette solution idéale, un peu lointaine à coup sûr, c'est un devoir pour les professeurs, pour les mathématiciens, de la préparer en veuillant bien porter un peu leur attention sur la terminologie. La publication de leurs observations, les échanges d'idées auxquels ces observations ne manqueront pas de conduire, contribueront dans une large mesure à améliorer progressivement l'état présent des choses.

C.-A. LAISANT.

LA PÉDAGOGIE SCIENTIFIQUE [1]

Les termes de *pédagogie scientifique*, de *pédagogie expérimentale*, de *pédologie* sont employés indifféremment aujourd'hui pour désigner un mouvement tout nouveau de recherches qui se produit depuis quelques années dans le monde pédagogique; ce mouvement, d'abord timide et incertain, a pris dans ces tout dernières années, une très grande extension en Amérique et en Allemagne; l'Italie et l'Angleterre n'y sont pas restés indifférentes; quant à la France, je crois bien que sa participation principale est celle de mon laboratoire de la Sorbonne, quoique j'aie appris tout dernièrement qu'un laboratoire de recherches analogues vient d'être fondé à Lille; mais je manque de renseignements sur ce point.

La pédagogie nouvelle se distingue surtout de l'ancienne par la très large place qu'elle entend faire à l'observation et l'expérience; elle cherche à remplacer les affirmations *a priori* par des résultats précis et par des chiffres. Cette révolution, si elle s'opère, ne sera que la conséquence logique de celle qui s'est accomplie en psychologie, et qui est en voie de s'accomplir dans toutes les sciences dites morales, où l'on voit peu à peu la période de la verbologie remplacée par la période des observations. Je compte

---

(1) Nous tenons à exprimer nos plus sincères remerciements, pour son remarquable article, à l'éminent directeur du Laboratoire de psychologie physiologique de la Sorbonne.

Quelques lecteurs trouveront peut-être que notre Recueil s'éloigne, en publiant des travaux de cette nature, du domaine mathématique. A notre avis, ce serait une erreur de leur part; ces belles recherches sont dignes d'attirer l'attention la plus sérieuse des mathématiciens à un double point de vue. D'abord, l'enseignement mathématique à tous les degrés, qui exige chez les élèves de grands efforts cérébraux, est intéressé au perfectionnement de méthodes pédagogiques dont le but final est d'arriver à un maximum de résultats, avec un minimum de fatigue. En second lieu, l'esprit mathématique peut être appelé à apporter le plus utile concours aux progrès des méthodes en question; nous avons besoin des physiologistes et des psychologues; les physiologistes et les psychologues ont besoin de nous; d'une collaboration mutuelle pourront résulter de grands avantages pour les progrès de l'enseignement et de la science.

LES DIRECTEURS.

bien que dans un avenir prochain on sera étonné de lire certaines revues pédagogiques, qui paraissent encore en ce moment, et qui contiennent comme documents intéressant la science de l'éducation, des discours de ministres ! Actuellement, on ne peut faire un cours de pédagogie que si on a un certain talent oratoire : c'est une preuve de misère : une science doit en quelque sorte se suffire à elle-même et ne pas avoir besoin d'éloquence pour s'enseigner.

Les recherches de pédagogie expérimentale avancent très lentement : pour bien des raisons qu'il est facile de deviner, l'expérimentation dans ce domaine est extrêmement délicate. Il y a des difficultés qui tiennent surtout à la nouveauté des questions posées. On peut dire que les grandes voies du pays ne sont pas encore tracées ; il faut inventer, avoir des idées que personne n'a eues jusqu'ici. Quelle curieuse pensée, par exemple, curieuse et inattendue, que celle de mesurer la fatigue mentale par le degré d'obtusion que cette fatigue produit dans le sens du toucher ! L'esprit qui a conçu cette première idée d'expérience devait être doué d'une originalité bien rare.

Il est clair que la pédagogie expérimentale ne se fait pas dans le cabinet, ni dans le laboratoire ; elle exige une étude directe des enfants. Par conséquent, elle devrait être faite surtout par les maîtres, qui sont en contact continu avec les élèves. Je compte beaucoup, pour l'avenir, sur le concours que les instituteurs pourront nous apporter ; mais il faudra faire d'abord une sélection, et ensuite il sera nécessaire de leur donner une direction précise. L'observation et l'expérimentation sont de véritables pièges pour ceux qui ne s'y sont pas rompus de bonne heure ; le meilleur instituteur peut, de très bonne foi, aboutir à des résultats entachés d'erreur, parce qu'il n'est pas suffisamment au courant de ce qu'il faut éviter. Bien souvent, dans mes visites, j'ai remarqué très discrètement combien certaines enquêtes officielles sont puérilement conduites ! Je ne voudrais citer aucun nom, je ne veux décourager personne ; mais je vais prendre un exemple théorique. Un administrateur se demande, par exemple, si l'exercice de la natation peut favoriser le développement des études intellectuelles ; on prendra donc comme matière à expérimentation une première classe d'école primaire, dont les élèves se préparent au certificat d'études ; on enverra ces élèves le plus

souvent possible aux bains de Seine, quand la saison le permettra ; ils feront leurs exercices sous l'œil d'un professeur émérite de natation ; et au mois de juillet on peut être certain que, si l'administration a cru *a priori* que la natation est un exercice salutaire, une forte majorité de ces excellents nageurs passera brillamment leur certificat d'études. Je laisse au lecteur le soin d'apprécier ce qu'il y a de complaisance dans une semblable enquête.

Je citerai un second exemple, qui est d'un genre tout différent, je me hâte de le dire. Dans un département du Midi, un inspecteur primaire fort intelligent a eu l'idée ingénieuse de demander à ses instituteurs une étude détaillée sur l'intelligence et sur le caractère moral de quelques-uns de leurs élèves. Les instituteurs ont répondu à cet appel ; quand l'appel vient d'un supérieur, on y répond toujours ; les descriptions de caractère ont été faites longuement et minutieusement, et on les a même montrées un jour à un haut fonctionnaire en tournée, qui a feuilleté un moment ces cahiers et a daigné rendre hommage à ces essais de pédagogie expérimentale. Est-ce bien là, demanderai-je, de la pédagogie expérimentale, et ces documents pourront-ils servir à quelque chose ? Certes, ils ont l'utilité d'attirer l'attention des instituteurs sur leurs élèves ; certains maîtres y prendront le goût de l'observation et de l'analyse ; mais des descriptions de caractère, des descriptions pures et simples sont-elles des documents pouvant servir à la science ? Je ne le crois pas. Il manque ici, à ces exercices, pour constituer des documents utilisables, ce quelque chose dont un expérimentateur ou un savant peuvent seuls avoir l'idée. La matière à laquelle je touche en ce moment est si riche que je ne puis vraiment la traiter en quelques mots. Je conclurai simplement en disant que si les instituteurs doivent être utilisés, pour les progrès de la pédagogie expérimentale, on devrait faire d'abord leur éducation scientifique ; j'entends par là qu'on devrait leur apprendre comment on doit observer et expérimenter ; cet enseignement pratique n'est donné nulle part, je crois, d'une manière régulière ; certains esprits supérieurs s'en passent ; la plupart se l'assimilent en voyant travailler leurs maîtres, ou en travaillant en collaboration avec eux ; ce sont les plus fortunés. J'ai souvent pensé à cette lacune de notre enseignement. Dans nos universités, qu'apprend-on aux élèves de l'enseignement supérieur, comme

méthodes de travail ? On leur apprend à découvrir un nerf sur un chien, à noircir un cylindre, ou à colorer une préparation : c'est fort bien, mais ce n'est là qu'une toute petite partie de notre métier. Il faudrait aussi leur apprendre quel travail on ne doit pas entreprendre, quelle recherche est presque inutile, comment on doit éviter telle cause d'erreur, quel degré de précision comporte telle étude.

Les méthodes de la pédagogie expérimentale sont au nombre de trois principales : la première est le questionnaire ; la seconde est l'observation, la troisième est l'expérimentation. Ces distinctions sont un peu scolastiques, car elles sont loin de s'appliquer exactement à toutes les circonstances ; nous les conserverons, parce qu'elles fournissent un cadre commode à l'exposition.

La méthode des questionnaires doit être surtout considérée comme une méthode préliminaire ; elle a l'avantage, quand elle est bien organisée, de provoquer un grand nombre de réponses qui donnent une impression d'ensemble sur le sujet. On rédige d'abord des questions, le plus clairement possible, en se gardant bien d'indiquer la réponse qu'on attend, et on adresse ce questionnaire aux personnes compétentes. Cette méthode de questionnaire a été employée sur une vaste échelle en Amérique ; et dernièrement Stanley Hall, président de l'université de Clark, en a fait une application gigantesque ; Monroe, un observateur de l'enfance, vient d'entrer dernièrement dans la même voie que son compatriote. Il faut parler avec respect d'efforts qui doivent coûter un temps considérable : chacun peut se rendre compte du travail nécessaire pour lire, apprécier, juger, classer, analyser mille réponses à une question ; cela exige un vrai dévouement. Je demanderai seulement que les thèmes de ces questionnaires, par l'importance des questions soulevées, soient à la hauteur de ce labeur ; et je ne sais vraiment pas si on a eu raison de faire porter ces énormes questionnaires américains sur des questions comme celles des causes du rire et du chatouillement chez les enfants.

Ayant pratiqué moi-même, à plusieurs reprises, la méthode des questionnaires, j'ai constaté que le succès de ces enquêtes dépend d'une foule de circonstances très complexes. J'ai fait par exemple une enquête sur le jeu d'échecs à l'aveugle, et je me suis adressé à des joueurs émérites, dont l'amour-propre était justement flatté,

et qui se sont par conséquent empressés de me répondre. Mais lorsqu'on s'adresse au grand public, pour des questions qui ne réveillent aucune espèce de vanité, le stimulant n'est plus le même. Je ne m'étonne pas que M. Marillier ait obtenu un si petit nombre de réponses dans son enquête sur les hallucinations des personnes saines. J'ai fait une enquête sur le caractère des enfants, et la publication des questions dans le *Petit Journal* et dans le *Temps* m'a donné un résultat dérisoire. Maintenant, lorsque je m'adresse aux instituteurs, je suis sûr d'avance que presque personne ne me répondra ; je les excuse, du reste, du meilleur de mon cœur, d'autant plus qu'il y a un moyen bien plus expéditif pour obtenir des réponses : c'est de prendre l'intermédiaire de MM. les inspecteurs d'académie.

La pratique de la méthode des questionnaires nous enseigne non seulement quelle voie il faut suivre pour arriver aux correspondants bénévoles, mais encore comment les questions doivent être posées pour être comprises. Je recevais dernièrement un intéressant opuscule italien, dont l'auteur a fait de longues et consciencieuses recherches anthropologiques dans les écoles. Il y a dans ce travail des parties excellentes, surtout celles qui ont trait à l'anatomie de la tête ; il y a aussi une partie psychologique, et c'est beaucoup moins bon. L'auteur était curieux de connaître l'état de la mémoire, du jugement, l'esprit d'observation chez un certain nombre d'élèves. Nous étudions en ce moment ces questions difficiles dans nos laboratoires, nous savons qu'il faut les regarder de très près. L'auteur italien a employé le questionnaire ; par écrit, il a simplement demandé à ses collègues : « Vos élèves ont-ils une mémoire bonne, moyenne ou mauvaise ? Ont-ils un esprit d'observation bon, moyen ou mauvais ? » C'est très simple ; on pourrait, avec cette formule, mettre en questionnaire toutes les facultés de l'esprit. A quoi aboutirait-on ? Quel atome de vérité espère-t-on glaner ? Il est clair que les réponses ne signifient pas grand'chose, car elles dépendent étroitement de l'appréciation du correspondant. Une réponse n'est utilisable que si elle renferme un fait d'observation, ou une appréciation contrôlable.

La méthode d'observation, que j'ai distinguée plus haut de la méthode d'expérimentation, ne fait en réalité qu'un avec elle ; car observer et expérimenter ne sont que des degrés d'une même

enquête. Leur mérite est surtout de mettre l'observateur en présence de l'enfant, et de lui donner une vision directe des faits, lui permettant de se faire une opinion personnelle. Les visites des écoles, lycées et collèges, et institutions de toutes sortes, par des pédagogues expérimentateurs, ne sont pas encore entrées dans nos mœurs, si j'en juge par l'étonnement qu'elles provoquent de la part des élèves et aussi des professeurs. En ce qui concerne le primaire à tous les degrés, des autorisations nous sont très libéralement données par le conseil municipal de Paris [1] ; mais j'ai le regret de constater que jusqu'ici la porte de tous les établissements d'enseignement secondaire reste sévèrement close. Je parle seulement de la France, bien entendu ; car il en est tout différemment en Amérique et en Allemagne. Dans ces pays, on a compris depuis longtemps qu'il y a un grand intérêt à admettre dans les écoles secondaires des personnes compétentes, faisant des recherches de pédagogie ; ce n'est que dans ces écoles qu'on peut trouver, en réalité, le moyen d'étudier les formes littéraires de l'intelligence, car la culture des lettres n'est pas poussée aussi loin dans le primaire. Je puis citer un cas tout récent qui va montrer combien cette défense d'entrer dans l'enseignement secondaire a nui à nos études, et aussi au progrès de la pédagogie. — ce qui revient à dire, en somme, à l'intérêt des élèves. Au cours de nombreuses recherches dans les écoles normales d'instituteurs, et notamment à celle de Melun, où j'ai trouvé un accueil si empressé auprès de M. Loube, inspecteur d'académie, et de M. François, directeur de l'école, j'avais remarqué que pour certaines épreuves, des élèves réputés intelligents donnaient des résultats tout à fait médiocres ; et en examinant la question de plus près, en interrogeant les professeurs sur les aptitudes de ces élèves, je me convainquis qu'il s'agissait de jeunes gens ayant surtout des qualités littéraires. J'avais donc trouvé par hasard des épreuves — nous disons des *tests* — qui mettaient bien en

---

[1] Je profite de cette occasion pour adresser mes plus vifs remerciments au Conseil municipal de Paris, à M. de Selves, préfet de la Seine, et à M. Bédorez, directeur de l'enseignement primaire. La pédagogie expérimentale française leur doit beaucoup. J'adresse aussi de sincères remerciments à M. le directeur de l'enseignement primaire au ministère de l'Instruction publique, et à MM. les Inspecteurs d'académie de province.

lumière certaines qualités et certains défauts d'esprit, et j'avais l'espérance de pouvoir distinguer l'esprit littéraire et l'esprit scientifique. Cette espérance, je la conserve ; mais comment continuer une recherche qui donnait de si belles promesses ? Pour étudier des élèves appartenant à un type franchement littéraire, il faudrait avoir accès dans les lycées ; mais les lycées nous ferment leurs portes ! Voilà, je pense, l'exemple le plus topique que je puisse citer des dommages que certains refus d'autorisation causent à nos études. Remarquons bien qu'il s'agit d'épreuves attrayantes, ayant un caractère pédagogique, capables, j'en ai la preuve, d'intéresser vivement les élèves ; au besoin, on pourrait demander l'autorisation des parents, et comme il s'agit de recherches destinées à rendre des services aux élèves en précisant leurs aptitudes, il est bien certain qu'aucun parent ne refuserait son autorisation. N'importe ; il y a une barrière, on ne peut pas passer.

Observation et expérimentation peuvent se faire sur les élèves de deux manières différentes : individuellement et collectivement. La forme collective est moins précise, mais beaucoup plus rapide, et il me semble que c'est par elle qu'il faut commencer. Il y a un an que j'ai fait par cette méthode avec mon collaborateur M. Vaschide une étude de plus de 40 épreuves sur 90 élèves d'école primaire élémentaire ; il est vrai que nous avions le concours d'un directeur d'école qui s'est prêté toujours à nos recherches avec le zèle d'un collaborateur véritable, M. Michel. Ces épreuves collectives prennent peu de temps, en général un quart d'heure ; la distribution des copies et l'explication prennent environ 5 minutes et l'expérience proprement dite dure 10 minutes. En Allemagne, on a surtout employé cette méthode collective pour étudier l'influence de la fatigue scolaire : on faisait faire aux élèves une dictée ou des exercices d'addition et de multiplication, et on comptait le nombre de fautes commises suivant les heures de la journée ou suivant la durée du travail mental ayant précédé cet exercice ; on a vu que ces méthodes permettent de déceler la fatigue dans des cas où on n'en aurait eu qu'un soupçon vague. Toutes ces questions se trouvent résumées dans le livre (1)

(1) *La fatigue intellectuelle*. Paris, Reinwald, 1898.

que j'ai écrit avec M. Victor Henri, un de mes plus assidus collaborateurs, et où nous avons essayé de mettre au point les méthodes capables de résoudre la question du surmenage intellectuel, question qui a été débattue jusqu'ici par tant d'auteurs d'une manière oiseuse.

La méthode d'observation individuelle est infiniment plus lente que la méthode collective, et il ne faut y avoir recours dans les écoles qu'avec discrétion, car on est obligé avant tout de ne pas faire perdre à l'enfant un temps précieux : la méthode d'observation individuelle a le grand avantage d'une étude faite de très près : on interroge directement l'enfant, on apprécie la manière dont il comprend les questions, on fait une analyse bien plus fine que dans les épreuves collectives. Il y a des expériences qui ne se prêtent pas à cette méthode, ce sont celles qu'une indiscrétion peut fausser ; car si on pose à l'enfant isolé certaines questions, toute l'école, au bout d'une heure, connaît ces questions, et les enfants qui arrivent ensuite auprès de l'expérimentateur sont instruits d'avance de ce qu'il faut répondre. J'ai vu le fait se produire d'une manière plaisante pendant une enquête qu'un de mes collègues faisait sur l'audition colorée dans une école primaire. Il appelait les enfants, un à un, dans le cabinet du directeur, et leur posait quelques questions, du reste très habiles, sur les couleurs des lettres et sur les schèmes visuels. Au début de la recherche, très peu d'enfants accusaient de l'audition colorée ; mais au bout d'une heure, tous les enfants qu'on appelait affirmaient hardiment qu'ils en avaient. Cependant, il n'y avait pas eu de récréation dans l'intervalle ; les confidences se faisaient en classe et surtout dans l'escalier. Je suppose que c'est à cette cause d'erreur qu'on doit d'avoir rencontré dans certains milieux scolaires un pourcentage si élevé d'audition colorée.

Nous réservons, par convention de langage, le terme d'expérimentation à toute étude de pédagogie qui se fait à l'aide d'instruments. Apporter des instruments avec soi dans une école soulève souvent un léger émoi. Il y a beaucoup de curiosité de la part des élèves, et de certains professeurs, qui d'habitude admirent d'autant plus un instrument qu'il est plus compliqué ; mais la majorité des pédagogues reste en méfiance, et quelques-uns sont même allés jusqu'à dire (dans une analyse de notre ouvrage sur la fatigue intel-

lectuelle, que c'est là une pédagogie de vétérinaire. Rendons-leur leur mépris, avec usure, et passons. Il y a un certain nombre d'instruments qui devraient faire partie du matériel de toutes les écoles, et dont tout les pédagogues devraient se servir : c'est la toise, la balance, le dynamomètre et le ruban métrique : ces instruments très simples sont ceux qui indiquent le mieux le développement physique d'un enfant. A qui reste-t-il à apprendre aujourd'hui que le développement physique des enfants d'école devrait être surveillé sévèrement de mois en mois, pour que le maître pût se rendre compte des retards et des précocités que peut subir ce développement ? Des notions de ce genre doivent exercer une influence énorme sur la direction des études ; certains cas de paresse, d'indiscipline même ne peuvent être jugés sainement que si on les rapproche des phases de développement physique que parcourt l'enfant incriminé ; de même, certaines questions de surmenage individuel sont singulièrement éclaircies par la balance qui accuse des pertes de poids. Je m'étonne toujours que dans notre époque de sports et de bicyclette, les pères de famille, dont l'attention est si souvent attirée vers l'importance de l'éducation physique, n'aient jamais demandé que le développement physique de leurs enfants fût suivi et contrôlé dans toutes les écoles. Il y aurait là une innovation bien simple à accomplir, bien peu coûteuse, et le personnel nécessaire serait vite trouvé et instruit. Je me plais à rappeler à ce propos qu'une étude aussi complète que possible a été faite par moi l'an dernier avec M. Vaschide dans l'école normale d'instituteurs de Versailles, où nous avons trouvé un accueil si sympathique auprès de M. l'inspecteur d'Académie Pestelard, de M. le directeur Platrier, et de MM. les professeurs Provost et Martin. Cette étude nous a fourni un certain nombre de méthodes nouvelles qui nous permettent aujourd'hui d'apprécier avec rapidité le développement physique d'un élève, en contrôlant les plus importantes de ses fonctions organiques. Pédagogie de vétérinaire, dira l'autre ; eh bien soit : il ne serait pas mauvais que nous fissions la même attention au développement corporel de nos enfants que les éleveurs à celui de leurs animaux.

Je termine ici ces simples notes ; je n'ai pas voulu traiter systématiquement un point particulier, mais donner, par une

conversation à bâtons rompus, une vue d'ensemble. Ce qu'il faut retenir, c'est que la psychologie expérimentale existe, qu'elle a déjà produit des travaux importants, et que, malgré les obstacles que la routine met sur son chemin, elle fait des progrès incessants, surtout à l'étranger. Puisque cette Revue est appelée à circuler dans l'enseignement secondaire, je fais appel au concours de tous les professeurs de cet enseignement auxquels j'aurai réussi à donner un peu de curiosité et de sympathie pour nos efforts.

Alfred Binet (Paris),

Directeur du laboratoire de psychologie physiologique de la Sorbonne (Hautes Études).

CONSIDÉRATIONS SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

DANS LES CLASSES DE SPÉCIALES EN FRANCE

L'étude des Mathématiques est à juste titre considérée comme une excellente gymnastique de l'esprit, mais elle présente d'autres avantages : c'est une arme puissante pour la lutte dans la vie. Par le temps qui court, le besoin de se créer une situation est devenu impérieux pour la plupart des jeunes gens, la fortune de leurs parents ne leur permettant pas de jouir de la vie sans déployer un travail opiniâtre.

Il en résulte que l'enseignement, celui des Mathématiques en particulier, doit être *utilitaire*. En réalité, il ne l'est pas, et les élèves de la classe de mathématiques spéciales dont je vais m'occuper dans cet article sont instruits et élevés comme si tous devaient devenir des professeurs. L'enseignement semble donné uniquement en vue d'orner le cœur et l'esprit des jeunes gens.

C'est, dit-on, la faute des programmes d'admission à l'École polytechnique. — Je ne prétends ici, ni attaquer, ni défendre, ni critiquer ces programmes ; cette critique a été faite ailleurs par des hommes d'une haute valeur scientifique, et les convenances

m'interdisent l'éloge aussi bien que le blâme. — Mais ce que je veux démontrer, c'est qu'avec les programmes existants, non seulement il est possible de donner un enseignement utilitaire, mais qu'il est possible de diriger en même temps cet enseignement de manière à développer les facultés intellectuelles des élèves.

Quelques mots avant d'entrer en matière : les professeurs de nos classes de mathématiques spéciales sont agrégés et même docteurs, ils ont subi de rudes épreuves pour conquérir leurs grades universitaires ; ce sont des hommes d'une rare distinction ; je serais désolé que l'on pût croire que je veuille diminuer leur mérite scientifique ; il me sera cependant permis de dire qu'il leur manque quelque chose. Leur éducation a été trop théorique, ils ont toujours vécu dans les abstractions, et pour être de parfaits éducateurs, ils auraient besoin de passer un an dans une école d'application ou dans un atelier de construction ; ils n'auraient plus alors cette tendance à faire de leurs élèves de futurs professeurs. Sans doute nous avons besoin de professeurs ; mais il y en a bien assez ; il y en a même trop, car on ne sait comment employer les licenciés que les Facultés fournissent à foison. Mais nous avons besoin aussi d'ingénieurs, et c'est ce que l'on oublie.

Maintenant j'arrive à mon sujet : il est entendu que la classe de spéciales est une classe préparatoire à l'École polytechnique ; son programme est tout tracé, c'est celui des examens à l'École polytechnique ; on prétend que ce programme est trop chargé, que l'on arrive à grand'peine à le développer complètement pour le moment où commencent les examens, et que cela donne lieu à un surmenage effrayant.

Jamais, depuis 1852, les programmes n'ont été moins chargés ; quelques anciens élèves, pères ou grands-pères de candidats, sont effrayés de voir les déterminants dans le programme : cette critique, n'est-ce pas, n'est pas sérieuse, j'en prends les candidats (les bons, bien entendu) pour juges ; voudraient-ils sérieusement qu'on les empêchât de faire usage de ces merveilleux instruments qui viennent à chaque instant alléger leur mémoire et faciliter les calculs ? L'introduction des déterminants fournit un travail supplémentaire négatif aux candidats, et l'on peut dire sans crainte d'être démenti, que jamais le programme de l'École poly-

technique depuis 1852, n'a été moins chargé. Nos fils sont moins surmenés que nous ne l'avons été, surtout si l'on veut bien considérer que les méthodes se sont tellement simplifiées que des problèmes considérés comme presque insolubles par nos professeurs, sont aujourd'hui facilement résolus par des élèves médiocres.

Voici quelques exemples à l'appui de ma thèse : quand nous avions un lieu de sommets à chercher, il fallait être extrêmement ingénieux ; aujourd'hui on a des formules toutes prêtes qui donnent l'ensemble des équations des axes.

De mon temps, on n'aurait jamais songé à demander un lieu de sections principales ; aujourd'hui on a une formule très simple et très symétrique qui fait connaître l'ensemble des trois plans principaux d'une surface du second ordre ; et ces déterminants, si maudits par les papas des candidats, permettent de retenir la formule sans effort : on voudrait l'oublier après l'avoir vue une fois, on ne le pourrait pas !

Tout a été simplifié et éclairci, les théories, les discussions, les notations et jusqu'aux dénominations des choses : ainsi on a débaptisé les courbes et les surfaces du second ordre pour en faire des coniques et des quadriques ; ce dernier mot, disons-le, n'est pas heureux, il ne sent pas le bon français et s'il fallait absolument changer le nom des surfaces du second ordre, j'aurais préféré le mot conicoïde au mot quadrique : on dit ellipse, ellipsoïde ; hyperbole, hyperboloïde ; parabole, paraboloïde ; donc on devrait dire : conique, conicoïde.

Si donc en 1852 on était prêt à passer ses examens en juin, il doit en être de même *à fortiori* aujourd'hui. Enfin, les professeurs qui se plaignent d'avoir de la peine à terminer le cours en temps utile trouvent le moyen de parler des coordonnées non cartésiennes, de l'involution, de l'homographie, des points singuliers, des points à l'infini, etc., toutes choses très intéressantes, j'en conviens, mais qui ne sont pas demandées aux examens.

Donc : 1° *pour toutes ces raisons, on a plus de temps qu'il n'est nécessaire pour terminer le cours en temps utile.*

Le cours de spéciales devrait commencer par une bonne revision de la partie élémentaire des mathématiques, *surtout des principes*, car ce sont les principes que les élèves ne connaissent pas : on ne les leur enseigne pas dans les classes élémentaires,

parce que c'est *trop abstrait*, on ne les enseigne pas en spéciales parce que les élèves sont censés les connaître ; cercle vicieux ; conclusion : les principes fondamentaux de la science ne seront sus et compris que, de ceux qui après avoir terminé leurs études, voudront, à quarante ans peut-être, philosopher sur ce qu'ils auront appris dans leur jeunesse. Les principes sont cependant une vigoureuse gymnastique pour l'esprit ! Bien compris, ils facilitent singulièrement le travail ultérieur.

Enfin en faisant de fortes élémentaires on acquiert l'habitude du calcul et le sens du raisonnement bien mieux qu'en développant des formules de Géométrie analytique..

Donc : 2° *ce n'est pas du temps perdu que celui qui est consacré à bien se familiariser avec les éléments.*

Le programme est muet au sujet de la notation à employer pour représenter les dérivées ; les professeurs avaient le choix entre les fluxions, démodées, que l'on ne connaît plus, mais qui avaient du bon ; la notation des accents de Lagrange, née d'une idée fausse, notation barbare, rejetée par tous les peuples civilisés, rejetée par Lagrange lui-même qui n'en a jamais fait usage dans ses mémoires, et la notation des différentielles de Leibniz, universellement employée comme étant la plus simple, la plus expressive, la plus commode. Eh bien ! le croirait-on ? C'est la notation de Lagrange que la plupart des professeurs ont adoptée ! Et tout cela pour économiser une demi-heure ! Mais cette demi-heure est largement rattrapée par la facilité avec laquelle on expose les doctrines avec la ntoation différentielle. Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées ; c'est aux gens compétents que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle.

Donc : 3° *ce n'est pas du temps perdu que celui qui se passe à enseigner la notation différentielle.*

La première partie de ma démonstration est faite : on a le temps d'enseigner les mathématiques élémentaires et la notation différentielle, et cela sans abaisser le niveau intellectuel des élèves, au contraire.

Au point de vue utilitaire, on y gagne ceci : c'est que la partie la plus utile des Mathématiques, à savoir les mathématiques élémentaires et le Calcul différentiel, sont à peu près sues et que les deux tiers des élèves, ceux qui ne sont pas reçus à l'École polytechnique, ont cependant acquis des connaissances solides et capables d'être utilisées.

Les programmes exigent que les élèves sachent résoudre un triangle et faire des calculs numériques : j'avoue que ces travaux pratiques ne sont pas faits pour développer l'intelligence, mais ils exercent l'attention, faculté qu'il n'est pas mauvais de développer. C'est surtout sur ce point que les professeurs devraient insister; un bon calculateur trouve presque toujours à gagner sa vie. Or, c'est avec le plus profond mépris que l'on considère les exercices numériques : je puis affirmer, sans crainte d'être démenti, qu'il n'y a pas un seul élève dans nos classes de spéciales capable de résoudre cette question très simple, éminemment utile, et que l'on a besoin de résoudre à chaque instant dans la pratique :

Les données d'un problème étant connues avec une approximation donnée, entre quelles limites seront comprises les erreurs des inconnues ?

J'ai pu me convaincre que d'anciens élèves de l'École polytechnique et de l'École normale étaient absolument incapables de résoudre cette question, et ces jeunes gens étaient candidats à des fonctions qui exigeaient des calculateurs exercés !

Quand donc apprendra-t-on à résoudre cette question importante, si ce n'est en spéciales et comme première application du calcul différentiel ? N'est-ce pas presque un crime que de ne pas enseigner à résoudre une question aussi simple et aussi indispensable ? On enseigne bien les théorèmes de Desargues, de Carnot... qui ne servent à rien et qui ne sont pas demandés aux examens.

On trouve les calculs numériques fastidieux ; je n'en ai jamais fait pour mon plaisir, et je suis de l'avis des professeurs et des élèves à cet égard ; mais enfin, il faut savoir calculer, c'est utile, c'est indispensable. Ne pourrait-on pas rendre les exercices de calcul moins arides en leur donnant un but utile ? Les applications intéressantes ne manquent pas, soit en Géodésie, soit dans les opérations financières, soit en Physique.

J'ai réservé pour la fin l'examen du programme de Géométrie descriptive. Il ne faudrait jamais perdre de vue l'objet de cette science ou plutôt de cet art, car c'est l'art d'effectuer sur le papier les constructions qu'il serait difficile d'effectuer dans l'espace, et d'indiquer sur le papier les constructions que des ouvriers, n'ayant que des connaissances élémentaires, auront à exécuter dans l'espace.

Il n'est donc pas nécessaire en Géométrie descriptive de faire intervenir les propriétés des surfaces du second ordre que les ouvriers ne connaissent pas et qui ne sont pas exigées dans les programmes. Je voudrais que les premières épures eussent pour but la représentation de quelques assemblages de bois avec leurs ombres et que les élèves fussent exercés à copier de petites machines simples en relief. Ils auraient alors à chercher des intersections de cylindres, de cônes, de surfaces de révolution ayant une existence réelle ; et, croyez-le bien, ces questions pratiques feraient surgir des difficultés théoriques souvent difficiles à vaincre et qui exerceraient l'intelligence des élèves autant, sinon mieux, que la recherche de l'intersection d'un tore elliptique avec un cône de fantaisie.

En résumé, tel qu'il est, le programme que les professeurs de la classe de mathématiques spéciales sont chargés de développer ne contient pas trop de matières ; on peut l'interpréter de manière à ne pas transformer en déclassés les deux tiers des élèves pour lesquels ne s'ouvrent pas les portes des écoles du gouvernement. L'enseignement, tout en prenant un caractère plus pratique, ne diminuerait en rien le niveau des intelligences.

Encore un mot avant de terminer : il serait bon que les élèves eussent quelques notions historiques sur les parties de la science qu'on leur enseigne ; mais je ne suis pas exigeant ; j'accorde que cela n'est pas nécessaire, on ne demande pas cela aux examens et l'on a raison ; enfin cela n'est pas immédiatement utile. Mais ce que l'on est en droit de demander, c'est de ne pas donner aux jeunes gens des notions historiques fausses ou saugrenues. Il ne faudrait pas leur laisser croire que Newton est l'inventeur de la formule du binôme, surtout pour le cas où l'exposant est entier et positif ; il ne faudrait pas leur laisser croire que Neper a inventé les logarithmes, ou les logarithmes népériens, que Rolle

a donné le théorème qui porte son nom, sous la forme sous laquelle on l'énonce, etc. ; autant vaudrait dire avec l'auteur d'un dictionnaire célèbre : Volta est l'inventeur d'une pile et d'un pistolet. Cet homme était sans doute armurier !

J'ai rencontré de bons élèves qui croyaient sérieusement que le calcul différentiel avait été créé de toutes pièces par Lagrange, ce calcul se résumant, pour eux, dans le calcul des dérivées.

On me permettra maintenant une réflexion suggérée par ce qui précède : j'ai dit que les deux tiers des élèves de la classe des spéciales échouait aux examens des écoles du gouvernement. Parmi eux se trouvent un bon nombre de boursiers et de jeunes gens pour lesquels les familles ont fait d'énormes sacrifices, se privant presque du nécessaire dans l'espoir de voir leur fils arriver. Je suis un vieux libéral, républicain et fils de républicain, et je déplore la facilité avec laquelle on accorde les bourses aux fils de prolétaires ; il y a là un libéralisme à rebours : autant il est du devoir de l'état de faciliter à ceux qui peuvent se distinguer, l'accès des carrières libérales, autant il est de son devoir d'empêcher ceux qui ne sont pas capables de réussir, de perdre leur temps et leur argent à courir après un but qu'ils ne peuvent atteindre. Non seulement il ménage de cruelles déceptions à ceux qu'il protège sans discernement, mais en outre il crée des déclassés incapables de faire de bons ouvriers qu'ils auraient pu devenir. On ne devrait accepter les jeunes gens dans une classe de spéciales qu'après un sérieux examen constatant qu'ils pourront profiter de l'enseignement qui leur sera donné. On y trouverait plusieurs avantages : 1° il y aurait moins de familles déçues dans leurs espérances ; 2° les classes de spéciales, moins nombreuses et plus homogènes, seraient mieux dans la main des professeurs qui, surtout à Paris, connaîtraient leurs élèves et vivraient mieux dans leur intimité ; 3° les examinateurs, ayant moins de nonvaleurs à interroger, pourraient consacrer plus de temps à examiner un même candidat, ce qui rendrait les classements moins aléatoires.

H. LAURENT (Paris).

SUR L'ENSEIGNEMENT

DES ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE

Parmi les différentes branches des mathématiques élémentaires, la Trigonométrie est certainement celle qui se plie le plus facilement aux exigences qui résultent de la nature même de l'enseignement secondaire [1]. Dans presque tous les pays, la Trigonométrie est au nombre des branches d'études des lycées, gymnases ou collèges. En France, toutefois, elle ne figure pas dans le programme de l'enseignement classique, tandis qu'elle occupe une place peut-être exagérée dans les classes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales.

C'est qu'on peut concevoir cette étude de diverses manières. On peut en quelques leçons initier les élèves à la résolution des triangles [2]. On peut aussi présenter la Trigonométrie comme « une science purement artificielle, sans corps, sans doctrine, et fabriquée uniquement pour les besoins de l'enseignement et d'un enseignement peu rationnel » [3].

Pour l'élève, l'enseignement de la Trigonométrie se présente à un moment où, possédant déjà les premières notions de Géométrie et d'Algèbre, il se trouve curieux d'études nouvelles et en même temps préparé à les entreprendre. Le premier devoir du professeur est donc de maintenir ces bonnes dispositions et de chercher à éveiller de plus en plus l'intérêt. Il y parviendra s'il s'efforce d'abord de faire constater aux élèves la lacune que vient combler la Trigonométrie dans les connaissances précé-

(1) Sous le nom général d'enseignement secondaire nous entendons aussi bien l'enseignement classique que l'enseignement moderne (Real schulen ou technique mathém. spéciales).

(2) Consulter, par exemple, l'excellent manuel de M. Andoyer, *Cours de Géométrie*, p. 248-280 ; et parmi les ouvrages allemands, celui de M. Holzmuller, *Elementar Mathematik*, t. I et II, et celui de M. K. Schulze, *Leitfaden der Trigonometrie*.

(3) Laisant, *La Mathématique : Philosophie Enseignement*, p. 228-229. Paris, 1898.

demment acquises ; puis de leur faire saisir le but de cette étude ; et surtout s'il évite de commencer par des considérations d'ordre théorique dont la place est au début d'un traité ou d'un cours destiné aux initiés. Il y a bien un ensemble de conventions qui sont indispensables à la généralité et à la rigueur des démonstrations, mais elles ne doivent être présentées que lorsque l'élève en comprend la nécessité.

La Trigonométrie, limitée à son objet principal, c'est-à-dire à la résolution des triangles, doit faire suite à la Géométrie plane. Nous examinerons ici, dans ses grandes lignes, le programme à parcourir ; suivant les établissements, ce programme pourra être plus ou moins développé.

La notion de similitude permet de définir très simplement les fonctions trigonométriques. On se borne d'abord au cas d'un angle aigu, et on présente ces fonctions comme étant les *rapports* des côtés d'un triangle rectangle pris deux à deux. De cette manière on fait ressortir très nettement qu'à chaque angle correspondent six nombres constants : le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante. Dans la suite, on se limitera à l'emploi des quatre premières fonctions, qui seules sont d'un usage courant. L'élève calculera lui-même ces rapports pour les cas les plus simples ; puis il passera à l'étude des relations fondamentales. Il abordera ensuite la résolution des triangles et les applications aux triangles isoscèles et aux polygones réguliers.

Les premiers calculs doivent être faits uniquement à l'aide des tables trigonométriques [1]. On doit, en effet, renoncer pour le début à l'emploi des logarithmes, et il n'y a là aucun inconvénient si l'on se borne à des exemples numériques simples. Voici ce que dit à ce sujet Hoüel dans ses intéressantes *Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie* [2] : « L'usage prématuré des logarithmes trigonométriques, dans un enseigne-

---

[1] Il serait facile de donner ces tables dans les manuels de Géométrie et de Trigonométrie, et dans les tables de logarithmes ; voir, par exemple, les manuels précités de Schulze et d'Andoyer, et les *Tables à cinq décimales de Dupuis*.

[2] Ces *Remarques* se trouvent à la fin de ses *Considérations élémentaires sur la généralisation de l'idée de quantité*. Paris, 1883.

ment s'adressant à des jeunes gens encore peu experts dans la pratique du calcul, ne peut que retarder leurs progrès dans cet art et leur en fermer l'intelligence. Le mal est grave surtout lorsqu'on met dans leurs mains novices les grandes tables qui conviennent seulement aux praticiens exercés, et dont le maniement n'apprend rien de plus, au point de vue de la théorie, que celui des tables à trois ou à quatre figures. » Je dois ajouter que ces conseils ont été suivis dans beaucoup d'établissements.

En ce qui concerne les applications numériques, il est indispensable que, surtout au début, les élèves soient appelés à vérifier les résultats obtenus en ayant recours à une résolution graphique : tout calcul de triangle doit être accompagné de la figure dessinée à une échelle convenable. Il est regrettable que ce moyen de contrôle, si simple et si utile en Géométrie, soit négligé dans beaucoup d'établissements ; aussi, certains élèves finissent-ils par croire que la règle graduée et le compas n'ont leur place que dans les écoles techniques.

Une fois ces premières notions bien établies et appliquées à de nombreux exercices, on pourra sans peine aborder leur généralisation. On montrera comment l'introduction de deux axes rectangulaires, sur lesquels on fait choix d'un sens positif, permet d'étendre à un angle quelconque les définitions des fonctions trigonométriques, limitées jusque-là au cas d'un angle aigu. Le choix du signe dont on affecte chacune des fonctions s'impose ainsi avec beaucoup de clarté.

C'est ici seulement qu'il convient d'avoir recours à la considération du cercle pour l'étude des fonctions trigonométriques. En effet, l'élève conçoit alors aisément que, pour étudier la variation de la fonction, il est avantageux de conserver dans le rapport considéré un dénominateur constant.

Cette généralisation des premières notions peut se faire d'une manière plus ou moins complète suivant les classes. Elle peut être très restreinte si l'on se borne aux applications les plus élémentaires, tandis que, si l'on a en vue une étude complète, il faut la présenter dans toute sa généralité en comprenant les formules d'addition et leurs applications.

Il en est de même de la résolution des triangles quelconques.

Le problème doit d'abord être traité le plus simplement possible sans l'aide des transformations que l'on introduit pour faciliter l'exécution du calcul, mais par laquelle la solution prend — aux yeux des élèves — un caractère artificiel. Si ensuite le temps et la préparation des élèves le permettent, on complètera cette étude en utilisant les simplifications les plus importantes. Toutefois on exagère souvent la portée de ces transformations qui permettent de rendre les formules calculables par logarithmes, et on peut dire, ainsi que le montre Hoüel (mémoire cité, p. 63), « que, la plupart du temps, la simplicité apparente des valeurs auxquelles on parvient n'est qu'un leurre et une illusion d'optique ».

Je me borne à ces indications générales au sujet du programme des éléments de Trigonométrie, tel qu'il convient au plan d'études des établissements secondaires, sans examiner de plus près le degré de développement qu'il comporte suivant la nature des établissements. Ce programme a déjà été adopté, dans ses lignes générales, par bien des institutions ; mais il est désirable qu'il devienne d'un emploi plus répandu. On lui reprochera peut-être son manque d'unité ; c'est ainsi que certains professeurs préfèrent procéder d'abord à une étude complète des fonctions trigonométriques, afin de traiter la résolution des triangles en un seul chapitre. Mais ce procédé a l'inconvénient de laisser trop longtemps les élèves en présence de fonctions dont ils ne conçoivent pas encore l'importance. Et nous n'hésitons pas un instant à sacrifier la satisfaction d'une unité purement logique à la nécessité première de gagner et de maintenir l'intérêt des élèves en les mettant dès le début en mesure de pénétrer le sens de la branche enseignée.

Tout dépend d'ailleurs de la façon dont les premières notions sont présentées. Les détails que comporte le plan du cours doivent être laissés à l'appréciation personnelle du professeur. Plus celui-ci aura d'initiative dans l'application du programme qui lui est imposé, plus l'enseignement sera vivant ; mais encore faut-il qu'on lui *laisse* cette initiative.

Avec le développement si considérable que prennent les

sciences et leurs applications, la nécessité d'un enseignement mathématique rationnel s'impose de plus en plus. Les connaissances générales que la vie moderne exige actuellement des jeunes gens et dont l'étendue augmente d'année en année, comprennent, entre autres, une éducation mathématique très solide. Si l'on veut que les élèves retiennent quelque chose des notions fondamentales acquises pendant leurs études secondaires, il faut présenter ces notions de la façon la plus propre à en faire ressortir la valeur essentielle, et, s'il convient sans doute de montrer le développement qu'elles peuvent recevoir au point de vue de la science pure, il importe aussi de ne pas perdre le contact avec la science appliquée. Il suffit pour cela d'accompagner les exemples théoriques de quelques-uns des problèmes que fournit le vaste champ des applications pratiques (Physique, Cosmographie, Topographie, etc.). Sans tomber dans un utilitarisme exagéré, et tout en conservant un caractère philosophique, l'enseignement mathématique doit entrer plus intimement en contact avec la vie moderne.

A ce point de vue, la Trigonométrie joue précisément un rôle important dans les mathématiques élémentaires : dégagée de la forme dogmatique qu'on lui donne quelquefois dès les premières leçons, elle vient compléter les éléments de Géométrie et d'Algèbre avec lesquels elle forme un premier cycle d'études ; elle prépare en même temps aux méthodes générales de la Géométrie analytique ; d'autre part elle constitue un lien tout naturel entre la science abstraite et les applications techniques.

H. Fehr.

SUR L'ENSEIGNEMENT
DE LA THÉORIE DES VECTEURS

I. — On peut exposer la théorie des quantités complexes et la théorie des quaternions indépendamment de toute notion géométrique, et se proposer ensuite d'en faire l'application à la Géométrie. On interprète $a + bi$ dans un plan qui a deux dimensions, a et b étant les projections d'un vecteur sur deux axes rectangulaires : on interprètera $a + bi + cj + dk$, symbole à quatre termes, dans un espace qui n'a que trois dimensions, au moyen d'un ensemble (a, OM) constitué par un nombre a et un vecteur OM dont les projections sur trois axes rectangulaires sont b, c, d : il me semble que l'on devrait donner un nom à cet ensemble, par exemple celui de *scal-vecteur*, qui rappelle l'expression connue *partie scalaire*. Un pareil mot est peut-être encore plus utile si, comme je le suppose ici, et comme il y a avantage à le faire pour gagner les commençants, on expose la théorie géométrique avant la théorie analytique.

Par définition, le rapport de deux vecteurs OA et OB est un scal-vecteur (a, OC), que l'on définit aisément en partant du cas où les vecteurs sont rectangulaires : c'est même ainsi que la notion de l'ensemble (a, OC) se présente quand on ne part pas des quaternions ; mais la notion de cet ensemble doit être dégagée de la notion de rapport de deux vecteurs à propos de laquelle on la présente : si l'on n'écrit pas $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = (a, \mathrm{OC})$, si l'on n'a pas un mot pour désigner l'ensemble obtenu, l'esprit s'arrête à la notion de rapport, et ne va pas jusqu'à la notion de l'ensemble. L'esprit s'arrête d'autant mieux à la notion de rapport que l'on donne un nom à ce rapport : on l'appelle une biradiale ; cette expression est inutile puisqu'on peut dire le rapport $\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$, elle conduit à parler mal en confondant parfois sous le même nom le rapport dont il s'agit et la figure que ce rapport concerne, et elle a, je le répète, l'inconvénient de trop arrêter la pensée sur une notion qui, pour

être utile, n'en est pas moins secondaire ; on pourrait la supprimer. J'ajoute ceci : à propos du rapport de deux vecteurs rectangulaires, OA et OB, on dit parfois que l'on représente ce rapport $\frac{OB}{OA}$, cette biradiale rectangle si l'on veut, par un vecteur OC perpendiculaire au plan AOB ; c'est un langage incorrect : ce rapport *est* un vecteur, par définition.

Réciproquement, tout scal-vecteur (a, OC) est le rapport de deux vecteurs OA et OB, et peut être *mis sous la forme* $\frac{OB}{OA}$, la figure AOB pouvant se déplacer dans son plan...

Cela est important, parce qu'on en déduit la définition de la somme et du produit de deux scal-vecteurs, somme et produit qui sont des scal-vecteurs ; on démontre d'ailleurs que l'addition de deux scal-vecteurs se fait en opérant séparément sur les nombres et sur les vecteurs : on pourrait avantageusement la définir ainsi pour ne pas rompre l'analogie entre la définition déjà donnée de l'addition des vecteurs et la définition de l'addition des scal-vecteurs qui sont l'extension des vecteurs, quelle que soit d'ailleurs l'origine qu'on leur a donnée : et l'on démontrerait la relation $\frac{OB}{OA} + \frac{OC}{OA} = \frac{OB + OB}{OA}$.

La multiplication des scal-vecteurs ne peut être définie géométriquement que par la relation $\frac{OB}{OA} \times \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{OA}$: *mais l'emploi des biradiales n'est ici qu'un moyen*, et l'on opère en réalité sur des scal-vecteurs ; les commençants ne le voient pas toujours, parce qu'ils s'attachent à la biradiale auxiliaire qui porte un nom, et oublient le scal-vecteur qu'on ne leur a pas nommé : ils peuvent croire que la théorie qu'on leur expose est construite avec deux éléments, le vecteur pour l'addition, la biradiale pour la multiplication, tandis qu'elle est construite avec un seul élément, le scal-vecteur, réduit à un vecteur au début de l'exposition. Relativement à la division des scal-vecteurs, définie par la relation *diviseur* $\times$ *quotient* $=$ *dividende*, ou par la relation équivalente $\frac{OC}{OA} : \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$, il importe de faire observer que le quotient de deux vecteurs est un scal-vecteur identique à celui qu'on a défini comme étant le rapport des deux vecteurs.

II. — Le calcul des quaternions comprend celui des quantités

complexes ; mais comme nous interprétons $a + bi$ dans un plan ayant deux dimensions, et $a + bi + ej + dk$ dans un espace qui n'en a que trois, la seconde théorie géométrique ne comprend pas la première comme cas particulier. C'est ainsi que la biradiale $\frac{OB}{OA}$ de la théorie plane est un vecteur du plan naturellement, tandis que la biradiale $\frac{OB}{OA}$ de la théorie générale est un scal-vecteur, dont le vecteurt est d'ailleurs perpendiculaire au plan AOB. Un commençant doit être averti que si l'on effectue deux calculs analogues, l'un sur les vecteurs auxquels donnent lieu n points d'un plan, l'autre sur les vecteurs auxquels donnent lieu n points de l'espace, on n'obtiendra pas deux théorèmes de géométrie analognes, supposé que la multiplication intervienne ; si le théorème plan a un analogue dans l'espace, le calcul vectoriel qui démontrera ce dernier théorème sera très différent du calcul vectoriel qui a donné le premier. La formule de Bellavitis pour le quadrangle plan quelconque, $DA \times BC + DB \times CA + DC \times AB = 0$, donne un théorème dont l'énoncé géométrique ne ressemble en rien à l'énoncé du théorème auquel conduit l'étude du premier membre de cette formule lorsque ABCD est un tétraèdre, et ce dernier théorème n'a même aucun sens pour le quadrangle plan (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 340, question 1801) ; d'autre part, le théorème plan qui résulte de la formule de Bellavitis a son analogue dans l'espace, comme il résulte d'une Note que je me propose de publier dans le journal cité plus haut.

G. FONTENÉ (Paris).

NOTE DE LA DIRECTION. — Dans le calcul vectoriel basé sur la *méthode de Grassmann*, les inconvénients que signale M. Fontené ne se présentent pas ; aussi croyons-nous utile de signaler cette méthode. Voir à ce sujet, les œuvres du grand géomètre allemand, *Hermann Grassmann's gesammelte Werke* (2 volumes parus et les ouvrages de W. SCHLEGEL, *System der Raumlehre* (1872-75) ; de PEANO, *Calcolo geometrica* (1888), édition allemande (1891) ; de F. KRAFT, *Abriss des geometrischen Kalkuls* (1893) ; et de BURALI-FORTI, *Introduction à la Géométrie différentielle* (1897).

CHRONIQUE

Congrès de Düsseldorf. Septembre 1898 (1).

Au point de vue des questions de l'enseignement, la 70e réunion des naturalistes et médecins allemands a été d'un grand intérêt par le fait même que dans l'assemblée d'ouverture commune à toutes les sections on avait fait place à une conférence de M. le professeur F. Klein, sur l'*université et l'école technique supérieure*. Dans un brillant exposé, le savant professeur de Gœttingue montre quelles sont les tendances communes aux deux établissements et intervient en faveur d'un rapprochement quant à leurs méthodes de travail, leurs conceptions et leurs connaissances. Les écoles techniques supérieures ont besoin, pour le développement de leur enseignement spécial, d'institutions analogues aux institutions universitaires; quant à celles-ci, elles ne doivent pas se tenir plus longtemps à l'écart des progrès de la science de l'ingénieur. Le moment semble venu de jeter un pont sur le fossé qui existe entre ces deux sortes d'établissements supérieurs, sans porter atteinte à leur but propre. Le discours, dans lequel l'orateur a affirmé la solidarité des deux institutions d'une manière aussi libérale et sans la moindre partialité en faveur de la tendance théorique de la science, a été vivement applaudi.

Les communications présentées à la section 16 (enseignement se rattachent, pour la plupart, aux questions générales de l'enseignement ou à celui de la physique. M. le professeur Dr Schwalbe (de Berlin parle des ouvrages d'enseignement de l'étranger; il s'ensuit une discussion bien nourrie sur le mode d'introduction des livres nouveaux. On reconnaît qu'il n'est possible d'apprécier la valeur d'un manuel qu'après l'avoir soumis à un long examen pendant l'enseignement, et, qu'à la monopolisation par l'Etat, on doit préférer la liberté de l'opinion personnelle et la multiplicité des ouvrages. Le même conférencier fait ensuite une communication sur la méthode dans l'expérimentation. A signaler encore la communication de M. Püning (de Münster

(1) Les mathématiciens allemands se joignent chaque année au congrès que tiennent les naturalistes et médecins de l'Empire. Leurs travaux se répartissent en plusieurs sections parmi lesquelles il en est une qui interesse tout particulièrement nos lecteurs. C'est celle de l'*Enseignement des sciences mathematiques et naturelles* (section 16). M. le Dr Maurer qui présidait cette section a bien voulu nous adresser le rapide compte-rendu de ce congrès que nous sommes heureux de pouvoir donner ici. LA DIRECTION.

in W.), sur le potentiel dans l'enseignement élémentaire; celle de M. le professeur Simon (de Strasbourg) sur l'hypocycloïde steinerienne à trois pointes; et celle de M. Thomae (d'Elberfeld) sur les photogrammes à projection dans le domaine de la botanique.

La séance commune aux sections 1 (mathématiques) et 16 (enseignement) a été particulièrement intéressante. L'*enseignement des mathématiques à l'université* a fait l'objet d'un important débat. A cette occasion, M. le professeur F. Klein, répondant au rapport présenté par M. Pringsheim à la 69e réunion, tenue à Brunswick, examine les améliorations à réaliser dans ce domaine : l'enseignement doit tenir compte du développement historique de la science, il doit devenir phylogénétique; au lieu de commencer par des notions abstraites d'une logique irréprochable, l'enseignement doit d'abord avoir un caractère concret et éveiller d'une manière tangible la conception des choses. La géométrie doit précéder l'algèbre. Il doit être du devoir du professeur universitaire de faciliter la compréhension des mathématiques. L'orateur critique surtout d'une façon sévère la préparation souvent étroite et exclusive des candidats à l'enseignement; il désirerait les voir acquérir des connaissances de géométrie descriptive, de géodésie et de mécanique pratique. A ce débat, prennent part principalement des maîtres des collèges; ils se plaignent du peu de parti que, dans la pratique pédagogique, on peut tirer de certaines conceptions mathématiques et des lacunes que présentent les méthodes pratiques. Et cependant, indépendamment du talent propre à chaque maître, il n'est possible d'éveiller l'intérêt de la jeunesse pour les sciences mathématiques qu'en ayant recours à des interprétations simples et à des applications pratiques.

Dans cette même séance, M. le professeur Pietzker (de Nordhausen) parle de l'interprétation, d'après Dühring, des solutions imaginaires d'un problème de géométrie; et M. le Dr Schotten (de Halle) présente une notice historique sur les cours de mathématiques donnés à l'Université de Halle depuis un siècle.

Dr Maurer (Düsseldorf).

La Société italienne « Mathesis ».

Grâce à l'initiative prise par M. le professeur Bettazzi, auquel s'étaient associés le regretté professeur Lugli et le soussigné, on annonçait sur la couverture du IIe fascicule (mars-avril) du *Periodico di Mathematica*, de l'année 1895, la proposition de fonder une Société d'études parmi les professeurs de mathématiques des écoles secondaires italiennes. Cette proposition reçut aussitôt un accueil si favorable que sur la couverture des IIIe et IVe fascicules réunis (mai-juin et juillet-août) on put lire les noms de 47 adhérents, ainsi qu'une invitation les engageant à nommer un comité provisoire; dans les Ve et VIIe fascicules réunis (septembre-octobre et novembre-décembre), pages 194-196, on publia

les statuts rédigés par le comité provisoire réuni à Rome, les 16, 17 et 18 septembre, pendant les fêtes destinées à rappeler le vingt-cinquième anniversaire de la date mémorable qui donna à l'Italie sa glorieuse capitale.

L'objet de la Société est déterminé par l'article premier des statuts :

« Une Société sous le nom de *Mathesis, société d'études entre les « professeurs de mathématiques des écoles moyennes*, est fondée parmi « les professeurs des écoles secondaires italiennes. Son but est l'amé- « lioration de l'école et les perfectionnements des professeurs au « double point de vue scientifique et didactique. »

La Société, qui fonctionne depuis le 1er juillet 1896, sous la présidence de M. le professeur Bettazzi, à Turin, eut bientôt l'occasion de prouver la pureté de son idéalisme en empêchant, à ses propres frais et grâce au concours de M. le professeur Frattini, la disparition du *Periodico di Mathematica*, si important pour l'enseignement moyen, après la mort de son savant directeur Lugli, décédé à l'âge de quarante-trois ans, le 27 mai 1896.

Pour ce qui concerne les discussions scientifiques et didactiques, faites par les sociétaires dans des notes spéciales ou dans des réunions diverses, on peut consulter le *Bollettino della Societa « Mathesis »*, dont on a publié quatre numéros en 1896-1897, six en 1897-1898 et dont on continuera à publier six numéros par an dans les fascicules du *Periodico di Mathematica*, actuellement dirigé par M. le professeur Lazzeri et qui est devenu l'organe de la Société.

Cette année, à l'occasion de l'exposition qui a eu lieu à Turin, la Société *Mathesis*, comme sous-section du congrès pédagogique, a tenu plusieurs séances dans le château du Valentin. Pour ce qui se rapporte à ces séances ainsi qu'à deux conférences données à cette occasion par MM. les professeurs Loria et Peano, le tout sera publié dans un volume qui pourra servir en même temps de préparation à un congrès des professeurs de mathématiques, qui aurait lieu en 1900 ou en 1901 (le siège du congrès restant à fixer) pour y traiter des questions concernant l'enseignement moyen [1].

F. Giudice (Gênes),

Membre du comité directeur de la Société *Mathesis*.

Les programmes de l'enseignement intérieur de l'École polytechnique de Paris.

Nous avons reçu récemment communication des programmes de l'enseignement intérieur à l'École polytechnique. Ce document, qui porte

[1] Le *Bollett. della assoc. Mathesis* (3e année, n° 2, p. 15) a déjà annoncé la publication de l'*Enseignement mathématique* de la façon la plus aimable. La direction exprime à ce sujet à l'association *Mathesis* tous ses remerciements.

la date de 1898, est précédé d'un rapport du conseil de perfectionnement au ministre de la guerre. Nous nous réservons de faire connaître ultérieurement à nos lecteurs ce rapport et les parties des programmes qui concernent les sciences mathématiques. L'élaboration de ces programmes étant toute récente, la question dont il s'agit présente un caractère d'actualité et pourra donner matière à d'utiles observations.

Nous serions heureux de pouvoir en faire autant pour un certain nombre de grands établissements d'instruction similaires des autres pays : en particulier, nous espérons être à même de publier bientôt des documents intéressants sur l'organisation de l'enseignement du *Polytechnicum* de Zurich.

Nous croyons devoir profiter de cette occasion pour présenter une remarque. On ne devra pas s'étonner si tout d'abord les questions se rapportant à la France et à la Suisse paraissent tenir dans notre recueil une place particulièrement importante. C'est tout naturel, car c'est principalement sur ces deux pays que les directeurs sont plus spécialement renseignés. Mais, une fois établie une collaboration régulière, qui ne saurait s'improviser dès les premiers temps, nous accueillerons avec un égal empressement les communications provenant de toutes les nations où se cultivent et s'enseignent les sciences mathématiques. Nous invitons donc tous nos correspondants, tous nos lecteurs, même lorsqu'ils n'ont pas le loisir d'écrire un article ou d'adresser une lettre destinée à être publiée dans la « Correspondance », à nous faire connaître, par des notes de quelques lignes, par de simples extraits, au besoin par un envoi de documents, tout ce qui pourra leur sembler intéressant au point de vue de l'enseignement mathématique.

La variété même de ces petites notes contribuera à donner à notre chronique le caractère qu'elle doit avoir selon nous. Ce sera une accumulation de renseignements, de faits, de nouvelles rapidement données. Plusieurs de ces notes pourront utilement être reprises ensuite et donneront matière à d'intéressantes études.

Récents traités classiques de Géométrie en Italie et en France.

On trouvera, ci-après, dans la « Bibliographie » du présent numéro, une analyse consciencieuse du livre de MM. Lazzeri et Bassani, sur laquelle nous attirons l'attention. En France, dans ces derniers mois, trois nouveaux traités viennent d'être publiés, coup sur coup pour ainsi dire. En voici les titres :

Leçons de géométrie élémentaire (géométrie plane), par M. Jacques Hadamard, maître de conférences à la Faculté des sciences de Paris, professeur suppléant au Collège de France; Paris, Armand Colin et Cie. Cet ouvrage fait partie du cours complet de mathématiques élémentaires publié sous la direction de M. Darboux, doyen de la Faculté des sciences de Paris.

Traité de géométrie, par M. C. Guichard, professeur à l'Université de Clermont; première partie : géométrie plane et géométrie dans l'espace; Paris, Nony et Cie.

Cours de géométrie élémentaire, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales; des candidats aux écoles du gouvernement et des candidats à l'agrégation; par MM. B. Niewenglowski, inspecteur de l'Académie de Paris, docteur ès sciences, et L. Gérard, professeur au lycée Ampère [1], docteur ès sciences; géométrie plane; Paris, G. Carré et C. Naud.

Nous nous réservons ultérieurement de rendre compte de ces ouvrages, qui présentent les uns et les autres de l'intérêt à des titres divers. Ici, nous les signalons seulement et nous nous bornons à une simple remarque. Quand on se rappelle qu'il existe déjà en France un traité classique et universellement apprécié, celui de MM. Rouché et de Comberousse, n'est-on pas en droit de voir dans cette éclosion simultanée l'indice de la nécessité d'une transformation dans cette partie de l'enseignement?

Congrès international des mathématiciens de 1900.

Ce congrès, qui doit avoir lieu à Paris, est préparé par les soins de la *Société mathématique de France*. Elle a constitué à cet effet un comité d'organisation, qui s'est lui-même divisé en deux commissions : une commission administrative et une commission des travaux scientifiques. Il a déjà été décidé que le congrès aurait lieu du 6 au 12 août 1900, que la carte de membre du congrès serait du prix de 30 francs, avec la possibilité de certaines réductions spéciales pour le cas des personnes accompagnées par un ou plusieurs membres de leur famille. Une première circulaire a été adressée à un grand nombre de mathématiciens pour faire connaître ces premières résolutions et quelques autres. Ceux de nos lecteurs qui, n'ayant pas reçu cette circulaire, désireraient en avoir connaissance, n'auront qu'à s'adresser à l'administration de l'*Enseignement mathématique*.

Ajoutons que le congrès doit comprendre une section d'*enseignement et méthodes*. Nous ne pouvons que féliciter les organisateurs de cette excellente résolution.

Les moyens physiques dans le calcul.

Le numéro d'octobre 1898 de l'*American Journal of mathematics* contient un curieux article de M. Michel Petrovitch (Belgrade), sous le titre : « Sur l'intégration hydraulique des équations différentielles. » En le signalant ici, nous nous rappelons avoir lu, il n'y a pas bien long-

[1] Aujourd'hui au lycée Charlemagne, à Paris.

temps, dans le journal belge *Mathesis* (avril 1898), une « Résolution hydrostatique de l'équation du troisième degré », par M. Demanet. Il y a quelques années, M. Félix Lucas a fait, notamment à la *Société mathématique de France*, d'intéressantes communications sous le titre de « Résolution électrique des équations ». Enfin, en dehors des machines à calculer fort nombreuses qui ont pour objet les calculs arithmétiques, on connaît les ingénieuses recherches auxquelles s'est livré M. Torres, en Espagne, pour construire une machine destinée à résoudre les équations algébriques. Il y a là tout un ensemble de travaux très dignes de retenir l'attention. Non seulement quelques-uns de ces dispositifs peuvent devenir d'un précieux secours au point de vue pratique, au prix de quelques perfectionnements dont l'avenir se chargera sans doute; mais, en outre, l'exposé des principes sur lesquels reposent ces moyens est souvent de nature à frapper l'esprit, à fixer la mémoire et à concentrer l'attention de l'élève sur certaines théories qui deviennent ainsi plus visibles, pour ainsi dire. Il y a là, au point de vue pédagogique, un ensemble de questions dont les professeurs auraient tort de se désintéresser.

La Bibliothèque mathématique des travailleurs.

S'il est une décentralisation qui mérite tous les encouragements, c'est celle du travail et de la recherche scientifiques. Partout où un cerveau vit, la pensée humaine peut évoluer, et ce qu'on appelle les centres scientifiques ne sont jamais que des centres d'émulation et de ressources matérielles très estimables en réalité, mais auxquels nombre de travailleurs isolés ne sacrifieraient pas leur calme, leur recueillement et leur sereine indépendance.

Ces ressources matérielles sont certainement le bien le plus précieux des grands foyers intellectuels. Les laboratoires, les museums, les collections de toutes sortes ne peuvent se trouver que là, et même dans un domaine où l'expérience et l'observation ne sont pas d'utilité quotidienne, dans le domaine mathématique, nul travailleur, si modeste soit-il, ne saurait se passer d'une Bibliothèque.

Certes, un des attraits puissants de la science mathématique est précisément que muni de votre seul cerveau..., d'une ardoise et d'un crayon, vous pourrez, où que vous soyez, imaginer un problème, en poursuivre la solution, rechercher telle démonstration, reconstituer comme Pascal des suites de théorèmes. Il y a là évidemment un grand intérêt spéculatif; mais, si l'on peut ainsi dire, quelque peu égoïste. Ce n'est pas de cette sorte, sauf accidents heureux et rares, que la science progressera.

Avec l'énorme travail aujourd'hui accompli dans les mathématiques — et en tous pays, — nul ne peut se vanter d'être sur un terrain inexploré, d'avoir *découvert* un filon bien à lui, d'éclairer un coin encore obscur; nul ne peut pousser plus avant ses investigations, s'il n'est

constamment muni de la *littérature* spéciale aux recherches qu'il poursuit. Et qui pourrait songer à réunir, pour son unique usage, seulement le centième de la littérature mathématique existant en l'an de grâce 1898 !

C'est pour aider les travailleurs isolés qu'ont été créées les Bibliothèques circulantes, dont les étrangers nous ont donné l'exemple suivi par nous avec quelque lenteur. Pour les mathématiques en particulier, nous ne croyons pas qu'il n'en ait existé d'autres, avant celle que nous avons organisée en 1895 sous les auspices de plusieurs savants autorisés, et sous l'inspiration d'un vœu exprimé à Caen au Congrès de l'Association française en 1894.

La *Bibliothèque mathématique des travailleurs* a pour but unique de mettre des livres, concernant les mathématiques pures et appliquées, à la disposition des abonnés.

Elle accepte des adhérents en France, en Algérie, en Espagne, en Portugal, en Italie, en Suisse, en Allemagne, en Autriche-Hongrie, en Belgique, en Hollande et en Angleterre.

C'est une œuvre de solidarité scientifique au premier chef ; le prix de l'abonnement (réduit annuellement de 24 à 12 fr.) a pour unique objet de couvrir les frais inhérents à une telle organisation — si simplifiés qu'en soient les détails — et les rapports de la Direction avec ses abonnés ont toujours été et ne peuvent être que ceux de collaborateurs, simplement désireux de s'entr'aider pour une œuvre qui leur est chère.

C'est même évidemment là la caractéristique de cette fondation, et à ce point de vue le résultat ne nous a pas trompé.

Des points de France les plus éloignés et d'ailleurs, les conseils, les dons d'auteurs ou de personnes qui pouvaient se dessaisir de certains ouvrages, les encouragements de toutes sortes ne nous ont pas manqué. Nous avons débuté avec 300 volumes ; nous avons publié en 1895 un catalogue qui en comprenait 630 — et nous en préparons un aujourd'hui qui va au-delà de 1 100.

On y trouve des Ouvrages et des Mémoires rares tels que les deux volumes du *Calcul différentiel et intégral* de M. Bertrand, des recueils de publications de savants, qui n'existent nulle part dans le commerce, et des périodiques dont les collections complètes sont bien onéreuses, quand elles ne sont pas introuvables.

Bref, c'est une collection précieuse et utile, qui n'a pas la prétention d'être complète, mais qui s'agrandit chaque jour par nos efforts et par de généreuses libéralités.

L'œuvre est maintenant fondée ; elle rend chaque jour des services, elle fonctionne et progresse depuis plus de trois ans. Nous lui avons donné, sans compter, tous nos soins et le meilleur de notre temps. Le succès obtenu, et le sentiment intime d'avoir apporté une petite contribution au progrès de la science mathématique, nous récompensent largement.

Nous sera-t-il permis de demander à tous ceux qui nous connaissent

déjà et qui savent les efforts accomplis, le concours d'une propagande sans laquelle nous ne saurions progresser ?

La modicité de nos ressources doit être rachetée par le nombre de nos adhérents ; la *Bibliothèque mathématique des travailleurs* n'est pas une entreprise commerciale ; nous ne voulons ni ne pouvons faire aucune réclame, et nous comptons uniquement sur l'appui de nos adhérents, et sur les services déjà rendus, pour faire comprendre ceux que nous sommes à même de rendre encore.

Encore faut-il pour cela que notre existence soit connue. C'est dans ce but que nous avons accepté, avec une grande reconnaissance, l'hospitalité que nous offrait gracieusement l'*Enseignement mathématique*, pour rappeler à grands traits l'organisation de cette véritable coopération scientifique, à laquelle nous sommes si profondément attaché [1].

Dr Hulmann (Paris).

Brevet de l'enseignement secondaire supérieur en Prusse.

Le nouveau règlement relatif aux examens des candidats à l'enseignement secondaire supérieur en Prusse contient une série de réformes qui marquent un progrès sérieux dans l'organisation de l'instruction publique. Outre le changement qu'il apporte dans la composition de la commission des examens et dont nous n'avons pas à nous occuper ici, il entraîne d'importantes modifications pour plusieurs branches d'études. Nous nous bornons à signaler celles qui concernent spécialement les mathématiques.

Jusqu'ici la carrière de l'enseignement n'était ouverte qu'à ceux qui avaient suivi les études classiques dans un gymnase allemand, et qui, après trois ans d'études dans une université allemande, avaient subi avec succès les examens du brevet.

Le règlement du 12 septembre 1896 élargit le cercle des candidats en ce qu'il admet aussi les jeunes gens qui ont passé par les *Oberrealschulen*, c'est-à-dire par l'enseignement moderne. En outre, sur les six semestres d'études universitaires, les candidats à l'enseignement des mathématiques, de la physique ou de la chimie, *peuvent en passer trois* dans une école technique supérieure allemande.

Ce sont là les deux modifications les plus importantes. La première s'imposait depuis longtemps. Quant à la seconde, elle répond également

---

[1] Le Dr Hulmann, en même temps qu'il nous envoie son intéressant article, nous fait savoir que la *Bibliothèque mathématique des travailleurs* recevra, avec une réduction de 50 p. 100 soit *six francs par an* au lieu de douze) les abonnements des personnes qui sont en même temps abonnées à *l'Enseignement mathématique* et qui habitent l'un des pays desservis par la Bibliothèque. Nous lui en exprimons ici toute notre reconnaissance, et nous recommandons instamment cette organisation si intéressante à l'attention de nos lecteurs.

La Direction.

aux exigences de notre époque. Elle permet de délivrer un certificat de capacité pour l'enseignement des Mathématiques appliquées. Le programme de ce nouveau certificat comprend, outre les Mathématiques pures : la Géométrie descriptive jusqu'aux méthodes de la projection centrale (inclusivement) et le tracé des épures ; la connaissance des méthodes mathématiques employées en Mécanique appliquée, en particulier de la Statique graphique ; la connaissance des éléments de Géodésie et de la théorie des erreurs.

Nous n'insistons pas sur les avantages qu'une pareille préparation peut présenter pour les maîtres de l'enseignement secondaire. Mais ce sont surtout les écoles techniques secondaires ou supérieures qui profiteront de la liberté qu'on laisse au candidat dans le choix de la direction de ses études. En effet le nouveau diplôme procurera à ces établissements un personnel bien qualifié pour donner un enseignement dans lequel on a principalement en vue les applications techniques.

Ces transformations répondent à une série de vœux qui ont été exprimés ces dernières années dans les réunions de mathématiciens allemands et que l'on retrouve dans les Rapports (1) rédigés par MM. Holzmuller et Schwalbe. Elles favorisent également le rapprochement entre l'université et l'école technique supérieure, préconisé par M. le professeur Klein dans son discours de Düsseldorf.

Société mathématique de France.

Dans sa dernière séance, du 4 janvier 1899, la Société mathématique de France a procédé au renouvellement de son bureau pour la présente année. M. Guyou, membre de l'Institut, a été nommé président. M. Lecornu, président sortant, a exprimé à la Société sa reconnaissance pour le concours qui lui a été apporté dans l'accomplissement de sa tâche.

A cette séance assistaient deux des membres de notre comité de patronage, MM. Ziwet (États-Unis) et Greenhill (Grande-Bretagne), ce dernier de passage à Paris. M. Laisant a présenté à la Société un spécimen de *l'Enseignement mathématique*, et, sur la demande qui lui en était faite, il a exposé sommairement le but et le plan général de cette Revue nouvelle.

M. Painlevé a fait une communication fort intéressante sur l'application des groupes de transformations de M. Lie à la théorie des équations différentielles.

---

(1) Le rapport de M. Holzmuller a été inséré dans la *Zeitschrift fur math. u. naturw. Unterricht*, année 1896, p. 368-380, 538-549, et dans le *Zeitschrift für lateinlose hochere Schulen*, t. VII.

Celui de M. Schwalbe a été reproduit dans le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. V, p. 91-92, 1896.

BIBLIOGRAPHIE

G. Lazzeri e A. Bassani, professori nella R. Accademia Navale. — **Elementi di Geometria**. seconde édition améliorée : 1 vol. in-8°, 312 figures dans le texte : prix : 5 L. : Livourne, R. Giusti, 1898.

Les *Éléments de Géométrie*, dont deux savants professeurs de l'académie navale d'Italie, MM. Lazzeri et Bassani, viennent de publier la 2e édition (la première a paru en 1891), sont établis d'après des principes entièrement nouveaux, résultant de deux idées fondamentales.

La première est la nécessité de rendre l'étude de la géométrie *indépendante de l'Arithmétique et de l'Algèbre*. Les auteurs pensent, avec les éminents professeurs Sannia et d'Ovidio, que c'est le moyen le plus propre à ramener à l'antique pureté l'enseignement de la Géométrie élémentaire, que Legendre et ses imitateurs avaient, disent-ils, obscurci en employant souvent le calcul arithmétique à démontrer des vérités que quelques arguments, fondés sur la simple intuition, servent suffisamment à faire accepter d'une manière plus directe et plus appropriée. Ils observent d'ailleurs que cette nécessité a été depuis longtemps reconnue par tous ceux qui s'occupent de l'enseignement classique, par exemple par Houel et par Duhamel.

La seconde idée fondamentale, — et peut-être la plus importante, — consiste dans l'application franche à l'enseignement de la *fusion intime et systématique* de la géométrie plane avec celle de l'espace. Cette fusion, dont l'idée n'est pas nouvelle, a été tentée pour la première fois en Italie, par de Paolis, dans ses *Éléments de Géométrie*, publiés en 1884. Elle était, disent les auteurs, considérée comme une utopie à l'époque de la publication de la première édition de leur livre : mais, en peu d'années, l'idée a fait beaucoup de chemin. Les auteurs, qui professent depuis douze ans la géométrie d'après cette idée à l'académie navale, ont rallié à elle un grand nombre de professeurs italiens. L'Association *Mathesis* pour l'enseignement des mathématiques dans les écoles secondaires italiennes a proposé à tous les professeurs, comme thème de discussion, l'opportunité de la fusion des deux géométries, et le vœu qu'il soit pris une décision à cet égard est exprimé, dans le rapport présenté au nom de ladite association, en mai 1897, au ministre de l'instruction publique, par le professeur Bettazzi.

En Allemagne, la question de la fusion des deux géométries commence également à s'agiter, comme le prouve le rapport fait par le Dr Rohn à la 44e réunion des philologues et professeurs allemands, tenue à Dresde en 1897.

En France, l'on est moins avancé et la question ne semble pas avoir pénétré jusqu'à présent dans les sphères officielles. Il convient cependant de rappeler une tentative très curieuse faite en 1844. Nous avons entre les mains, depuis longtemps déjà, un volume devenu rare, intitulé : « *Les Analo-*

« *gies de la Géométrie élémentaire*, ou *la Géométrie dans l'espace ramenée à* « *la Géométrie plane*, ouvrage conçu de manière que tout élève, après avoir « compris une proposition quelconque de Géométrie plane, pourra, de lui- « même, s'élever immédiatement et presque sans effort, à tous les cas sem- « blables de la géométrie dans l'espace », par A. Mahistre, licencié ès sciences, professeur de mathématiques, etc. (Paris, Hachette, 1844).

Le titre un peu long de cet ouvrage, qui a été autorisé le 14 mai 1844 par le Conseil de l'instruction publique, montre bien que son principe était le deuxième principe fondamental de MM. Lazzeri et Bassani. Le livre de Mahistre comprend deux parties : 1° *Géométrie plane et ses analogies avec la Géométrie dans l'espace*, exposée en 261 pages ; 2° *Géométrie dans l'espace (partie indépendante)*, exposée en 9 pages. Ces nombres 261 et 9 (ou 29 et 1) ne sont peut-être pas loin d'exprimer la proportionnalité vraie de la Géométrie élémentaire fusionnée et de la Géométrie de l'espace indépendante.

MM. Lazzeri et Bassani font remarquer d'ailleurs que la fusion des deux Géométries n'est pas en réalité une nouveauté. Son utilité est reconnue sans contestation pour la Géométrie projective. Monge est le premier qui, dans son *Traité de Géométrie descriptive*, en a donné des exemples, en démontrant à l'aide des figures à trois dimensions, un grand nombre de théorèmes relatifs aux figures planes, avec une simplicité et une évidence desquelles on resta bien loin quand on voulut faire usage des seuls éléments du plan. Beaucoup d'autres, notamment Brianchon et Poncelet, suivirent les traces de Monge, et aujourd'hui l'on voit la méthode de fusion universellement appliquée en Géométrie projective et en Géométrie supérieure, et préconisée par les plus illustres Géomètres, comme Chasles, Bellavitis et Cremona.

Si la Géométrie élémentaire a été la dernière à utiliser cette méthode, ce n'est pas qu'elle soit moins susceptible d'en tirer parti : mais cela tient peut-être à ce que les géomètres, attirés par les questions neuves qui se présentent en foule à la suite des extraordinaires développements de la Géométrie supérieure, ont trouvé une plus grande satisfaction dans la recherche de nouvelles propriétés que dans l'étude des moyens de perfectionner les méthodes d'enseignement ; et peut-être aussi à ce que les anciennes traditions et l'habitude de plus de vingt siècles ont été un obstacle à une transformation radicale de ces méthodes. Mais l'utilité de la méthode de fusion n'en est pas moins certaine pour la Géométrie élémentaire, comme pour toutes les autres branches de la Géométrie.

L'ouvrage est divisé en cinq livres. Dans les trois premiers sont exposées, d'une manière absolument indépendante de l'idée de *nombre*, les propriétés de position et de grandeur des figures du plan et de l'espace, qui dérivent de la notion fondamentale de l'*égalité* ; le quatrième livre établit la théorie des *grandeurs équivalentes*, abstraction faite également de toute idée de nombre ; enfin, le cinquième livre, qui seul implique cette idée, expose la théorie des *grandeurs proportionnelles* et de la *mesure*.

Quelques préliminaires définissent la *proposition*, les diverses variétés et interprétations que ce mot comporte, puis le *problème* et ses opérations, et montrent que la découverte d'un théorème, la résolution d'un problème ou la démonstration d'une proposition énoncée se ramènent à trois méthodes principales : 1° l'analyse ; 2° la synthèse ; 3° la réduction à l'absurde.

Le chapitre Ier du livre Ier définit les *figures géométriques* et aborde leur étude par celle de la *droite* et du *plan*. Les auteurs établissent sept *postulatums*, de l'énoncé desquels ils déduisent ensuite des définitions ; puis, quand il y a lieu, des corollaires, théorèmes ou propriétés. La forme *postulatum*, à laquelle les auteurs ont recours, n'est autre que l'application du premier principe qu'ils ont posé : « Supprimer toute dépendance de l'arithmétique et faire accepter, par quelques arguments, fondés sur la simple intuition, les vérités primordiales de la Géométrie. »

Le chapitre II du livre Ier étudie, d'après les mêmes principes, et au moyen de deux nouveaux postulatums, dont l'un est attribué par les auteurs à Archimède (1), les *segments*, les *angles* et les *dièdres*. Le chapitre III est consacré aux premières notions sur le *cercle* et sur la *sphère*. Le chapitre IV étudie les *droites parallèles*, la *droite parallèle à un plan* et les *plans parallèles* : il repose sur un dixième postulatum qui n'est autre que le postulatum d'Euclide (2). Enfin le chapitre V expose la théorie des *droites et plans perpendiculaires*, et le livre Ier se termine par les énoncés de *74 exercices proposés*.

Il nous paraît inutile de donner autant de détails sur le livre II (*Polygones : angles polyèdres : polyèdres : distances : 237 exercices*), sur le livre III (*Relations entre la droite, le plan et la sphère : relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère : géométrie sur la sphère : surfaces et solides de rotation : 294 exercices*), et sur le livre IV (*Théorie générale de l'équivalence ; équivalence des polygones et surfaces polyèdriques : équivalence des polygones sphériques et pyramides sphériques : équivalence des prismes : grandeurs limites : équivalence des polyèdres : équivalence du cercle et des corps ronds : 235 exercices*). Ces sommaires et l'index que l'on trouvera ci-après donnent une idée suffisante de l'étendue et de la variété des matières traitées et de l'unité du plan de l'ouvrage. Nous rappelons seulement, parce que cela est essentiel, que ces quatre premiers livres sont complètement indépendants de l'Arithmétique et de l'Algèbre.

En ce qui concerne le livre V (*Théorie des proportions : homothétie et similitude : mesure des longueurs, aires ou volumes : applications de l'algèbre à la géométrie : 227 exercices*), les auteurs se sont préoccupés de l'objection qui pourrait leur être faite, qu'ils ne se sont pas conformés à leur premier principe fondamental, puisqu'ils font dépendre les théories de ce livre de la théorie des proportions numériques : ils ont exposé pourquoi, après de mûres réflexions, ils ne croient nullement être en contradiction avec eux-mêmes. Les très intéressantes considérations qu'ils présentent à cet égard, dans leur préface, peuvent se résumer ainsi : il est dangereux et erroné, au point de vue didactique, de démontrer les propriétés relatives à la position et à l'équivalence des figures par des considérations arithmétiques, parce que, en employant un tel système, l'idée de nombre, qui leur

(1) Ce postulatum, que nous reproduisons à cause de son importance, et aussi pour donner un exemple de la manière dont les auteurs entendent la *fusion*, est le suivant : « Si, sur un segment (ou angle ou dièdre), on porte une suite de segments (ou angles ou dièdres) égaux, de manière que chacun d'eux soit adjacent au précédent et que le premier ait une extrémité (ou un côté ou une face) en commun avec celui qui est donné, on finira par trouver un point (ou un côté ou une face) qui tombera en dehors du segment (ou angle ou dièdre) donné. »

(2) Par un point on ne peut mener qu'une droite parallèle à une droite donnée.

est complètement étrangère, fait perdre de vue leur véritable signification. Mais une proportion, quel que soit l'aspect sous lequel on la considère, exprime en substance que le résultat de la comparaison de deux autres grandeurs homogènes, faites suivant une certaine loi, est égal à celui de la comparaison de deux autres grandeurs également homogènes, faite suivant la même loi. Ces résultats, considérés en eux-mêmes, peuvent être exprimés complètement et clairement par l'idée de rapport, qui implique incontestablement celle de nombre, et ne peuvent être exprimés d'une autre manière.

La 2e édition, actuellement publiée, ne diffère de la première que par quelques modifications, dont la principale est le développement donné au postulatum d'Archimède ci-dessus énoncé, et à ses conséquences, et par la suppression de quelques matières qui ne s'enseignent pas ordinairement dans les écoles, suppression faite dans le but de réduire l'étendue du volume. Telles sont, par exemple, les propriétés des centres, axes et plans radicaux et des centres de similitude, que les auteurs déclarent d'ailleurs n'avoir retranchées qu'à regret, parce que les chapitres y relatifs étaient une des preuves les plus manifestes du grand avantage que présente la fusion de la Géométrie plane avec celle de l'espace.

En résumé, le livre de MM. Lazzeri et Bassani, bien pensé, écrit avec méthode et rigueur, nous paraît devoir appeler l'attention la plus sérieuse de toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement. Le principe de la fusion des deux Géométries, considéré hier encore comme une utopie, aujourd'hui devenu une idée dont l'étude s'impose, est destiné peut-être à se transformer, dans un avenir rapproché, en méthode classique pour l'enseignement de la Géométrie élémentaire, en attendant son adoption dans toutes les branches de la Géométrie (1). Si ce progrès se réalise, le livre des professeurs de l'académie navale italienne, déjà appuyé par douze années d'enseignement, y aura puissamment contribué.

L. Ripert (Paris).

INDEX

Préliminaires. — LIVRE Ier. — Chap. Ier. *Les figures géométriques. Droite et plan.* — Chap. II. *Segments, angles et dièdres.* — Chap. III. *Premières notions sur le cercle et sur la sphère.* — Chap. IV. *Droites parallèles. Droite parallèle à un plan. Plans parallèles.* — Chap. V. *Droites et plans perpendiculaires.* — Exercices.

LIVRE II. — Chap. Ier. *Polygones.* Egalité des triangles et des polygones.

(1) Dans un ouvrage paru à peu près en même temps que celui dont il est ici rendu compte, on lit : « On comprend que la plupart des notions générales de » Géométrie analytique....., surtout en ce qui touche la méthode des coordonnées » cartésiennes, sont susceptibles d'une extension à la Géométrie de l'espace..... » L'analogie est tellement manifeste, surtout au point de vue du calcul, qu'il est » permis de se demander s'il n'y aurait pas un véritable intérêt, dans une » exposition doctrinale un peu complète de la Géométrie analytique, à présenter » l'ensemble des théories essentielles concurremment dans le plan et dans » l'espace, et en s'élevant tout naturellement d'une notion à l'autre ; de rares » tentatives ont été timidement faites jusqu'ici dans cet ordre d'idées ; nous » serions étonné si quelque jour elles ne finissaient pas par produire des résultats » efficaces, sous l'influence d'efforts nouveaux et plus énergiques. » (G.-A. Laisant, *La Mathématique, Philosophie, Enseignement*, p. 112 ; Carré et Naud, 1898.)

Constructions des triangles et des polygones. Quadrangles. — Chap. II. *Angoloïdes* (angles polyèdres). Egalité des trièdres et des angoloïdes. Construction des trièdres et des angoloïdes. — Chap. III. *Polyèdres*. Pyramide. Prisme. Parallélipède.— Chap. IV. *Distances*. Quelques problèmes. — Exercices.

LIVRE III. — Chap. Ier. *Relations entre droites, plans et sphères*. Relation d'une droite avec un cercle et d'un plan avec une sphère. Relations des angles avec un cercle. Relations de deux cercles dans un plan ou sur une sphère. Quelques problèmes. — Chap. II. *Relations des polygones avec un cercle et des polyèdres avec une sphère*. Polygones réguliers. Polyèdres réguliers. — Chap. III. *Géométrie sur la sphère*. Angles et polygones sphériques. Cercles sur la sphère. Polygones inscrits ou circonscrits à un cercle sur la sphère. — Chap. IV. *Surfaces et solides de révolution*. Surface conique et cône. Surface cylindrique et cylindre. — Exercices.

LIVRE IV. — Chap. Ier. *Théorie générale de l'équivalence*. — Chap. II. *Equivalence de polygones et surfaces polyédriques*. Transformation des polygones en rectangles équivalents d'une même série. Relation des rectangles, ou carrés, construits sur les côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère. Quelques problèmes. Equivalence de quelques surfaces polyédriques.— Chap. III. *Equivalence des polygones sphériques et des pyramides sphériques*. — Chap. IV. *Equivalence des prismes*. — Chap. V. *Grandeurs limites*. — Chap. VI. *Equivalence des polyèdres*. — Chap. VII. *Equivalence du cercle et des corps ronds*. Equivalence du cercle. Equivalence du volume et de la surface du cylindre. Equivalence de la surface et du volume du cône rond (droit). Equivalence de la surface et du volume de la sphère. — Exercices.

LIVRE V. — Chap. Ier. *Théorie des proportions*. Grandeurs commensurables et incommensurables et grandeurs proportionnelles. Proportionnalité des segments, des surfaces et des volumes. — Chap. II. *Homothétie et similitude*. Figures homothétiques. Figures semblables. Quelques problèmes. — Chap. III. *Mesure*. Unité de mesure. Circonférence du cercle. Aires des surfaces. Volumes des solides.— Chap. IV. *Application de l'algèbre à la Géométrie*. Relations algébriques des éléments d'un triangle, d'un quadrangle inscrit dans un cercle et d'un tétraèdre. Mesure des côtés, des apothèmes et de la surface de quelques polygones réguliers inscrits ou circonscrits à un cercle en fonction du rayon. Mesure des surfaces et des volumes des polyèdres réguliers. Calcul du nombre π. — Exercices.

L. R.

P. Appell, membre de l'Institut. **Eléments d'analyse mathématique** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens*. Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. Prix 2½ fr.; Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs, 3, rue Racine; 1898.

Le style général des traités mathématiques de notre époque a été fixé par les travaux de Lagrange, Laplace, Legendre, Lacroix, Poisson et d'autres mathématiciens français. Ils y ont introduit toutes les ressources de puissance et de délicatesse dont la langue française est si bien pourvue, pour exprimer clairement et logiquement les idées.

Les traditions de ces écrivains sont conservées actuellement avec tant de

soin que tous les travaux qui concernent les méthodes d'instruction destinées aux mathématiciens français, comme le livre dont nous voulons parler, sont étudiées avec ardeur par les étrangers, soucieux et désireux d'en profiter dans leur propre intérêt.

La première chose qui nous frappe, c'est le grand avantage que possède l'étudiant français, d'avoir été initié, dès ses premiers pas en Algèbre, à la conception fondamentale d'une quantité variable et de ses dérivées. L'auteur est ainsi dispensé d'une foule de définitions préliminaires ; il n'a pas besoin d'expliquer de nombreuses notations, et se trouve en état de procéder dès l'abord, avec raffinement, aux démonstrations fondamentales, ce qu'il ne saurait faire s'il s'adressait à un commençant.

Il est malheureux que la tradition newtonienne ne soit pas encore éteinte chez nous, en Angleterre ; il en résulte que nos étudiants ont été jusqu'ici détournés d'une étude du calcul infinitésimal par trop de propositions géométriques préliminaires, dans la méthode d'enseignement suivie pour éviter le calcul : on a l'idée de les amener à reconstituer la suite géométrique des raisonnements employés par Newton.

Une recherche dans les documents de Newton, effectuée par feu le professeur J.-C. Adams, a révélé que Newton, ainsi que chacun de nous, employa la méthode analytique comme moyen d'invention ; et que ses démonstrations furent reprises sous une forme géométrique grecque, pour donner satisfaction au pédantisme académique de son temps ; ainsi se trouve entièrement justifiée cette critique de Laplace, reproduite par Schopenhauer, que les démonstrations newtoniennes *manquent de sincérité*.

La remarque historique de la page 7, qui fait ressortir la priorité de la notion de l'intégrale sur celle du coefficient différentiel, est d'un grand intérêt ; cela montre à la fois l'un des côtés singuliers de l'esprit humain, et l'importance de la méthode moderne suivie dans ce livre, où l'on traite simultanément le calcul intégral et différentiel, de préférence à l'ancien plan, divisant ces deux sujets, à part, dans des volumes séparés. Les progrès de la science ne se constatent qu'à la longue ; c'est ainsi qu'il est aisé de reconnaître la croissance d'une plante ou d'un arbre après une certaine période de temps : au contraire, la vitesse actuelle de croissance est imperceptible à nos sens, à moins qu'on ne la représente par une série de photographies dans un cinématoscope, avec une échelle réduite des temps, comme les photographies astronomiques de M. Flammarion.

L'auteur, suivant M. Bertrand, débute d'après la manière conventionnelle par l'exposé des infiniment petits : mais je dois avouer cette opinion hérétique, que cette méthode laisse certainement dans plusieurs esprits l'impression que les résultats atteints sont seulement approchés. Dans la démonstration du numéro 8, où l'on prouve que l'intégrale représente une aire, la preuve peut être rigoureusement faite sans l'introduction des infiniment petits, au moyen des Lemmes I et II des *Principes*.

Vient maintenant la notion d'un coefficient différentiel, ou dérivée : ce nom français de *dérivée* est préférable à notre désignation plus longue de *coefficient différentiel*, qui n'a aucun sens au point de vue étymologique, à moins de l'interpréter comme le coefficient qui affecte la différentielle de la variable indépendante dans le développement de la variable dépendante. Ces différentielles, lorsqu'il y a plusieurs variables, et qu'elles varient isolément, sont les *vitesses virtuelles* de Lagrange si nous les supposons qualifiées

par une dénomination symbolique dt, et leurs coefficients sont les dérivées partielles définies au numéro 18. Un desideratum à formuler dans cette partie du sujet est une notation plus définie pour les divers sens qu'on peut donner à ∂z, selon les variations de la variable qui l'engendre, spécialement quand on effectue un changement ayant pour effet de passer à de nouvelles variables indépendantes; les exemples tirés de la théorie mécanique de la chaleur servent à montrer cette nécessité.

On a plaisir à trouver l'égalité de $f''_{qq'}$ et $f''_{q'q}$ présentée presque comme un axiome : « On démontre, dans les éléments de l'algèbre, que ces deux quantités sont égales » (p. 26). Trop souvent on donne une très longue démonstration, comme pour permettre de considérer certains cas exceptionnels qui ne se rencontrent jamais dans les applications pratiques.

Il est curieux pour nous que la notation $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$,... que nous employons pour arc $\sin x$, arc $\cos x$,... n'ait jamais été adoptée en France; elle est justifiée par son usage dans la théorie des substitutions, et présente l'avantage d'être applicable à toutes les fonctions; ainsi, lorsque

$$fx = y, \text{ on a } x = f^{-1}y.$$

Par exemple, la transformation de M. Hermite $t = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{X}}$, où X est une fonction quartique, et H son hessien, montre que nous pouvons écrire l'intégrale elliptique générale de première espèce : $\int^{t} \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{1}{2} p^{-1}\left(-\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{X}}\right)$, formule où p représente la fonction de Weierstrass. M. Clifford emploie couramment les fonctions inverses des fonctions elliptiques de Jacobi. Par exemple,

$$\int_0^{x} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \mathrm{F}\varphi = \mathrm{sn}^{-1}x,$$

formule où $\mathrm{F}\varphi$ est l'intégrale de Legendre, et où $x = \sin\varphi$.

La notation est utile pour les fonctions inverses des fonctions hyperboliques $\mathrm{Ch}\,x$, $\mathrm{Sh}\,x$,... lorsqu'on emploie l'écriture adoptée dans les « Fonctions elliptiques » de MM. Tannery et Molk: elle permet de présenter les résultats des intégrales élémentaires d'une manière plus systématique; par exemple,

$$\int_x^{a} \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \cos^{-1}\frac{x}{a}, \qquad \int_a^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a};$$

toute analogie se perd si l'on exprime le second résultat sous la forme logarithmique $\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$, et la notation est beaucoup plus condensée que *sect. cos hyp.* $\frac{x}{a}$, employée dans le « Calcul intégral » de M. Bertrand.

Si l'on prend les expressions de l'aire de l'ellipsoïde de révolution, cherchée au n° 65, elles sont contenues dans la suivante :

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{(a^2 \,\mathrm{ss}\, b^2)}} \cos^{-1}\frac{b}{a}\,\mathrm{Ch}^{-1}\frac{a}{b}. \qquad (1)$$

(1) La notation $a^2 \,\mathrm{ss}\, b^2$ représente la valeur absolue de $a^2 - b^2$.

la formule effective devant être choisie suivant que b est plus petit ou plus grand que a.

On a encore (p. 21),

$$\int \frac{dx}{x^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \log \frac{x \sim k}{x + k} = \frac{1}{k} \operatorname{Th}^{-1}\left(\frac{x}{k}, \text{ ou } \frac{k}{x}\right).$$

On pourrait mentionner plusieurs autres applications, spécialement celles qui concernent la chaînette : qu'il nous soit permis de citer encore la substitution

$$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C}$$

appliquée à l'intégrale générale (chap. v)

$$\int \frac{Hx + K}{(Ax^2 + 2Bx + C)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}\, dx$$

qui la décompose en deux parties, des formes

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y - y_1)(y - y_2)}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y(y - y_2)}},$$

où y_1 et y_2 représentent le maximum et le minimum de y ; ces intégrales sont données par les fonctions

$$2\cos^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ ou } 2\sin^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_1}}, \text{ et } 2\operatorname{Ch}^{-1}\sqrt{\frac{y}{y_2}}, \text{ ou } 2\operatorname{Sh}^{-1}\sqrt{\frac{y}{-y_2}};$$

nous supposons $AC - B^2$ positif, pour assurer la réalité de y_1 et y_2.

Dans la notation que je recommande, on a pour l'intégrale (p. 159)

$$\int \sec x\, dx = \operatorname{Ch}^{-1} \sec x,$$

et l'on établit ainsi un lien entre les valeurs numériques des fonctions hyperboliques et les tables des fonctions circulaires : par exemple, au moyen de la table des parties méridionales dans la projection de Mercator, employée par M. le capitaine Guyou dans son nouveau système de navigation. L'intégrale plus générale où $\sec x$ est remplacée par

$$\frac{1}{a + b\cos x + c\sin x}, \text{ ou } \frac{1}{a + b\operatorname{Ch} x + c\operatorname{Sh} x},$$

est immédiatement réduite à une simple intégrale type par la substitution d'une nouvelle variable y à l'une ou l'autre de ces expressions.

Les intégrales elliptiques E_2 et F_2 de Legendre sont introduites dans le chapitre VI, la seconde intégrale elliptique E_2 (bien que la première dans l'ordre historique) donnant la longueur de l'arc elliptique ; et la première intégrale elliptique F_2, dans le traité de Legendre, donnant le temps des oscillations finies d'un pendule. M. Appell n'a pas cru devoir introduire les fonctions elliptiques d'Abel et de Jacobi : nous le regrettons, car nous perdons ainsi sa belle illustration mécanique de la double périodicité des

fonctions elliptiques ; cette périodicité devient pratiquement réalisable par l'addition ou la soustraction de poids au pendule, à la fin d'une oscillation, de manière à obliger le centre d'oscillation à passer, d'un côté à l'autre du centre de suspension à la même distance.

La résolution d'une fonction arbitraire en termes d'une série de Fourier est considérée au chap. VII. Cette partie est d'un grand intérêt pratique pour les élèves de M. le professeur Appell, en ce qui concerne les projets de machines à rotation rapide, telles que les exige l'électricité, ou la propulsion des navires à vapeur ; le succès ou l'insuccès dépendant de la somme des vibrations produites. Les ingénieux instruments employés dans l'analyse des marées pour effectuer mécaniquement les intégrations, mériteraient d'être mentionnés, spécialement ceux qui ont été récemment perfectionnés par M. le professeur Michelson, de Chicago.

Les applications géométriques, dans les chapitres IX à XV, donnent la théorie des tangentes, des normales et des plans tangents ou normaux aux courbes et aux surfaces ; et la théorie de la courbure, comprenant en même temps celle des maximums et minimums des fonctions d'une ou de plusieurs variables. Nous rencontrons ici plusieurs nouveautés élégantes, telles que l'hélice osculatrice d'une courbe gauche, le tore osculateur d'une surface, aussi bien que le paraboloïde osculateur ordinaire ; les lignes asymptotiques d'une surface, et enfin (p. 313) la définition du *point central*, que, par exemple, j'avais vainement cherchée dans la Géométrie cinématique de M. le colonel Mannheim. Ce dernier ouvrage est spécialement attrayant dans les parties concernant la théorie de M. Darboux sur la polhodie, l'herpolhodie et ses inflexions, et l'hyperboloïde articulé déformable associé, au sujet duquel M. Mannheim, partant des travaux géométriques de Poinsot, se trouve conduit à l'étude approfondie de questions dynamiques.

La théorie de la courbure géodésique, développée ici au n° 307, appliquée à l'herpolhodie et au cône de l'herpolhodie, éclaire la méthode purement géométrique de M. Mannheim.

La distinction entre la différentielle exacte et l'intégrale prise le long d'une courbe, si importante dans la théorie mécanique de la chaleur, est discutée dans le chapitre XVII, avec des exemples et des diagrammes appropriés ; et dans le chapitre suivant, les diagrammes, illustrations d'une intégration double ou triple, montrant comment un solide est considéré dans le calcul intégral comme composé de briques infinitésimales, sont dessinés avec un grand soin. La question se pose de savoir s'il est avantageux de représenter de tels diagrammes d'une façon stéréoscopique, comme il est possible, avec un peu de pratique, et d'obtenir l'effet de relief sans le secours du stéréoscope. De grandes vues stéréoscopiques projetées sur un mur, selon l'idée de M. d'Ocagne, donneront l'impression de la figure solide si les yeux se portent sur un point à moitié distance ; on voit quelle peut être l'utilité de ces images dans les démonstrations de la géométrie solide. Considérant l'importance, en électricité et en magnétisme, du théorème de Green et la simplicité de son interprétation physique, l'auteur a bien fait de consacrer quelques pages à la fin du chapitre XVIII, à la démonstration des principes essentiels ; l'extension aux espaces à connexions multiples se fait aisément et est rendue intelligible par les analogies hydrodynamiques.

Nous avons conservé peu de place pour rendre compte des 150 pages restantes du livre, lesquelles sont consacrées aux équations différentielles,

sujet poussé aussi loin qu'il est vraisemblablement nécessaire pour les élèves de l'auteur.

La méthode graphique indiquée au n° 356, pour prouver l'existence de l'intégrale de l'équation différentielle générale du premier ordre, a été employée pratiquement, avec une échelle et un pivot mobile, inventés par M. C.-V. Boys, pour tracer des courbes, inabordables analytiquement, comme la courbe élastique (p. 610), la courbe capillaire et les trajectoires d'un projectile avec la loi de résistance quadratique, en représentant graphiquement les tables dressées dans la Théorie balistique d'Euler. Les ellipses de Lissajous, avec les hyperboles associées (fig. 199) donnent une interprétation géométrique élégante de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$.

La remarque de la p. 574, que « les courbes représentées par une équation différentielle homogène du premier ordre sont homothétiques par rapport à l'origine », aide à élucider la théorie : de même, les équations différentielles du quatrième type (n° 364) représentent une famille de courbes telles que toutes les tangentes pour une même valeur de x passent par un même point.

Dans la discussion (chap. XXI) des équations différentielles linéaires à coefficients constants, les termes extraits de la théorie des engins à vapeur et des dynamos aident à donner des idées concrètes aux étudiants techniques et aux électriciens. Ainsi, par exemple, une simple différentiation ou intégration de $\cos mx$ donne une *avance* ou un *retard* d'un angle droit, et multiplie ou divise l'amplitude par m ; l'opération

$$\frac{a\dfrac{d}{dx} + b}{c\dfrac{d}{dx} + d}$$

sur $\cos mx$, multiplie l'amplitude par $\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$, et donne une avance de $\operatorname{tang}^{-1}\dfrac{am}{b}$; et divise l'amplitude par $\sqrt{(c^2m^2 + d^2)}$ et donne un retard de $\operatorname{tang}^{-1}\dfrac{cm}{d}$; semblablement pour les vibrations avec un module d'extinction, représenté par $e^{-px}\cos mx$, comme dans l'équation du galvanomètre de la page 625.

Les équations générales de la Dynamique sont exposées dans le chapitre XXII et dans le chapitre XXIII, qui donne la solution de l'équation aux différentielles partielles du premier ordre $Xp + Yq = Z$: on montre comment on représente les surfaces engendrées par les courbes données par

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

avec des applications spéciales aux cylindres, aux cônes et aux surfaces de révolution.

Le dernier chapitre, XXIV, donne la théorie de la quadrature et de la cubature approximatives, telle que l'exigent l'art de l'ingénieur civil et celui de l'Architecture navale, et le livre se termine par une élégante démonstration de la théorie des planimètres. Pour écarter toute trace de doute des esprits dont j'ai parlé plus haut, qui ne sont pas convaincus par la méthode des

infiniment petits et qui disputent sur le motif en vertu duquel on néglige l'élément BB'B'' dans la figure 218, il est bon d'étendre la méthode employée dans la figure 217, appliquée aux aires finies, au planimètre d'Amsler, en prenant un contour fini qui est décrit par le mouvement des articulations O et A, isolément.

Une modification du planimètre d'Amsler a été récemment introduite d'Amérique : c'est l'invention de M. Lippincott : dans cet instrument, la roulette est libre de glisser sur une barre graduée fixée à angle droit sur le bras AB, de sorte que le mouvement de cette roulette sur le papier est un pur roulement, sans aucun glissement latéral (ou *dérapage*), par conséquent plus doux : le mouvement de la roulette sur la barre graduée enregistre l'aire.

C'est avec un grand plaisir que j'ai parcouru consciencieusement les chapitres de ce livre suggestif, et que j'ai noté les nombreuses nouveautés de cette exposition : trop nombreuses assurément pour qu'on puisse les citer toutes dans ce compte rendu ; le petit nombre de celles que j'ai choisies pour la discussion servira, il faut l'espérer, à indiquer le but général, fort intéressant et utile, de M. Appell.

A.-G. Greenhill (Woolwich).
Artillery College.

G. Oltramare. — **Calcul de généralisation** ; 1 vol. gr. in-8°. Prix : 6 fr. : Paris, Hermann, 1899.

Depuis de longues années déjà, l'éminent doyen de la faculté des sciences de Genève a consacré ses efforts à répandre les principes du calcul de généralisation créé par lui, et à montrer l'étendue et la fécondité des applications de ce procédé analytique. Il nous le présente aujourd'hui sous une forme définitive. Nous ne saurions mieux faire, pour en donner une idée générale, que d'emprunter quelques extraits à sa courte préface.

« Le calcul de généralisation, dit-il, a pour base la représentation des fonctions uniformes, sous une forme symbolique telle que l'on puisse effectuer sur ces fonctions les principales opérations auxquelles elles sont soumises, comme leur différentiation et leur intégration, à l'aide d'un calcul algébrique très simple à effectuer... Un des principaux avantages qu'il présente consiste dans l'application qu'on en peut faire à l'intégration des équations.

« Après avoir établi quelques principes généraux, nous nous sommes appliqué à déterminer une intégrale particulière de toute équation différentielle, ou aux différences et différentielles partielles linéaires à coefficients constants avec un second membre ; nous nous sommes également occupé de l'intégration des équations simultanées, des équations aux différences mêlées, et de certaines classes d'équations aux différentielles partielles avec coefficients variables ; enfin nous avons reconnu que dans plusieurs cas on pouvait déterminer la fonction qui figure dans une intégrale définie dont la valeur est donnée.

« En résumé, le calcul de généralisation nous semble devoir occuper une place importante dans l'analyse supérieure. L'uniformité et la simplicité de ses procédés, son application à la solution d'une multitude de questions d'une grande importance, nous font espérer qu'il pourra trouver place dans l'enseignement et se substituer avec avantage aux différentes méthodes

beaucoup plus compliquées auxquelles il faut avoir recours dans les questions que le calcul différentiel et intégral est appelé à résoudre. »

Nous ne pouvons que joindre nos vœux à ceux qu'exprime l'auteur, et nous croyons que son nouvel ouvrage pourra contribuer dans une large mesure au résultat qu'il poursuit. Il est vrai de dire que les habitudes d'enseignement ne se transforment pas d'un jour à l'autre : mais ce qui serait désirable, et ce qui pourrait se faire immédiatement, ce serait au moins l'initiation aux premiers éléments du calcul de généralisation, à côté des méthodes en usage. Quelques applications bien choisies permettraient, sans aucune perte de temps, bien au contraire, de juger en connaissance de cause du degré de puissance de cet instrument nouveau, digne assurément d'attirer l'attention des mathématiciens.

C.-A. LAISANT.

L'Education mathématique, journal publié par J. GRIESS et H. VUIBERT, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois : 1re année, 1898-1899 ; prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. Paris, Nony.

Voici un Recueil dont le titre ressemble bien au nôtre, et cependant il n'y a eu, chez les fondateurs, aucune connaissance réciproque de leurs projets respectifs. Du reste, si le but à atteindre n'est pas sans analogie de part et d'autre, les moyens mis en œuvre sont bien différents, comme on va s'en rendre compte. La création de l'*Education mathématique* a pour raison d'être l'abandon actuel des classes de mathématiques en France, et l'abaissement du niveau moyen, qu'on peut malheureusement constater avec trop de facilité. Ainsi qu'ils le disent eux-mêmes, les rédacteurs voudraient, par leur publication « seconder l'action éducative du professeur de mathématiques ». L'*Education mathématique* s'adresse aux élèves, en restant dans le domaine exclusivement élémentaire : elle publie surtout des questions et des exercices, et en outre des articles dont les professeurs pourront souvent tirer un utile profit. Nous signalerons par exemple, dans le premier numéro, de très judicieuses « Remarques générales sur la démonstration des théorèmes de Géométrie ». Enfin, le nouveau Recueil se propose de faire une petite place à l'histoire des mathématiciens célèbres.

Nous croyons, en résumé, qu'il y a là une tentative utile et fort intéressante, à laquelle nous souhaitons très sincèrement le succès qu'elle mérite.

Annuaire pour l'an 1899, *publié par le bureau des longitudes* : avec des notices scientifiques. 1 vol. in-18 de VI-784 p., 2 cartes magnétiques. — Prix : 1 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars.

Ce petit volume compact, qui vient, comme chaque année, de paraître dans le courant du mois de décembre dernier, contient une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les notices de cette année, signalons tout spécialement celle de l'ingénieur constructeur P. GAUTIER, sur le *Sidérostat à lunette de 60 mètres de foyer et de* 1m, 25 *d'ouverture* (qu'il construit pour l'exposition de 1900) ; la *notice sur les ballons-sondes* par M. BOUQUET DE LA GRYE ; et la *notice sur la Géodésie moderne en France*, par le colonel BASSOT.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Journal für reine und angewandte Mathematik, gegründed von A.-L. Crelle, herausgegeben von L. Fuchs. Prix d'abonnement annuel : 12 marks. t. CX, n° 5, septembre 1898. Berlin, Reimer.

Mathematische Annalen. herausgegeben von F. Klein, W. Dyck, Ad. Mayer. Prix d'abonnement : 20 marks le volume (4 numéros) : il paraît chaque année 4-6 numéros, t. LI, n° 2, octobre 1898. Leipzig. Teubner.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, herausgegeben von Dr R. Mehmke und Dr M. Cantor. Prix d'abonnement : 20 marks (6 numéros). t. XLIII, 1898. Leipzig. Teubner.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann : 29e année, 1898. Prix d'abonnement annuel : 12 marks (8 numéros) : n° 8, décembre 1898. Leipzig, Teubner.

C'est l'organe le plus important publié en Allemagne sur l'enseignement des sciences exactes. La collection des vingt-huit volumes parus renferme l'histoire du développement de cette branche d'enseignement dans les pays allemands depuis une trentaine d'années.

Les numéros 7 et 8 donnent un compte-rendu du congrès de Düsseldorf : le n° 7, reproduit in extenso la conférence de M. le professeur F. Klein sur *l'Université et l'Ecole technique supérieure*.

Zeitschrift für lateinlose hœhere Schulen, herausgegeben von Prof. Dr. G. Holzmüller ; 10e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : 10 marks (12 numéros ; n° 3, décembre 1898. Leipzig. Teubner.

Cette revue sert de bulletin à l'association pour l'avancement de l'enseignement secondaire moderne et à la société des maîtres des écoles réales en Saxe.

N° 3. — M. D.-J. Hermes. Sur la répartition du programme de l'enseignement mathématique dans les classes moyennes. — M. Prof. F. Klein. L'université et l'école technique supérieure (Congrès de Düsseldorf).

Atti della Reale Accademia dei Lincei. anno CCXCV, 1898, série 5e : Rendiconti : vol. VII. fasc. XI, 4 dicembra : Roma, tipogr. della R. acc. dei Lincei.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XII. 1898. Palerme. Fasc. 6, novembre-décembre. — Giudice : Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche. — Peglisi : Sul movimento di un punto pesante sopra una superficie di rivoluzione. — Pirna : L'immaginario i ed i numeri alternati *i, j, k* nello studio delle deformazioni delle curve piane e delle curve storte.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXXVII, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

N° 23 (5 décembre). — J. Boussinesq : Aperçu sur la théorie de la bicyclette : équilibre du cavalier. — P. Painlevé : Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. — Le Roy : Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. — C.-J. de la Vallée-Poussin : Sur la réduction des intégrales multiples.

N° 24 (12 décembre). — E. Borel : Sur les recherches des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. — J. Beudon : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles réductibles aux équations différentielles ordinaires. — E. Maillet : Sur la détermination du groupe des équations numériques. — D. Gravé : Sur les lignes composées de parties rectilignes. — L. Lecornu : Sur l'isochronisme pratique des régulateurs.

N° 25 (19 décembre). — Séance publique annuelle : allocution de M. C. Wolf ; prix décernés ; prix proposés.

N° 26 (26 décembre). — Riquier : Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. — A. Cahen : Sur les équations différentielles de premier ordre. — A. Guldberg : Sur les équations aux différentielles totales linéaires.

Journal de l'Ecole Polytechnique, 2e série, 4e cahier, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

A. Boulanger : Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires, homogènes, intégrables algébriquement. — E. Collignon : Note sur la détermination de l'heure du passage du soleil dans un plan vertical. — Rabut : Théorie des invariants universels. — M. d'Ocagne : Monographie : une leçon sur les diagrammes cotés ou abaques.

Nouvelles Annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, dirigé par C.-A. Laisant et X. Antomari, 3e série, t. XVII, 1898, t. XVIII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 15 fr. ; départements et union postale, 17 fr. ; autres pays, 20 fr. ; Gauthier-Villars.

Décembre 1898. — E.-M. Lémeray : Sur le calcul des racines des équations par approximations successives. — Karagiannidès : Sur une extension d'une formule de M. Léauté. — Ch. Biehler : Sur les coniques qui sont les projections d'un cubique gauche. — Dumont : Remarque sur l'application à la logique de la théorie des régions.

Janvier 1899. — H. Dufort : Démonstration de quelques théorèmes de cinématique. — C. Candido : Formules pour l'étude d'une figure remarquable. — Ch. Biehler : Sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 23e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. ; 1er octobre 1898. Paris, Nony.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier ; 9e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr. ; Etranger, 9 fr. Paris, Nony.

N° 1 (octobre 1898). — M. d'Ocagne : Note sur la formule de Taylor. — G. Maupin : Note sur le problème d'Adrianus Romanus.

N° 2 (novembre 1898). — Boxdiff : Note sur la multiplication et la division des arcs.

N° 3 (décembre 1898). — G. Lapointe : Note sur l'équation du second degré en S qui permet de déterminer les axes d'une section plane d'une quadrique.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg ; 2e série, t. VIII. 1898. Prix d'abonnement annuel : Belgique, 7 fr. 50 ; Etranger, 9 fr. : Gand, A. Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

N° de décembre 1898. — Gino Loria : La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice, — F. Dauge : Sur la limite d'un certain triangle Lobatchefskien.

Journal de mathématiques élémentaires ; journal de mathématiques spéciales. publiés par M. J. Mariaud ; 24e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel ; Départements : élémentaires, 7 fr. ; spéciales, 9 fr.; Paris, Ch. Delagrave.

Bulletin de sciences mathématiques et physiques élémentaires, publié par L. Gérard, G. de Longchamps et B. Niewenglowski ; 1re année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. Paris, Société d'éditions scientifiques.

Bulletin de mathématiques spéciales. publié par L. Gérard, G. de Longchamps et B. Niewenglowski ; 5e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. ; Paris, Société d'éditions scientifiques.

E. Cesaro. — **Elementi di Calcolo infinitesimale** con numerose applicazioni geometriche ; 1 vol. gr. in-8°, 500 p. ; Prix : 5 L. 12 ; Naples, L. Alvano, 1899.

C. Lycortas. — **Le mouvement universel** : théorie nouvelle ; vol. 1, Athènes, Beck ; Paris, Le Soudier, 1898.

E. Morgix. — **Nouvelles tables de logarithmes** à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques ; pr. 1 fr. 25 ; Blois, 1898.

M. Nasso. — **Algebra elementare** ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici ; 1 vol. 526 p. ; prix : 3 L. 12 ; Turin, libreria Salesiana, 1898.

N. Chabrelt. — **Cours de Géométrie cotée ;** 1 vol. gr. in-8°, 299 p. 257 fig. ; prix : 5 fr. ; Paris, Nony, 1898.

Th. Caronnet. — **Problèmes de mécanique** à l'usage des classes de mathématiques élémentaires, etc. ; 1 vol. in-8° avec figures, 502 pages ; prix : 5 fr. ; Paris, Nony, 1898.

Le Gérant : C. NAUD.

EVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN RUSSIE

APERÇU HISTORIQUE

Des travaux mathématiques, sous la forme de l'étude de l'Arithmétique pratique et de l'art primitif de la mesure des lignes, des aires et des volumes, existaient en Russie depuis bien longtemps. Plusieurs ouvrages qui nous sont parvenus en sont les témoins. Le plus ancien d'entre eux (en 1134) fut composé par Kirique, moine de Novgorod, et consacré aux calculs chronologiques et au comput. L'auteur y fait mention d'autres amateurs de l'art du calcul ; il n'en parle du reste qu'en passant et en termes vagues. Le penchant national pour l'étude et l'exploration des mathématiques dans la direction arithmético-algébrique se manifesta surtout par la tendance à dépasser dans les travaux arithmétiques les limites établies par les besoins de la vie quotidienne. Cette particularité constitue la ressemblance des Russes, non avec les Grecs, leurs premiers maîtres, mais avec les Hindous, nation qui n'a jamais eu de relations immédiates avec les Russes. Citons les faits où cette tendance s'est manifestée. La numération qui au XI^e^ siècle n'atteignait que 10 000 fut prolongée jusqu'à 10 000 000 au XII^e^ siècle, et, aux XIII^e^-XVI^e^, jusqu'à 100 000 000 d'abord, puis jusqu'aux unités d'ordres 13, 18, 19 et enfin 50. Avec cet élargissement du domaine exploité par le calcul, se développait d'une façon remarquable le principe élévatoire servant à exprimer par écrit les multiples des unités des divers ordres, et provenant lui-même du principe d'indication des mêmes multiples par des lettres. Ce dernier principe fut emprunté aux Grecs par les Slaves. Dans le développement des fractions du système binaire employées en Russie avant Pierre I^er^ dans les mesures agraires et dans celles des matières sèches, on atteignait l'unité du 10^e^ ordre $\left(\frac{1}{1024}\right)$. Et même, à une époque plus reculée, dans l'ouvrage de Kirique mentionné ci-dessus, on

rencontre sous le nom « d'heures fractionnaires » les subdivisions d'une heure d'après le système quinaire atteignant l'unité du 7^{e} ordre $\left(\frac{1}{78\,125}\right)$.

Le clergé gréco-bulgare qui, après l'adoption du christianisme en Russie, y fonda les premières écoles, ne jugea pas nécessaire d'y introduire l'enseignement de l'Arithmétique, pas même sous la forme de son application au comput, si important pour l'Église. On enseignait dans ces écoles l'alphabet slavo-ecclésiastique et l'écriture ; ensuite on passait à la lecture et à l'étude des livres du service divin : bréviaire et psautier. C'est sous cette forme que l'enseignement continua à se pratiquer dans les écoles instituées par le clergé russe, jusqu'à la seconde moitié du XVII^{e} siècle. Ces écoles profitaient seules de l'appui matériel direct ou indirect de l'État, de sorte que les Russes ne pouvaient apprendre l'Arithmétique et l'Arpentage qu'à l'aide des livres, ou verbalement, grâce au concours des hommes instruits. Ce dernier mode d'instruction amena la création des écoles privées, qui vivaient avec leurs propres ressources, entièrement méconnues par le clergé et par l'État. Il n'y a que quelques-uns des écrits anciens parvenus à nous qui fassent mention de ces écoles, et encore sous une forme très vague. Seul, l'ouvrage écrit en 1660 sous le nom d'Asboukovnik, sorte d'encyclopédie de l'étude dans l'école, en fait une mention plus exacte. Grâce à cet ouvrage, nous apprenons que les objets de l'enseignement de ces écoles embrassaient les sept arts libéraux du moyen âge (septem artes liberales, ou le trivium et le quadrivium), rangés selon les opinions traditionnelles sur leur importance relative dans l'ordre suivant : I) Grammaire ; II) Dialectique ; III) Rhétorique ; IV) Musique ; V) Arithmétique ; VI) Géométrie (entendue dans le sens d'Arpentage) ; et VII) Astronomie. L'Asboukovnik ne contient que des introductions sur les arts libres. Mais d'après la ressemblance complète de l'article consacré à l'Arithmétique avec les introductions de plusieurs manuscrits arithmétiques qui nous sont parvenus, il n'y en a qu'un ou deux appartenant au XVI^{e} siècle ; les autres appartiennent au XVII^{e}. Employant presque exclusivement la numération écrite des Hindous transportée en Russie de l'Europe occidentale, ces manuscrits contiennent : la numération

écrite et la numération parlée : les opérations sur les nombres entiers, exécutées par écrit et au moyen de jetons ou à l'aide des bouliers ; les connaissances principales de la métrologie russe et étrangère, avec les opérations sur les nombres concrets : les opérations sur les fractions ; les règles de trois ; les règles de société ; les questions relatives aux alliages ; la règle de fausse position, et les problèmes arithmétiques plaisants. L'exposition purement dogmatique est privée d'explications et de démonstrations quelconques. La règle exprimée en forme d'ordonnance est suivie ou précédée immédiatement de son application aux exemples ou aux problèmes. Tout cela devait être appris par cœur à l'école, aussi bien que dans le travail personnel indépendant, et ensuite appliqué mécaniquement aux exemples et aux problèmes. L'étude de l'Arithmétique d'après les livres, à cause de l'aide insuffisante des professeurs, devint la base de l'enseignement de cette science. Dans plusieurs manuscrits, à l'Arithmétique se joignirent l'Arpentage, quelques connaissances d'Astronomie et le comput, comme objets d'études complémentaires. On leur consacrait du reste les manuscrits particuliers qui nous sont parvenus en nombre assez considérable. De même que pour l'Arithmétique, l'enseignement et l'étude personnelle indépendante, d'après ces manuscrits, devaient avoir lieu conformément au caractère de leur exposition.

L'étude de l'Arithmétique, de l'Arpentage et du comput, au moyen des écoles et par des travaux indépendants à l'aide des livres, avait du succès. En cas de besoin, le clergé et le gouvernement trouvaient toujours parmi les Russes des hommes compétents dans ces sciences, quoique quelquefois ce ne fût pas sans difficulté. Il s'ensuit qu'en 1492, à la fin de la période pour laquelle les calculs nécessaires pour le comput avaient été faits, et alors que se manifestait le besoin de nouveaux calculs pour la nouvelle période, plusieurs personnes abordèrent avec succès la solution de ce problème. En premier lieu, le métropolite Zossima exécuta les calculs pour les vingt premières années. L'évêque de Perm, Philophé, les vérifia. Ensuite le même travail, mais pour soixante-dix ans, fut accompli, d'après l'ordre du concile, par l'archevêque de Novgorod, Hennady. Son ouvrage lui valut plusieurs continuateurs qui firent les calculs pour les années suivantes.

Parmi leurs travaux, le plus remarquable fut le comput ecclésiastique d'un prêtre de Novgorod, Agathon, en 1540. Plus tard, notamment vers la seconde moitié du XVI^e^ siècle, le gouvernement entreprit de grands travaux en vue d'arpenter et d'enregistrer les terres d'État et celles des particuliers, et d'acquitter exactement les parts territoriales fixées pour l'entretien des gens de guerre. Parmi ceux qui dans ce but furent recrutés par le gouvernement, plusieurs possédaient des connaissances spéciales puisées dans les manuscrits d'arpentage mentionnés plus haut.

Malgré ces faits, prouvant la nécessité urgente d'hommes instruits en Arithmétique, en Arpentage et en comput, le gouvernement et le clergé supérieur ne se souciaient point d'organiser l'enseignement de ces sciences dans les écoles russes. L'enseignement des mathématiques fut ainsi négligé jusqu'à ce que l'importance de la réorganisation de l'armée et de la création de la flotte sur le modèle de l'Europe occidentale vint à être reconnue. Alors Pierre I^er^ fit fonder, au commencement du XVIII^e^ siècle, plusieurs écoles spéciales où l'enseignement des mathématiques dut prendre une place bien marquante. La principale de ces écoles était celle des sciences mathématiques et de navigation, fondée à Moscou (1701), avant l'institution d'autres établissements d'instruction. Destinée à préparer des marins, elle donna cependant, dès les premières années de son existence, des travailleurs d'autres professions : ingénieurs, artilleurs, arpenteurs, employés civils et même copistes. Cette variété des professions provenait certainement du manque d'organisation de l'enseignement public à l'époque précédente. L'école devait embrasser trois formes d'enseignement : primaire, secondaire et supérieur. Dans l'école primaire, appelée russe, on n'enseignait que la lecture et l'écriture, car la plupart des élèves, souvent même recrutés par force, étaient illettrés. Dans l'école secondaire, « école des chiffres, » on enseignait l'Arithmétique. L'école supérieure consistait en plusieurs classes où l'on enseignait la Géométrie théorique et pratique, les Logarithmes, la Trigonométrie, la Géographie mathématique, le comput et la Navigation. Le droit de passer dans les classes supérieures appartenait seulement aux nobles. Les jeunes gens d'autres États, après avoir terminé les études de l'école des chiffres, étaient obligés d'oc-

cuper des emplois inférieurs au service de l'État. Les premiers maîtres de l'école des sciences mathématiques et de navigation furent le savant russe Léontius Philippovisth Magnitzky et les Anglais engagés par Pierre Ier : Henry Fargwarson, professeur de mathématiques à l'université d'Aberdeen, Stephen Gwyn et Richard Gries. Magnitzky enseignait l'Arithmétique, d'après son propre manuel, imprimé en 1703; Fargwarson, les autres parties des mathématiques et la navigation théorique ; Gwyn et Gries, la navigation pratique. Dans la personne de Magnitzky la forme nouvelle de l'école russe était encore étroitement liée à l'école ancienne: c'est qu'il n'avait acquis toutes ses connaissances qu'en Russie. Ayant étudié dans les manuscrits mathématiques russes tout ce qu'il avait pu y trouver, y ajoutant ses connaissances du latin, du grec, de l'italien, de l'allemand et peut-être même du hollandais, acquises à l'Académie slavo-gréco-latine de Moscou, et encore d'autres ressources, il pouvait compléter et perfectionner ses connaissances dans le domaine des mathématiques. Le manuel d'Arithmétique ci-dessus mentionné en fut le résultat. Peut-être même ce manuel était-il composé avant la fondation de l'École des sciences mathématiques et de navigation. Le titre de ce livre n'exprime pas complètement son contenu; car, outre l'Arithmétique dans le sens propre du mot, il comprend les articles suivants : des progressions ; extraction de la racine carrée ; extraction de la racine cubique ; applications géométriques de ces opérations ; des opérations algébriques ; extraction des racines de degré quelconque ; applications du calcul numérique à la géométrie ; des équations du premier, du second et du troisième degré ; des équations du quatrième degré ramenées à celles du second ; problèmes de calcul numérique concernant le triangle et le cercle ; introduction au calcul des tables trigonométriques ; quelques parties de la géographie mathématique et de la navigation. Quant à la partie du livre consacrée à l'Arithmétique seule, elle comprend : la numération ; les opérations sur les nombres entiers ; les tables métrologiques et les opérations sur les nombres concrets ; les opérations sur les fractions ; les règles de trois avec un recueil de problèmes ; les règles de fausse position et les problèmes arithmétiques plaisants. Parmi les groupes de problèmes, constituant le recueil men-

tionné, se trouvent ceux qui concernent les partages proportionnels, les règles de société et les questions relatives aux alliages. A l'exception peut-être du gymnase fondé près l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, l'Arithmétique de Magnitzky fut l'unique manuel employé dans les écoles russes pendant la première moitié du XVIII^e^ siècle. Aux manuscrits arithmétiques de l'époque précédente, le manuel de Magnitzky se rattachait non seulement par le nombre considérable de problèmes y empruntés, mais encore par la méthode dogmatique d'exposition des règles. Cette méthode excluait toutes les explications et les démonstrations : il ne fallait qu'apprendre par cœur les règles et ensuite les appliquer mécaniquement à la solution des problèmes, d'après les modèles donnés. Cette méthode était adoptée sans aucun changement par les maîtres anglais, à en juger d'après les manuscrits qui nous sont parvenus et qui concernent les objets de leur enseignement dans l'École, c'est-à-dire la Géométrie, la Trigonométrie et la Navigation. Les procédés de l'enseignement, engendrés par cette méthode, forçaient le maître à ne les pratiquer qu'en lisant ses propres cahiers ou le livre accepté comme manuel, ou en les dictant aux élèves.

Les élèves devaient apprendre par cœur pour la leçon suivante tout ce qui avait été lu ou dicté par le maître. Les résultats de la dictée furent moins mauvais que ceux de la lecture, parce que les auditeurs, en écrivant ce que le professeur lisait, introduisaient souvent dans leurs notes des lacunes et des erreurs ; celles-ci par leur absurdité et par la nécessité de les apprendre par cœur, embarrassaient non seulement ceux qui les avaient commises, mais encore ceux qui leur succédaient, faute de livres et faute de progrès dans l'enseignement. Les hommes capables de s'occuper de recherches scientifiques personnelles ne pouvaient se développer au moyen d'un pareil enseignement. Il ne faisait que préparer des hommes capables d'appliquer à la pratique les règles et les procédés appris par cœur. C'est précisément ce que le gouvernement avait eu en vue, en instituant l'École des sciences mathématiques et de Navigation de Moscou. L'activité de cette école atteignait parfaitement le but. Durant quinze années à partir de sa fondation, elle réussit à donner à l'État une quantité d'officiers de marine, des artilleurs, des ingénieurs, des hydrographes

et des topographes, qui tous étaient bien instruits dans leurs arts. Les hydrographes et les topographes donnèrent une base solide à l'étude de la Russie et aussi à sa description. Grâce à leur activité, accompagnée d'une abnégation remarquable dans la lutte contre des obstacles imposés non seulement par la nature, mais souvent par les hommes, ils surent parvenir jusqu'aux endroits les plus éloignés et les plus sauvages. Ils y dressaient les cartes des côtes, des mers et des contrées entières, s'occupaient de l'exploration des fleuves, frayaient les chemins, composaient les descriptions des forêts, etc. C'est en s'appuyant sur leurs travaux qu'on a dressé la première carte générale de l'Empire russe et, en 1726 on commença l'édition de l'*Atlas imperii Russici*, qui malheureusement ne fut pas achevée. On employait aussi les élèves de cette même école comme maîtres de l'école d'ingénieurs et de celles d'amirauté et des chiffres où on enseignait l'Arithmétique, la Géométrie et, dans plusieurs d'entre elles, la Trigonométrie plane. Ces écoles existèrent sous forme indépendante à partir de leur fondation (1714) jusqu'à 1723. Depuis lors on a commencé à les unir avec les écoles ecclésiastiques établies dans les mêmes villes. Ainsi l'École des sciences mathématiques et de Navigation de Moscou jusqu'à 1715, année de la fondation de l'Académie de marine à Saint-Pétersbourg, non seulement était à la tête de l'enseignement mathématique en Russie, mais encore lui communiquait la forme, le caractère et la direction acceptés par elle-même. L'emploi exclusif de ces moyens dans les écoles russes exista jusqu'à 1726, et plus tard conserva la prédominance bien longtemps encore. A partir de 1715, l'école de Moscou descendit au rang d'une école secondaire, où l'on n'enseignait que l'Arithmétique, la Géométrie et la Trigonométrie.

L'Académie de la Marine fut instituée comme école du même type que l'École de Moscou ; elle reçut d'ailleurs parmi ses professeurs quelques-uns des maîtres (Fargwarson et Gwyn) de cette dernière et quelques-uns de ses anciens élèves ; ils n'étaient certainement pas en état d'y introduire un changement dans le système de l'enseignement mathématique déjà mis en usage. Les réformes fondamentales dans la direction et dans le but de cet enseignement furent produites en Russie par la fondation du Gymnase et de l'Université près l'Académie des Sciences de Saint-

Pétersbourg, qui eut lieu en 1725. Le but de ces établissements était de former des travailleurs, non seulement pour les professions pratiques comme autrefois, mais en vue de la science pure ; les plus capables d'entre eux pourraient devenir un jour académiciens. Le Gymnase se subdivisait en cinq classes ; on enseignait la Géométrie dans deux classes supérieures, la Géographie avec sa partie mathématique dans trois et l'Arithmétique dans quatre. Les premiers maîtres de ces sciences furent les licenciés de l'Université de Tubingue, Weitbrecht et Krafft, engagés en Allemagne pour entrer à l'Université instituée près l'Académie comme étudiants. Quand ils quittèrent le Gymnase en 1728, leurs successeurs étaient de même des étudiants de l'Université, qui, faute d'expérience et souvent faute de connaissances suffisantes, durent bien souvent quitter leurs fonctions. Pendant treize ans, à partir de la fondation de ce Gymnase, l'enseignement des mathématiques se pratiquait sans manuels ; cette absence de livres jointe aux défauts des maîtres déjà mentionnés, rendait l'enseignement bien difficile. Aussi, en 1732 ; Krafft, nommé inspecteur du Gymnase, jadis maître dans cet établissement et depuis 1731, académicien et professeur de mathématiques et de physique, composa deux manuels : *Kurtze Einleitung zur mathematischen und natürlichen Geographie, nebst dem Gebrauch der Erd-Kugeln und Land-Charten, zum Nutzen der russischen studirenden Jugend* Saint-Pétersbourg, 1738, in-4°, 295 p. et *Kurtze Einleitung zur theoretischen Geometrie, zum Gebrauche der studirenden Jugend in dem Gymnasio bey der Academie der Wissenschaften in Saint-Petersburg* 1740, in-8°, 270 p., avec 14 planches. Ces deux manuels furent traduits en russe et ensuite imprimés : le premier en 1739 et en 1764 et le second en 1748 et en 1762. Le manuel d'Arithmétique pour le Gymnase fut composé par le célèbre Léonard Euler sous le titre : *Einleitung zur Rechen-Kunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in Saint-Petersburg* 1re partie, 1738, 2°, VIII + 277 p. ; 2e partie, 1740, in-8°, XXIX + 228 p.). La première partie de ce livre fut traduite en russe d'après le manuscrit de 1737, par l'adjoint de l'Académie Adodouroff. La traduction de ce manuel fut imprimée et publiée en 1740. La même année Adodouroff prit l'enseignement de l'Arithmétique et de la Géo-

métrie au Gymnase. La seconde partie fut traduite par l'étudiant de l'Université académique Kouznetzoff et publiée en 1760. Ces deux parties ensemble ne faisaient que la moitié de l'ouvrage d'abord entrepris par Euler. Il avait le projet de publier encore deux parties qui, par suite de son départ pour Berlin, ne furent point écrites. D'après le plan exposé dans la préface de la première partie et exactement exécuté dans les deux premières : la troisième devait comprendre les règles de trois, les règles de société, les questions relatives aux alliages, etc.; et la quatrième, les opérations sur les fractions décimales, l'extraction des racines et les logarithmes. Parmi les parties imprimées, la première contenait la numération et les opérations sur les nombres entiers et sur les fractions, et la seconde contenait les opérations sur les nombres concrets. Le principal but que poursuivait le célèbre auteur dans cette œuvre, était de donner à la jeunesse russe un manuel d'Arithmétique dans lequel, en regard des éléments de la science, on trouvait des démonstrations claires et exactes et les explications des règles, avec l'éclaircissement de ces dernières au moyen d'exemples. Les étudiants enseignant l'Arithmétique au Gymnase étaient cependant hors d'état d'en profiter, de sorte qu'il fallait les remplacer par Adodouroff.

Dans ses manuels, Krafft poursuivit le même but qu'Euler. Ainsi, grâce aux travaux de ces deux savants, l'enseignement mathématique au Gymnase fut entièrement ramené dans une voie fructueuse et nouvelle. En suivant cette voie on pouvait préparer les travailleurs de la science pure. Il faut remarquer pourtant que le Gymnase n'exerçait presque aucune influence sur l'enseignement mathématique dans les autres établissements d'instruction, à cause des défauts de sa propre organisation, et aussi à cause des opinions de la société à son égard. L'enseignement, confié aux étrangers quelquefois peu capables d'accomplir cette tâche, ne sachant guère le russe, ou aux étudiants russes manquant d'expérience et des connaissances générales, ne se pratiquait que fort mal. L'argent accordé pour l'entretien du Gymnase n'était pas suffisant ; par conséquent on manquait du nécessaire. La société russe à demi instruite de ce temps était hors d'état d'apprécier l'importance du Gymnase comme établissement d'instruction générale ayant pour but principal de préparer des tra-

vailleurs de la science pure, et par conséquent on s'en désintéressait. Le type de l'école publique précédente développa dans la société la conviction du besoin de connaissance exclusivement utilitaires ; on ne considérait que l'application des sciences mathematiques dans la guerre et dans la paix. Avec cette manière d'envisager les choses le nombre d'élèves qui entraient au Gymnase n'était pas grand ; après l'institution du corps des cadets nobles de terre (1731) il diminua encore. A la création du Gymnase on comptait 112 élèves et en 1737 on n'en comptait que 19 dans toutes les classes. Malgré toutes ces conjonctures défavorables le Gymnase réussit pourtant à préparer quelques membres de l'Académie ; les adjoints pour les mathématiques : Adodouroff, Golovine, Kononoff et l'académicien Kotelnikoff.

L'Université instituée en 1726 près l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, faute d'auditeurs préparés, n'était qu'un établissement prématuré. La première année de son existence on invita huit jeunes gens d'Allemagne à y suivre les cours. Plusieurs d'entre eux ayant déjà le grade de licencié furent bientôt nommés adjoints de l'Académie et ensuite académiciens. Quatorze professeurs, qui leur faisaient les leçons, afin que les bancs ne fussent pas vides, s'écoutaient les uns les autres pendant les cours. D'après le premier catalogue des leçons, publié le 14 janvier 1826, le professeur de physiologie, Daniel Bernoulli, enseignait les éléments des mathématiques avec ses applications à la médecine ; son frère, professeur de mathématiques, Nicolas Bernoulli, enseignait la Mécanique et les parties des mathématiques ayant une connexité avec la physique ; « *professor primarius et Matheseos sublimioris* », Jacques Hermann enseignait d'abord l'Analyse générale et l'Algèbre avec les applications à la solution des problèmes, et ensuite l'Analyse infinitésimale avec les applications ; le professeur extraordinaire de mathématiques Mayer enseignait les éléments des mathématiques ; le professeur de physique expérimentale et théorique, Bülfinger, enseignait la physique ; le professeur d'Astronomie, Joseph-Nicolas de l'Isle, enseignait l'Astronomie et exerçait les auditeurs aux observations. Chacun des professeurs faisait quatre leçons par semaine lundi, mercredi, jeudi, samedi. Deux parmi eux indiquaient les livres dont ils se servaient. Ces professeurs étaient : Mayer, fai-

sant ses leçons d'après les ouvrages de Chrétien Wolff, et Bülfinger se servant des *Institutionibus philosophiae Newtonianae*, par Gravesande. L'année suivante on n'invita plus d'étudiants étrangers ; les professeurs étaient presque entièrement privés d'auditeurs. Alors, on essaya les leçons publiques, mais sans succès. Du petit nombre d'auditeurs, bientôt il ne resta presque personne. Parmi les professeurs de sciences physico-mathématiques, Bülfinger seul prenait part à cet essai. Il avait l'intention de faire un cours populaire de physique expérimentale. Les faits expérimentaux démontrés attirèrent d'abord un nombre assez considérable d'auditeurs, mais pour un temps très court. Après cet essai qui réussit mal, les professeurs furent contraints, pendant une dizaine d'années, de se borner à publier par année les catalogues des leçons, et d'enseigner à domicile aux étudiants entrés séparément à l'Université. La plupart de ces étudiants étaient des étrangers ou des personnes envoyées par quelque institution de l'Etat pour étudier une science particulière. On ne commença à professer les cours qu'à partir du mois de juin 1738, lorsque la translation des élèves du Gymnase, capables de suivre les cours de l'Université, fut enfin établie. En cas d'insuffisance du nombre d'élèves du Gymnase, on invitait les meilleurs étudiants des séminaires ecclésiastiques et de l'Académie ecclésiastique de Moscou. D'après le nouveau catalogue des leçons publié à l'occasion de leur renouvellement, Léonard Euler enseignait la Logique et la haute Analyse ; Heinsius, l'Astronomie ; de l'Isle, l'Astronomie pratique, travaillant avec les étudiants à l'observatoire de l'Académie ; Winsheim, la Géographie mathématique et physique et Krafft, la Métaphysique et la Physique. C'est en 1742, que la division de l'enseignement de certains professeurs en enseignement public et privé fut introduite pour la première fois dans le catalogue des leçons pour cette même année. D'après ce catalogue l'adjoint Moula enseignait l'Algèbre avec ses applications mathématiques ; Heinsius enseignait la Géométrie, la Trigonométrie plane et sphérique et l'Astronomie ; Winsheim achevait son cours de Géographie ; Krafft enseignait publiquement la Physique expérimentale, et en outre, aux amateurs, l'Algèbre et le Calcul différentiel et intégral avec leurs applications en général et particulièrement à la Physique ; Richmann enseignait la Phy-

sique théorique d'après le livre de Wolff; l'adjoint Lomonossof, la Géographie physique d'après le manuel de Krafft, l'adjoint Gellert enseignait publiquement la Logique et la Métaphysique, la Physique et les Mathématiques particulièrement. Bien qu'alors les étudiants se trouvassent constamment à l'Université, ils y étaient en nombre peu considérable ; dans la même année 1742, les 13 professeurs n'avaient que 12 auditeurs; en 1752, il y en avait 20, 18 en 1753, 16 en 1754 ; avec un si petit nombre d'auditeurs, les professeurs ne faisaient pas volontiers leurs cours, et ils en manquaient souvent plusieurs ; parmi eux, quelques-uns même ne les commençaient pas. De là, des mécontentements continuels ; les professeurs se plaignaient du manque d'auditeurs et les étudiants reprochaient aux professeurs leur négligence. Malgré tous ces obstacles, l'impossibilité de la division en facultés, faute d'un nombre suffisant de professeurs et d'étudiants, le manque de ressources, les défauts et quelquefois même l'absence complète de l'enseignement, la première Université russe réussit néanmoins à préparer une série de savants considérables pour la Russie d'alors, comme Lomonossof, Roumovsky, Inochodzof et d'autres. C'est elle aussi qui donna plusieurs professeurs à la seconde Université russe, celle de Moscou.

Après l'essai infructueux de Lomonossof (1758-1765) qui avait pour but de ranimer l'Université académique et de la réorganiser d'après le modèle allemand, elle commença à s'acheminer rapidement vers sa chute définitive. La cause principale venait des professeurs académiciens, qui ne voulaient pas abandonner leurs recherches scientifiques pour professer les cours de sciences, de sorte que l'enseignement fut presque entièrement aboli à l'Université et que les étudiants furent abandonnés à eux-mêmes. Par suite, leur nombre diminuait. En 1765 ils étaient 9 et en 1783 il n'en restait que 2. L'Université expira peu de temps avant le commencement du nouveau siècle.

Le progrès de l'enseignement mathématique dans les établissements d'instruction de l'ancien type consistait surtout durant le second quart du XVIII^e^ siècle, dans les améliorations particulières des programmes des cours et non pas dans le perfectionnement des méthodes. A l'Académie de marine fut introduit l'enseignement de la Trigonométrie sphérique et de l'Astronomie

sphérique, sans les joindre à la Navigation comme autrefois, mais sous la forme de sciences séparées; en outre l'enseignement de la Géodésie, de l'Artillerie et de la Fortification. Dans le Corps des cadets nobles de terre, on enseignait l'Arithmétique, la Géométrie, la Mécanique et la Fortification, et on y pratiquait les procédés de l'enseignement d'autrefois. Par exemple nous apprenons par des documents officiels que le maître de Géométrie, de Mécanique et de Fortification de ce même Corps, le capitaine-lieutenant von Dam composa un manuel de Géométrie en allemand; en l'enseignant, les maîtres le dictaient aux élèves allemands en original et aux élèves russes en traduction. Comme la plupart des professeurs du Corps étaient allemands (36 sur 42) et comme l'Académie des sciences prenait part à l'organisation de l'enseignement, il s'ensuit que les mêmes procédés se pratiquaient dans les établissements institués près l'Académie même. L'introduction de l'enseignement des mathématiques dans les écoles ecclésiastiques fut un événement dans l'histoire du développement de l'étude des mathématiques en Russie. De sorte qu'en 1743, les supérieurs de Laure de la Trinité se trouvèrent obligés d'introduire dans le séminaire, institué près d'elle, l'enseignement de l'Arithmétique, de la Géométrie et de la Trigonométrie pour les amateurs. Le professeur de ces sciences l'enseigne Jean Rasmislof, envoyé du Collège d'amirauté, y ajouta encore de son initiative la Géographie et le tracé des cartes.

Le manuel d'Algèbre par l'ingénieur capitaine-lieutenant Nicolas Mouravief fut le second essai, après Euler, dans la littérature russe des mathématiques élémentaires, qui remplaça l'ancienne méthode dogmatique par la méthode démonstrative, exigeant les démonstrations et les explications. Publié en 1752, il fut le premier manuel d'Algèbre en langue russe, sans compter bien entendu les chapitres de l'*Arithmétique* de Magnitzky traitant aussi l'Algèbre. Après ce remarquable livre furent publiés bientôt deux manuels pratiquant l'ancienne méthode dogmatique. Ces manuels étaient certes incomparablement inférieurs au manuel de Mouravief. Le premier d'entre eux, *Arithmétique universelle*, fut publié en 1757 par Nicolas Kourganof, professeur de Mathématiques et de Navigation au Corps des cadets nobles de marine, qui remplaça l'ancienne Académie de marine. L'autre manuel, *Géométrie*

pratique, en deux parties, fut publié en 1760 par l'ingénieur-enseigne Etienne Nasarof au service du Corps des cadets nobles de terre. Le premier qui contenait l'Arithmétique et l'Algèbre, bien que n'offrant pas de démonstrations des propositions et des règles, faisait quand même un faible effort pour s'approcher de la méthode démonstrative, en donnant quelquefois les explications des règles. Le second ne contenant que les définitions et les problèmes, avec les règles et les solutions, sous l'ancienne forme et avec l'ancienne ordonnance, était tout à fait fidèle à la méthode dogmatique. Pourtant, l'enseignement mathématique dans les établissements d'instruction était si peu en état d'accepter la méthode démonstrative, que le manuel de Mouravief ne s'employait pas, tandis que celui de Kourganof remplaça au Corps des cadets nobles de marine l'*Arithmétique* de Magnitzky, qui jusqu'alors s'y pratiquait exclusivement. Quant au manuel de Nasarof, il fut destiné spécialement au Corps des cadets nobles de terre.

Le développement ultérieur des établissements d'instruction en Russie, en vue de préparer les travailleurs de la science pure, se manifesta par la fondation de l'Université de Moscou le 12 janvier 1755. Les auteurs de son premier règlement, Lomonossof et Chouvalof, prêtant bien attention à tout ce qui se rattachait à l'Université académique, et profitant des circonstances de son histoire, garantirent la nouvelle université du triste sort de sa devancière ; mieux encore, ils réussirent à la rendre susceptible d'un développement ultérieur et continuel. Les moyens auxquels ils recoururent consistaient, premièrement dans la séparation radicale de l'Université et de l'Académie, par la restriction des devoirs officiels des professeurs à l'enseignement seul ; secondement, dans la division de l'enseignement universitaire en trois facultés : philosophique, juridique et médicinale ; troisièmement, et pour compléter l'Université par un nombre suffisant d'auditeurs, dans l'institution de deux gymnases près cette Université : l'un pour les nobles et l'autre pour les jeunes gens d'autres états. En 1758, à ces deux Gymnases on en a ajouté encore un troisième, fondé à Kazan. Chaque Gymnase se composait de quatre écoles : russe, latine, celle des premiers éléments des mathématiques et d'autres sciences, et celle des principales langues de l'Europe. La troisième école consacrée en partie à l'enseignement mathéma-

tique était subdivisée en cinq classes : dans la première on enseignait les quatre règles de l'Arithmétique sur les nombres entiers, abstraits et concrets ; dans la seconde, les opérations sur les fractions et l'extraction des racines carrées et cubiques ; dans la troisième, les proportions, les règles de trois, les progressions, et les logarithmes ; dans la quatrième, la Géométrie et la Trigonométrie plane ; et dans la cinquième, l'Algèbre, la Trigonométrie sphérique et la Géométrie curviligne. En outre, au Gymnase des nobles, on enseignait la Géodésie avec les exercices pratiques en Arpentage, l'Architecture civile, la Fortification et la Physique. Anitschkof, licencié de l'Université de Moscou, débutant comme maître en 1762, enseignait dans les Gymnases la Trigonométrie et l'Algèbre. Il se servait des manuels de Weidler, qu'il traduisit du latin en russe et publia en 1765 sous les titres : *Arithmétique théorique et pratique* (3 édit., en 1765, 1787 et 1795 ; *Algèbre* (2 édit., en 1765 et 1778 ; *Trigonométrie plane* (2 édit., en 1765 et 1778) ; *Géométrie théorique et pratique* (3 édit., en 1765, 1776 et 1787) ; *Architecture militaire* ou *Fortification* 1766). Ces manuels, aussi bien que ceux qui furent composés plus tard par Anitschkof lui-même [1] d'après les manuels de Weidler et d'après ceux de Wolf, non seulement employaient la méthode démonstrative, mais tâchaient même de la formuler sous le titre de : *l'Ordre de l'étude des mathématiques*. Dès lors la méthode démonstrative pouvait passer pour être définitivement affermie dans la littérature russe des mathématiques élémentaires.

Le nombre d'élèves aux Gymnases de l'Université de Moscou surpassa bientôt celui du Gymnase de l'Académie. D'après les données officielles, en 1787 ce nombre atteignit jusqu'à 1 010 et en 1803 même jusqu'à 3 300. Bien entendu, cette nouvelle Université était moins riche en étudiants. Les premières années elle en fut aussi pauvre que l'Université académique. A sa fondation en 1755 on ne comptait que 13 auditeurs libres. En 1787, elle avait 82 étudiants, et dans la période de 1800 à 1803, pas plus de 102 chaque année.

---

[1] *Arithmetique theorique et pratique* 3 éditions en 1765, 1775, 1786 et 1795) ; *Geometrie theorique et pratique* (1780) ; *Trigonometrie theorique et pratique* 2 éd. en 1780 et 1787 ; *Elements d'algèbre, ou d'arithmetique litterale* (1781) ; *Elements de fortification, ou d'architecture militaire* (1787).

Jusqu'à 1759, lorsque les Gymnases donnèrent pour la première fois quelques étudiants à l'Université, les auditeurs avaient été exclusivement les élèves des séminaires et des académies ecclésiastiques. Faute d'auditeurs et aussi de professeurs (il n'y en avait que 2 en 1755 et 5 en 1756) on ne put guère diviser l'Université en facultés qu'à partir de 1759. Pendant les deux premières années, on n'enseignait pas du tout les sciences physico-mathématiques. Au premier semestre de 1757 on n'enseignait que le cours public de Physique expérimentale professé en français par l'abbé Francosi. Au second semestre, à ce cours se joignirent : le cours de Mathématiques fait par le professeur Barssof, le cours de Géographie par le licencié Sawitsch, et les cours privés de Mécanique, de Fortification, d'Architecture civile, d'Arithmétique, de Géométrie et d'Algèbre, faits par le professeur Rost. Les mêmes sciences étaient enseignées en 1758, en y joignant, durant le second semestre, la physique théorique et expérimentale professée d'après les *Anfangsgründe der Physik* von Winkler (Leipzig, 1753 et 1755), par le professeur Kerschtens arrivé cette même année d'Allemagne. A la création de la faculté philosophique en 1759, aux cours précédents on adjoignit l'Optique, professée par le licencié Sawitsch. A partir de 1762, l'enseignement des sciences physico-mathématiques se partagea entre deux professeurs : Anitschkof, enseignant les Mathématiques pures d'après les manuels de Weidler et ensuite d'après ses propres livres, et Rost, enseignant les Mathématiques appliquées d'après les parties correspondantes du livre de Weidler[1], et la physique. Rost dépassait souvent les bornes de ce livre et enseignait à ses auditeurs la Géométrie souterraine d'après le manuel de Vogel : *Geometria subterranea*, la Géodésie, l'Artillerie, le frottement et l'Hydrotechnique. Après la mort d'Anitschkof en 1788 et de Rost en 1791, Arschenewsky enseignait les Mathéma-

[1] *Institutiones Mathescos selectis observationibus illustratae in usum academicarum*, divisées en parties suivantes : Prolegomena ; Arithmetica ; Geometria ; Trigonometria plana ; Optica proprie dicta ; Ars perspectiva ; Catoptrica ; Dioptric, trigonometria sphaerica ; Astronomia sphærica, Astronomia theorica ; Geographia generalis ; Chronologia ; Gnomonica, Mechanica, Hydrætatica, Aërometria ; Hydraulica ; Architectura civilis ; Architectura militaris ; Analysis speciosa sive Algebra ; Table des logarithmes, pour les nombres naturels, depuis l'unité jusqu'à 1200 ; Tables des sinus et tangentes et des logarithmes des sinus et des tangentes. (Editio quinta. Vitembergae, 1759, in-12, 756 p.

tiques pures. Pankewitsch les Mathématiques appliquées et Strachof la Physique expérimentale. Jusqu'à 1800, Arschenewsky enseigna les Mathématiques pures avec la même étendue que son maître Anitschkof et d'après les mêmes manuels de Weidler. Il professait son cours pendant trois années dont la première était destinée à l'exposé de l'ordre de l'étude des Mathématiques et de l'Arithmétique civile, la seconde à la Géométrie élémentaire et la troisième à la Trigonométrie plane et à l'Algèbre. A partir de 1800 il ajouta à la troisième section de son cours l'exposé des propriétés des courbes et en particulier des sections coniques, dont la considération n'entrait pas dans le livre de Weidler et dans les manuels d'Anitschkof. Pankewitsch fut le premier qui introduisit dans l'Université de Moscou l'Astronomie, qu'il enseignait, de même que les autres sciences de sa chaire, suivant l'exemple de son maître Rost d'après le livre de Weidler. Plus tard il utilisa plusieurs auteurs modernes et même introduisit dans son enseignement les *calculs supérieurs*, c'est-a-dire l'analyse infinitésimale, qui ne se trouvait pas dans le livre de Weidler et qui ne fut pas enseignée à l'Université de Moscou. Suivant son exemple, Arschenewsky enseigna, à partir de l'année 1805 et peut être encore plus tôt, la Géométrie supérieure d'après le manuel de Burja et d'autres meilleurs auteurs modernes. Dans les leçons consacrées à cette science, il montrait l'utilité et l'emploi du calcul différentiel. Pankewitsch professait tous les cours de sa chaire durant trois années : la première, il enseignait la Mécanique, l'Hydraulique et l'Aérométrie, avec l'explication de la construction des machines ; la seconde année, l'Optique, la Perspective, la Catoptique et la Dioptrique ; la troisième année, la Trigonométrie sphérique, l'Astronomie sphérique et théorique, la Géographie mathématique et la Navigation. Le professeur Strachof depuis le commencement de son enseignement de Physique expérimentale enseignait d'après l'ouvrage de Brisson *Traité élémentaire ou principes de physique* (3 volumes), qu'il traduisit en russe et publia ensuite (1801-1802).

La première tentative pour répandre les lumières dans le peuple, faite par Pierre I^er^ sous la forme des écoles des chiffres, qui ont été mentionnées, n'eut pas de succès. La seconde tentative ayant le même but, mais encore plus sérieuse eut lieu pen-

dant le règne de Catherine II. D'après son initiative et sa collaboration on ouvrit dans la période de 1781 à 1786, dans deux capitales et dans 24 chef-lieux de gouvernements, des écoles publiques principales, et dans plusieurs villes des districts de petites écoles publiques. Les premières se composaient de quatre classes, les secondes de deux, qui ne se distinguaient des deux classes inférieures des écoles publiques principales que par l'absence de l'enseignement des langues étrangères. L'enseignement de l'Arithmétique commençait dans la seconde classe, où on enseignait la numération et les quatre règles d'Arithmétique, sur les nombres entiers, abstraits et concrets. Dans les deux classes supérieures on enseignait les opérations sur les fractions ordinaires et décimales, l'extraction des racines carrées et cubiques; les rapports et les proportions; les règles de trois; la règle de société; les questions relatives aux alliages et les règles de fausse position. Dans la troisième classe on commençait l'étude de la Géographie politique par le chapitre de la Géographie mathématique, traitant des points et des cercles sur le globe. Dans la quatrième classe, où les élèves devaient rester deux ans, outre l'Arithmétique et la continuation de la Géographie mathématique on enseignait la Géométrie, la Mécanique, la Physique et l'Architecture. La commission de l'institution des écoles publiait les manuels particuliers pour chaque science, en partie traduits de l'allemand, en partie composés par les savants russes. La méthode employée dans ces manuels représente la forme transitoire entre la méthode dogmatique et la méthode démonstrative.

Dans le *Manuel de l'Arithmétique*, on ne trouve point les démonstrations, mais on rencontre quelquefois des éclaircissements courts. Dans le *Petit Manuel de Géométrie*, divisé en trois sections (sur la mesure des longueurs; sur la mesure des aires; sur la mesure des solides), sont annoncés et démontrés 16 théorèmes; le reste est composé de définitions et de problèmes pour la plupart pratiques et exposés dogmatiquement. Les élèves, guidés par le maître et aidés par ses éclaircissements, apprenaient pendant la leçon les paragraphes du manuel dans leur ordre successif. En 1786, en vue de préparer les maîtres des écoles publiques, on institua le Gymnase des maîtres, qui était réorganisé en 1804, en Institut pédagogique. Parmi les élèves

de la première sortie, se trouvait le mathématicien Ossipofsky, fameux pour son temps en Russie et qui, en qualité de professeur de l'Université de Kharkow, fut le maître d'Ostrogradsky.

Le système isolé des écoles publiques fut réorganisé par le statut de 1804, qui les lia étroitement à l'Université et aux écoles préparatoires, c'est-à-dire aux Gymnases. D'après ce statut, les petites écoles publiques se tranformèrent en écoles paroissiales et les écoles publiques principales en celles des gouvernements, c'est-à-dire en Gymnases. La position intermédiaire entre ces deux formes d'écoles, fut prise par l'école de district, récemment instituée par le nouveau statut. L'école paroissiale préparait les élèves pour l'école de district; celle de district préparait ses élèves au Gymnase et le Gymnase à l'Université. En outre, pour ceux qui ne voulaient pas pousser plus loin leur instruction, chacune de ces écoles devait donner un ensemble déterminé de connaissances conforme au degré qu'elle occupait. Les écoles de district étaient formées de deux classes. Dans la première, on enseignait l'Arithmétique avec l'étendue du cours de la seconde classe des petites écoles publiques d'autrefois; dans la seconde, les autres parties de l'Arithmétique, les règles élémentaires de la Géométrie et l'abrégé de Physique. Les gymnases étaient formés de quatre classes. Dans les deux classes inférieures on enseignait l'Algèbre, la Géométrie et la Trigonométrie plane; dans les seconde et troisième classes, la Mécanique, l'Hydraulique et la Physique expérimentale. Il survenait, quoique bien rarement, des modifications dans ce programme. Ainsi, en 1811-1816, au Gymnase de Saint-Pétersbourg, on enseignait : dans la première classe, l'Arithmétique et l'Algèbre jusqu'aux équations du troisième degré ; dans la seconde classe, la Géométrie et la Trigonométrie plane ; dans la troisième classe, l'application de l'Algèbre à la Géométrie et les sections coniques ; dans la quatrième classe, les applications pratiques de Géométrie et de Trigonométrie à la Physique. Chaque école avait le devoir de préparer des maîtres pour l'école inférieure, qui la précédait dans le système scolaire. Les Universités, à l'aide des instituts pédagogiques établis près l'Université, devaient préparer les professeurs universitaires et les maîtres des Gymnases. A Saint-Pétersbourg, faute d'Université, ces fonctions étaient transmises

à l'Institut pédagogique Gymnase des maîtres d'autrefois. Comme il devait représenter, du moins pendant les premiers temps de l'existence du nouveau système des écoles, l'unique institution destinée à préparer les maîtres des Gymnases, on y prêtait une attention particulière à l'organisation de l'enseignement. On y enseignait les mêmes sciences qu'aux Gymnases, mais avec une étendue beaucoup plus large. On recommandait de professer les cours de Mathématiques pures, d'après « le Cours de Mathématiques », par Ossipofsky, contenant dans son premier volume, l'Arithmétique et l'Algèbre, et dans le second, la Géométrie, la Trigonométrie plane et sphérique et l'introduction à la Géométrie curviligne. La section de ce livre, consacrée à l'Algèbre, outre les articles ordinaires, renfermait les propriétés et la résolution numérique des équations de degrés supérieurs, les équations indéterminées du second degré et des degrés supérieurs; la sommation des séries et les développements en séries. L'introduction à la Géométrie curviligne renfermait les sections coniques, la cissoïde de Dioclès, la spirale d'Archimède, la quadatrice de Dinostrate, la cycloïde et la théorie des développées des courbes. Pour l'enseignement des Mathématiques appliquées, on recommandait le cours de Kästner, en le complétant par les additions empruntées aux cours de Wolff, Zollinger, Metzbourg et d'autres. En Physique, on proposait d'étudier d'après les notes composées par le maître. Le manque de manuels en langue russe, qu'on a remarqué déjà pendant l'organisation de l'enseignement supérieur, était le côté faible du nouveau système des écoles. Pour l'enseignement de l'Arithmétique, de la Géométrie et de la Géographie mathématique dans les écoles de district, on utilisait les manuels composés pour les écoles publiques d'autrefois. On les réimprimait durant trente ans sans presque les changer. Pourtant, dans les nouveaux Gymnases, on ne pouvait se contenter des manuels composés pour les Gymnases d'autrefois que pour quelque temps, tandis que les nouveaux manuels se composaient avec une lenteur extrême. Parmi les manuels consacrés aux sciences physico-mathématiques, le premier parut en 1807-1808. C'était une traduction considérablement augmentée du livre de Schrader « Grundriss der Experimental-Naturlehre », dont la première partie renfermait

la Statique, la Mécanique, l'Hydrostatique et l'Hydraulique, et la seconde, la Physique. Ensuite, parurent « les Eléments des mathématiques pures », par Nicolas Fuss, académicien et membre de l'Administration principale des écoles. Ils se subdivisaient en trois parties, dont la première renfermait « les éléments d'Algèbre, extraits des fondements de cette science établis par le célèbre Euler », la seconde « les éléments de Géométrie » et la troisième, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, la Trigonométrie plane, les sections coniques et les éléments du Calcul différentiel et intégral. La méthode d'exposition dans cet ouvrage est strictement démonstrative. Malgré l'anéantissement définitif de la méthode dogmatique dans l'enseignement mathématique secondaire, les procédés engendrés par elle demeuraient obstinément, même dans l'institut pédagogique, comme cela résulte de son nouveau règlement, publié en 1816, et qui défendait la dictée des leçons. Mais dans les Gymnases, l'Administration devait lutter encore plus contre ce mal et néanmoins sans succès. De même la lutte du ministère de l'instruction publique contre l'habitude d'apprendre par cœur les manuels, n'atteignit pas son but. Cette habitude demeurait, même après l'introduction de la méthode démonstrative dans les écoles russes.

La liaison établie entre les Universités et tout le système étendu des écoles primaires et secondaires fut la cause de la fondation de nouvelles Universités à Kazan et Kharkov, en 1805, et à Saint-Petersbourg, en 1819; elle entraîna aussi quelques modifications dans les règlements des Universités fondées antérieurement à Moscou, à Vilna et à Dorpat. La faculté philosophique d'autrefois fut divisée en deux facultés : celle des sciences physiques et mathématiques et celle des belles-lettres. En perfectionnant en général l'enseignement des sciences physico-mathématiques, cette division l'élargissait considérablement. A trois chaires d'autrefois, celles de Mathématiques pures, de Mathématiques appliquées et de Physique, était ajoutée la chaire d'Astronomie. L'analyse infinitésimale, dont l'enseignement dans l'Université de Moscou, avant 1805, ne faisait l'objet que de premières tentatives, encore bien limitées, occupa tout de suite sa place convenable. Son enseignement dans l'Université de Moscou fut partagé entre deux professeurs. Idé, appelé de Gottingue, enseignait

les éléments du Calcul différentiel et ses applications à la Géométrie supérieure ; Arschenevski, le Calcul différentiel et intégral et ses applications analytiques et géométriques. A l'Université de Kazan, le professeur de Mathématiques pures, Bartels, ami de Gauss, éleva l'enseignement du Calcul infinitésimal à la même hauteur qu'il occupait dans les universités allemandes. Le cours de Calcul infinitésimal du professeur Ossipofsky, à l'Université de Kharkov, se distingua aussi par son grand mérite et son ampleur. Pour préparer les maîtres du Gymnase et les professeurs universitaires conformément au nouveau statut des écoles, on fonda des instituts pédagogiques près les Universités, où devaient entrer les étudiants, qui se destinaient à la profession pédagogique. Cependant cette institution n'était pas adaptée aux conditions naturelles qu'elle devait remplir et par conséquent elle ne put avoir de succès. C'est pourquoi l'Institut pédagogique de Saint-Pétersbourg prit la première place, et en 1816, sous le nom d'Institut pédagogique principal, reçut une nouvelle organisation. La confusion précédente de l'enseignement des diverses sciences dut céder la place à la division en trois sections. Les sciences physico-mathématiques furent enseignées dans la seconde section ; de même qu'à l'Université, elles furent représentées par quatre chaires, celles de Mathématiques pures et en particulier d'Analyse supérieure ; de Mathématiques appliquées, principalement dans les parties théoriques ; d'Astronomie et de Physique. Plusieurs des savants étrangers invités en nombre considérable pour occuper les chaires dans les universités nouvelles, de même que pour compléter le personnel de l'Université de Moscou, signalèrent le penchant des Russes pour les travaux des sciences mathématiques. Ainsi, le professeur Bartels, après avoir quitté l'Université de Kazan, pour entrer à celle de Dorpat, se souvenait avec regret de la perte des élèves pleins de talent, qu'il avait à Kazan. Et le professeur Rommel, qui était directeur de l'Institut pédagogique près l'Université de Kharkov, disait que « en général, parmi les Russes, se manifestait partout le penchant prédominant pour les objets d'application pratique, et surtout pour les Mathématiques, où ils faisaient des progrès étonnants ; quant à l'organe de l'entendement de la haute philosophie et de la philologie, ils semblaient n'en point avoir ».

Les tendances civilisatrices de l'époque d'Alexandre Ier exercèrent leur influence sur les établissements ecclésiastiques, qui furent aussi réformés en 1809. En même temps, l'enseignement des sciences mathématiques y prit pour la première fois une situation solide et bien déterminée. Conformément au règlement des écoles laïques, les écoles ecclésiastiques se divisaient en quatre catégories : les écoles paroissiales ecclésiastiques, celles de district, celles de diocèse ou les séminaires, et les académies. Dans l'école paroissiale ecclésiastique, subdivisée en deux classes, on enseignait les quatre règles d'Arithmétique, sur les nombres entiers. Dans l'école de district, subdivisée en quatre classes, on enseignait les autres parties du cours secondaire de l'Arithmétique. Dans les séminaires, formés de quatre classes, on enseignait l'Algèbre élémentaire, la Géométrie élémentaire, les éléments de Mécanique, la Géographie mathématique et le comput. Dans les Académies ecclésiastiques, d'après le premier plan, on devait enseigner « les parties supérieures des Mathématiques pures, et aussi des mathématiques appliquées » ; mais le manque de connaissances mathématiques chez les élèves des séminaires, révélé par l'expérience, fit introduire dans les académies la répétition de l'enseignement des Mathématiques élémentaires, qui faisaient l'objet du cours des séminaires. Ainsi, dans le cours des sciences physico-mathématiques des Académies entraient : l'Arithmétique, l'Algèbre élémentaire, la Géométrie élémentaire, la Géométrie supérieure, les éléments du Calcul différentiel et intégral avec ses applications à la Géométrie, les éléments de la Mécanique des corps solides et fluides, l'Optique, l'Astronomie sphérique et théorique, la Mécanique céleste et la Mécanique générale. Ce cours étendu des sciences mathématiques n'était pourtant pas obligatoire pour tous les étudiants de l'Académie. Ils pouvaient choisir à leur volonté les sciences mathématiques ou historiques. En 1844, cette liberté du choix fut supprimée et les étudiants durent étudier aussi bien les sciences mathématiques que les sciences historiques. En vertu de la disposition de la même loi, le cours de sciences mathématiques fut borné seulement aux Mathématiques élémentaires. Enfin, d'après le règlement de 1869, les sciences physico-mathématiques furent entièrement exclues des cours des académies ecclésiastiques. Les

manuels d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie, composés par plusieurs professeurs des Académies, pour les écoles et les séminaires ecclésiastiques, se servaient sans exception de la méthode démonstrative. Pourtant cela n'empêcha pas la vieille méthode de rester en vigueur, d'apprendre les manuels par cœur bien longtemps dans les écoles ecclésiastiques.

Le système fondé en 1804 par le statut des écoles du Ministère de l'instruction publique, exista jusqu'en 1828. D'après le statut, nouvellement publié, les écoles paroissiales et celles de district ne préparaient plus leurs élèves aux Gymnases; elles furent destinées exclusivement à la propagation de l'instruction primaire. Aux Gymnases furent ajoutées trois classes inférieures. Avec ces changements, le nouveau statut élargit les bornes de l'enseignement mathématique des Gymnases, en y introduisant les éléments de la Géométrie descriptive, l'application de l'Algèbre à la Géométrie et les sections coniques. Les modifications du plan d'instruction des gymnases qui eurent lieu plus tard, ne conservèrent pas ces accroissements de l'enseignement mathématique, de sorte qu'il dut rentrer dans les bornes d'autrefois.

Quant aux changements qui se produisirent de temps en temps dans les règlements des universités, il faut remarquer qu'ils ne touchaient que légèrement l'enseignement mathématique. Ils lui permirent de se développer indépendamment, mais pas toujours en conformité suffisante avec les progrès de la science elle-même. On n'attenta qu'une seule fois à l'indépendance de l'enseignement mathématique dans les universités russes, au cours de toute son histoire; ce fut justement pendant la seconde moitié du règne d'Alexandre I^er^; certains mystiques qui s'étaient emparés du Ministère de l'instruction publique firent cette tentative. Leur activité obscure s'est manifestée de la manière la plus grave dans la persécution contre l'Université de Kazan, qu'ils mirent à deux doigts d'une destruction complète; c'est à la même influence qu'il faut attribuer la démission du mathématicien Ossipofsky, l'un des meilleurs professeurs de l'Université de Kharkov.

V.-V. Bobynin (Moscou).

SUR UN PARADOXE
DE NOTRE NUMÉRATION PARLÉE

NOTE ETHNOGRAPHIQUE ET LINGUISTIQUE

« En arithmétique, dans l'ancien français, les trois nombres 70, 80, 90 s'exprimaient *septante*, *octante*, *nonante* ; c'était logique, raisonnable, et absolument conforme aux principes fondamentaux de la numération décimale. Il m'a été jusqu'ici impossible de découvrir sous quelles influences, à quelle époque précise s'est introduit l'emploi insensé des appellations aujourd'hui en usage : *soixante-dix*, *quatre-vingts*, *quatre-vingt-dix* : mais ce que je peux bien dire, c'est que ce fut un grand pas en arrière. » Voy. l'*Enseignement mathématique* du 15 janvier 1899, article de C.-A. Laisant sur les questions de Terminologie, p. 23 et 24.

Système vigintésimal. — Quand on oppose le néologisme à l'archaïsme on se place à un point de vue de chronologie toute relative, comme le font les géologues à propos de l'âge des roches. Septante, octante et nonante sont archaïques par rapport à nous ; mais ils correspondent à une réforme et par conséquent à une innovation antérieure. La Farce de Patelin, au temps de Charles VIII, nous fait connaître à satiété que *six-vingts* est la vraie expression de 120, attendu que la confusion entre les *six*-vingts moutons et les *six* aunes de drap souligne à chaque instant le caractère de l'unité semi-concrète, 20, et le caractère tout à fait abstrait du coefficient, 6.

Un peu plus tôt, sous Louis IX, nous voyons que l'hôpital fondé pour 300 aveugles, porte le nom de « quinze-vingts », nom qu'il a conservé officiellement et qu'il gardera toujours. Ces deux faits permettent de penser que l'on disait également, pour les nombres intermédiaires *sept-vingts*, *huit-vingts*... etc .. Une

enquête directe justifie ce soupçon, au moins pour les nombres 140 et 160, et jette un certain jour sur 80 = quatre vingtaines.

Quoique les auteurs spéciaux fassent venir le mot « quintal » de l'arabe *quintâr* signifiant un poids de 100 livres ou kilogr.', il y a lieu de rapprocher quintal des mots *quintalis* et *quintus*, finalement de *quinque*, et par conséquent de cinq-vingts. — Nous y reviendrons tout à l'heure.

Système quinqual. — La seule inspection des chiffres romains I, II, III, IIII, V, a porté certains savants à supposer que ces chiffres sont la représentation schématique des quatre doigts et de la main. Dans ce cas les chiffres VI, VII... etc... signifiaient : main et un doigt de l'autre main = 6 ; main et deux doigts de l'autre main = 7... etc... jusqu'à ce qu'on arrive à dire : deux mains = 10 = X. Car le signe X n'est plus dès lors que l'association symétrique des deux V.

Si nous n'avions aucun document supplémentaire, cette conception resterait à l'état de théorie ingénieuse et l'ingéniosité n'est pas un critère. C'est une autofécondation qui aboutit à la stérilité !

Mais il n'en est pas ainsi : car nous savons positivement que tous les mots indo-européens qui signifient *cinq*, sont, quoique plus ou moins déformés par l'altération phonétique, très proches parents du grec πεντε et du zend pendji, de l'aria pentcha = « Main ». Tout le monde sait d'ailleurs ce que c'est que le *Pendjab* indien et peut s'assurer *de visu* de l'aspect caractéristique de ce fleuve. D'autre part les renseignements nombreux que nous possédons aujourd'hui sur les idiomes non aryens, nous amènent encore plus nettement au système pentadactyle envisagé comme base du décimal, et en passant par la phase intermédiaire fort curieuse du vigintésimal. — Voici quelques exemples :

Les tribus habitant le cours inférieur du Murray n'ont que les deux mots *ryup* et *politi*, un et deux, pour aller jusqu'à dix. Pour cinq ils disent *ryup murnangin* ou une main ; et pour dix *politi murnangin*. (Beveridge. *Trans. of the royal Soc. of Victoria*, vol. VI, p. 151.)

Le prix d'un bœuf, chez les Dammaras, est généralement de dix rouleaux de tabac. A chaque marché, le vendeur se met à

plat ventre, étend ses larges mains par terre et l'acheteur lui met un rouleau de tabac sur chaque doigt. (Galton. *Tropical South africa*, p. 132.)

Les indiens Zamuca et Muysca traduisent *cinq* par une locution = « main finie » : *six* par « un de l'autre main » ; *dix* par « deux mains finies » ; *onze* par « pied-un » ; *douze* par « pied-deux » ; *quinze* par « un pied fini », et *vingt* par « les deux pieds finis ». (Humboldt. *Personal researches*, vol. II, p. 117.)

Ce qui est le plus remarquable, c'est que, pour abréger, ces indiens nomment le pied et sous-entendent par là que l'œuvre des mains est épuisée, de sorte que « quicha » = pied, est synonyme de l'autre expression « mains finies ». Enfin, au lieu de « les deux pieds finis » il disent : *un homme !*

Or ce système se retrouve aussi chez les Esquimaux, chez les Jaruroes, chez les indigènes de la Guyane, chez les Caraïbes... etc... bien que les structures lexicogéniques et les grammaires diffèrent absolument d'un peuple à l'autre. Il s'agit là, à n'en pas douter, d'une méthode intuitive, antérieure aux origines mêmes du langage formel ; d'un système que l'on pourrait appeler « hominal, bimane et bipède » !

Système décimal proprement dit. — Le paradoxe rappelé par M. Laisant nous conduirait à examiner les expressions singulières de *dix-sept*, *dix-huit* et *dix-neuf*. — Voici pourquoi.

Les enfants de l'école primaire s'amusent, ou du moins s'amusaient jadis, à faire dire aux nouveaux (en manière de *colle* : « dix-un, dix-deux, dix-trois... dix-six, dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt. »

Si mes vieux souvenirs ne me trompent pas, je me rappelle avoir guetté plus d'une fois sur le visage des petits paysans naïfs une légère surprise au moment où ils arrivaient sans s'y attendre, à 17, 18 et 19. On les voyait alors recommencer la série et s'efforcer de comprendre la raison en vertu de laquelle cette série de termes *faux* (au début) passait brusquement à des termes *justes* et *authentiques...* ?

Un jour (que l'on me pardonne ce petit bout de biographie vaniteuse) j'eus la fantaisie de présider la brimade et de prononcer un grand discours de dix minutes, pour expliquer aux

conscrits que désormais notre maître d'école avait renoncé aux vieilles routines, et que l'on compterait ainsi : un, deux, trois, quatre... huit, neuf, *unante* ; unante-un, unante-deux, unante-trois... unante-huit, unante-neuf, *duante* ; duante-un, duante-deux... *triante*... *quarante*... *septante*, *octante*, *nonante* et (attention !) VXANTANTE. Qui saura jamais tout ce qui se passe dans la cervelle d'un gamin ? — Essayons-le, cependant. J'avais étudié un peu de latin chez le vicaire du pays, et je savais par exemple que le mot *ante* signifiait « auparavant », ou, pour être plus correct, que AVANT dérive de *ab ante*. De là une étymologie fantastique des mots « septante et cinq-ante », c'est-à-dire : « Sept avant... cinq avant tel chiffre exprimant les unités. » Or la psychologie puérile est simplificatrice. L'enfant dira spontanément : « j'allerai » pour j'irai » ; « que nous pouvions » pour « que nous puissions », « il a viendu » pour « il est venu » etc... Pourquoi, en somme, ne pas dire : unante, duante, triante, quadrante... etc... ? Ce serait juste, puisque nivelé ; ce serait équitable, puisque pesé dans la même balance, avec les mêmes poids. — On cherche laborieusement la nature de nos facultés généralisatrices, on a bien tort ; car la généralisation est innée, comme la ligne de moindre résistance. C'est en se compliquant et en s'artificialisant que notre intelligence crée les lois d'exception, en grammaire et ailleurs. Prenons maintenant le problème à revers, en assimilant les mots *dix-sept*, *dix-huit*, *dix-neuf*, à ceux qui les précèdent.

Il en résultera que la série des 20 premiers nombres se partagera en deux moitiés analogues :

(Un, deux, trois...., six, sept, huit, neuf, dix :
(Onze, douze, treize... seize, septaze, octise, nonuze, vingt.

N'épiloguons pas sur les vocables de *septaze*, *octise* et *nonuze*. Le fond doit sauver la forme. Je dis donc que, dans ce système, vingt-un + douze = vingt-treize ; nonuze + octise = vingt-septaze ; vingt-septaze + trois = deux-vingt.

On ne dira point septante sept, ni surtout soixante-dix-sept ; mais bien trois vingt-septaze. On ne dira point nonante-neuf, ni même quatre-vingt-dix-neuf, mais quatre vingt nonuze !

RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS. — L'illustre Ampère avait écrit, il y a

longtemps, que le système vigintésimal avait dû naître de la considération simultanée des dix doigts des mains et des dix doigts des pieds. — Ampère n'était ni ethnographe ni linguiste : Il a donc omis de nous parler des sauvages et de leurs idiomes ; il a même commis le barbarisme « vigintésimal »... Mais il était dans le vrai. Nous n'avons donc à répéter aujourd'hui que ceci : *Le système vicésimal est effectivement né de la considération universellement humaine de la pentadactylie de nos quatre membres subdivisés en mains et pieds.*

D'après cette théorie objective, 1, 2, 3, 4, sont donnés en abaissant successivement les doigts de la main gauche ; 5 = la main gauche fermée ; 6, 7, 8, 9, sont les doigts rabattus de la main droite ; 10 = les deux mains épuisées. — Onze, douze, treize et quartorze correspondent aux doigts du pied gauche ; quinze = tout le pied gauche. — Seize, septaze, octize et nonuze correspondent aux doigts du pied droit ; vingt = les deux pieds finis et par conséquent l'homme complet, puisque les mains ont terminé leur jeu. — Vingt = un homme. Pour reprendre textuellement la question posée par M. Laisant, je pense que notre numération parlée actuelle est hybride ou métisse, et que le retour à soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix est en effet un *retour* atavistique, un pas en arrière, un coup de reversion... en un mot, un phénomène analogue à celui que les éleveurs observent quelquefois dans les races provenant d'un croisement. Mais j'ajoute que cette rétrogradation a été amorcée par la conservation (beaucoup plus archaïque encore) des mots : onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize.

L'émancipation des termes 17, 18 et 19, aurait dû entraîner celle de 11, 12, 13, 14, 15 et 16. Mais cela n'a pas eu lieu ; et voilà pourquoi soixante-onze, soixante-douze... etc... n'ont révolté personne.

Cela ne veut pas dire néanmoins que l'épuration définitive ne s'opérera jamais : Je n'ose pas certes lancer ma petite terminologie de bambin en recommandant l'emploi de « Unante » et « Duante ». Mais, alors, je propose ironiquement aux pédagogues ancestraux d'uniformiser à rebours notre nomenclature, au moyen des grotesques noms de *septaze*, *octise* et *nonuze*.

Prof. R. Baron (Paris).

LA NOTATION DIFFÉRENTIELLE
ET L'ENSEIGNEMENT

Dans un article très intéressant de M. H. Laurent [1] sur les mathématiques spéciales en France, je lis la phrase suivante. « Ce n'est pas, je pense, ici qu'il convient de montrer combien la notation différentielle est plus commode que celle des dérivées ; c'est aux gens compétents que je m'adresse et non à des élèves, et je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle. »

Je ne dirai pas que j'ai lu cette phrase avec étonnement : car elle exprime une opinion assez répandue ; mais, en ce qui me concerne, je conteste absolument les avantages de la notation différentielle et je crois qu'on ne doit l'enseigner aux débutants que quand ils sont déjà familiarisés avec la notation des dérivées.

La notation de Leibniz, dit M. Laurent, est plus commode que celle de Lagrange. Pourquoi plus commode ? J'en cherche les raisons et je n'en trouve que deux :

1° Si on emploie les accents pour représenter les dérivées, on sera privé de cette ressource pour distinguer les unes des autres des quantités analogues, mais différentes ; on ne pourra plus dire, par exemple : soient x, y, z, et x', y', z', deux points dans l'espace ;

2° Pour faire connaître la variable par rapport à laquelle on différentie, il faut affecter les lettres d'indices qui peuvent devenir gênants pour le typographe si la lettre porte déjà d'autres indices pour une autre cause.

Ce sont là des inconvénients tout matériels, tout extérieurs et qui peuvent être compensés par des avantages de même ordre, tel que le suivant :

---

[1] Voir *l'Enseignement mathématique*, n° 1, p. 38.

Je veux représenter la valeur que prend la dérivée de $f'x$ pour $x = 0$; je n'ai aucun moyen de le faire avec la notation de Leibniz ; avec celle de Lagrange je n'ai qu'à écrire $f'(0)$.

Mais, dira-t-on, c'est là prendre la question par le petit côté. Que sont ces considérations purement matérielles auprès de la haute portée philosophique d'une notation qui rappelle à chaque instant la définition, le sens profond des quantités que l'on a à manier ?

Hélas, elle ne les rappelle que trop, et il vaudrait mieux les rappeler moins que de les rappeler imparfaitement. Neuf fois sur dix, on n'évitera les erreurs qu'en tâchant d'oublier la signification primitive de ces symboles ; c'est ce que je vais montrer bientôt.

Quant à moi, j'emploie d'ordinaire la notation différentielle, d'abord parce que c'est la langue que parlent la plupart de mes contemporains et ensuite à cause des petites raisons matérielles que j'ai exposées plus haut. Mais si j'écris en différentielles, le plus souvent je pense en dérivées.

J'ai dit que la notation différentielle est imparfaite et nous expose à l'erreur ; c'est ce qu'il me reste à démontrer.

Tout va bien quand on se borne aux différentielles du premier ordre et quand il n'y a qu'une variable indépendante. Oh alors, j'approuve sans réserve tout ce qu'on peut dire au sujet de la portée philosophique du symbole leibnizien et de ses avantages.

Mais, dès que l'on passe aux dérivées du second ordre, on nage dans l'absurdité ; soit z une fonction d'une variable y qui est elle-même fonction de x ; j'écris :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dy^2}\,\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dans cette formule j'écris deux fois d^2z, et ce symbole a deux significations différentes. Dans le second membre, il signifie que si je donne à y deux accroissements successifs *égaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2z$. Dans le premier, il signifie que si je donne à x deux accroissements successifs égaux, d'où résultent pour y deux accroissements successifs *inégaux*, la fonction z subit deux accroissements successifs dz et $dz + d^2z$.

La difficulté s'aggrave si on a plusieurs variables indépendantes; j'écris :

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy.$$

Là encore nous avons trois fois le symbole dz avec trois significations différentes. La première fois dz représente l'accroissement subi par z quand x et y se changent en $x + dx$ et $y + dy$; la seconde fois l'accroissement de z quand x et y se changent en $x + dx$ et y; la troisième fois l'accroissement de z quand x et y se changent en x et $y + dy$.

Que de pièges à éviter! Aussi les débutants ne les évitent-ils pas. J'ai vu un élève intelligent et déjà avancé exposer comme il suit la théorie de la vitesse du son, en masquant seulement par quelques artifices ce que sa démonstration avait de choquant.

Nous avons à intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\,\frac{d^2z}{dx^2};$$

je divise par d^2z et je multiplie par dx^2 : j'ai

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a^2,$$

d'où :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a,$$

ce qui prouve que le son peut se propager dans les deux sens avec la vitesse a.

« C'est singulier, répondait l'examinateur, excellent physicien que je ne veux pas nommer; votre démonstration est bien plus simple que toutes celles que je connaissais » : et il lui donna la note 19.

Si je voulais être méchant, il ne serait pas difficile de trouver des erreurs analogues dans des livres imprimés.

L'emploi des ∂ ronds est un palliatif insuffisant. Ce n'est pas deux formes de d qu'il faudrait, il en faudrait cinq, il en faudrait dix.

Pourquoi en somme est-on plus choqué de ces anomalies, pourquoi engendrent-elles relativement plus d'erreurs? C'est parce qu'on oublie l'origine de ces notations, qu'on ne considère

pas $\frac{d^2z}{dx^2}$ comme le quotient de deux quantités d^2z et dx^2 envisagées séparément, mais qu'on regarde au contraire cette fraction comme un *bloc*, comme la dérivée seconde de z par rapport à x. C'est en un mot *parce qu'on pense en dérivées*.

Il faut donc apprendre à penser en dérivées : quand on aura pris cette habitude on pourra sans danger se servir de la notation leibnizienne. Il est clair que le meilleur moyen de donner cette habitude aux élèves, c'est de leur enseigner d'abord la notation de Lagrange. Quand ils seront familiarisés avec ce langage, quand ils s'en seront servis dans de nombreux exercices, quand ils sauront faire un changement de variables, on pourra sans inconvénient leur parler de la notation de Leibniz. Jusque-là on doit s'en abstenir, ou tout au moins se borner *aux différentielles du premier ordre et seulement dans le cas où il n'y a qu'une variable indépendante*.

Si au contraire dès le début on veut leur apprendre à faire des changements de variables avec la notation de Leibniz, ils ne sauront jamais les faire correctement.

Je ne veux pas dire qu'il ne faut pas, *plus tard*, leur enseigner la notation différentielle : il faut qu'ils puissent manier ce langage qui est usité par tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand, bien que cette langue ait des règles de construction ridicules et un alphabet qui n'a pas de sens commun, parce qu'elle est parlée par soixante millions d'hommes dont beaucoup sont des savants.

Il est un cas cependant où la notation différentielle reprend tous ses avantages, où ses inconvénients disparaissent, et où l'on ne peut lui refuser une haute valeur philosophique et éducative. C'est celui où l'on n'envisage que des différentielles du premier ordre et avec une seule variable indépendante. Il peut être utile de se familiariser de bonne heure avec cette notion, d'apprendre ainsi à raisonner correctement sur les infiniment petits. On comprendra ainsi facilement la théorie des petites erreurs, si importante pour la pratique.

En résumé, en mathématiques spéciales, on doit employer presque exclusivement la notation de Lagrange ; on fera connaître aux élèves les différentielles premières, en insistant surtout sur le cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Si on aborde

le cas où il y en a plusieurs, on se servira exclusivement de la notation de Lagrange pour les dérivées partielles; on n'écrira jamais :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

mais

$$df = f'_x dx + f'_y dy.$$

On s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes.

A l'Ecole polytechnique et dans les Facultés, on enseignera la notation différentielle et on l'emploiera de préférence.

H. Poincaré (Paris).

L'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES EN FRANCE

CONCOURS DE 1898 ET PROGRAMME DE 1899

Le concours d'agrégation des sciences mathématiques en France est de la plus haute importance. Il décide de la carrière des professeurs, et ceux qui ne parviennent pas à obtenir le titre d'agrégé se voient condamnés à tout jamais.

Ce concours se passe d'habitude à Paris vers le mois de juillet. Il comprend des épreuves multiples, écrites et orales, et le nombre des places est généralement faible; il y en a eu huit en 1898. A la suite des compositions écrites, 19 candidats avaient été admissibles; les 8 agrégés nommés se répartissent ainsi : les 5 premiers et le 7^e sont des élèves de l'École normale supérieure; le 6^e est un étudiant libre de la faculté des sciences de Paris, et le 8^e est un professeur de collège.

Nous croyons intéressant, non seulement pour les candidats futurs, mais pour toutes les personnes qui s'intéressent à l'enseignement en général, de donner ici quelques renseignements sur les épreuves de 1898 et le programme pour 1899.

Afin de ne pas allonger cet exposé déjà étendu par lui-même, et de lui conserver rigoureusement son caractère documentaire, nous ne l'accompagnerons d'aucune réflexion, d'aucune remarque critique, quant à présent du moins. Si plus tard cette question de l'agrégation tente quelqu'un de nos collaborateurs, et qu'il désire en faire une étude approfondie, les renseignements que nous donnons ici seront pour lui d'une réelle utilité.

Les premières épreuves écrites sont au nombre de quatre : mathématiques élémentaires, mathématiques spéciales, mécanique rationnelle, composition sur l'analyse et ses applications géométriques. Sept heures sont accordées pour chacune d'elles; elles ont eu lieu, en 1898, les 1er, 2, 3, 4 juillet, de 7 heures du matin à 2 heures du soir.

Voici quels furent les sujets :

Mathématiques élémentaires. — On considère un triangle T, dont les sommets sont A, B, C, et une droite Δ dans son plan. On prend les symétriques d'un point O quelconque de la droite Δ par rapport aux côtés du triangle T, et on construit le centre O′ du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les trois points ainsi obtenus :

I. — Trouver le lieu du point O′ lorsque le point O décrit la droite Δ. Ce lieu est une conique S dont on discutera le genre en faisant varier la position de la droite Δ par rapport au triangle T. On indiquera également les positions de Δ pour lesquelles S lui est tangente ;

II. — Trouver le lieu du centre de la conique S lorsque la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même :

III. — Trouver le lieu du centre de S lorsqu'on fait varier la direction de Δ ;

IV. — Démontrer que pour tout point I de S, on peut mener trois droites OO′, et faire voir que deux de ces droites sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites qui joignent le point I aux points de rencontre de Δ et de S ;

V. — Dans le cas particulier où la droite Δ passe par le centre ω d'un cercle inscrit au triangle T, on propose de trouver l'enveloppe de la droite OO′. Démontrer que, dans ce cas, les centres des trois autres cercles inscrits au triangle T et les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet ayant pour côtés Δ et les côtés de T sont six points placés sur une même conique.

Mathématiques spéciales. — Au système des deux points M, M′,

dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement (x, y, z) x', y', z', on en fait correspondre un troisième P de coordonnées (X, Y, Z par les formules

$$X = xx'. \qquad Y = yy'. \qquad Z = zz'.$$

1° On suppose que les points M, M' décrivent une même droite Δ issue d'un point A a, b, c et ayant pour cosinus directeurs α, β, γ.

On demande quels lieux décrit le point P quand M et M' décrivent la droite Δ indépendamment l'un de l'autre, ou bien quand, l'un des points décrivant la droite Δ, l'autre reste fixe sur cette droite, ou bien, enfin, quand les deux points décrivent Δ, mais en restant confondus. Dire quelles relations existent entre ces divers lieux.

2° On suppose maintenant que les points M, M décrivent non plus une même droite, mais une même conique Ω, les coordonnées d'un point courant de cette conique Ω étant des fonctions rationnelles d'un paramètre λ.

$$x = \frac{a_2\lambda^2 + 2a_1\lambda + a_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}, \qquad y = \frac{b_2\lambda^2 + 2b_1\lambda + b_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0},$$

$$z = \frac{c_2\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_0}{d_2\lambda^2 + 2d_1\lambda + d_0}$$

où les a, b, c, d sont des coefficients constants.

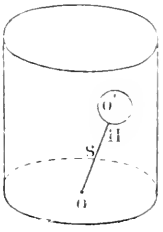
Lorsque M et M' décrivent Ω indépendamment l'un de l'autre, le point P décrit une surface S; ses coordonnées sont des fonctions rationnelles du second degré de deux paramètres convenablement choisis. Dire quel lieu décrit le point P sur la surface S quand, M' restant fixe sur la conique Ω, le point M décrit seul cette conique. Dire ensuite quel lieu décrit le point P quand M et M' décrivent Ω, mais en restant liés par une relation homographique involutive. Quelles conclusions peut-on retirer du résultat relativement aux coniques situées sur la surface S?

3° Quelle est la nature de la correspondance qui relie les points M et M' sur la conique Ω, quand le point P décrit une section plane de la surface S? Étudier et interpréter les cas de décomposition.

Mécanique rationnelle. — Un vase cylindrique, circulaire, droit, repose par le fond sur une table horizontale fixe. Le centre O de ce fond est lui-même fixe, de sorte que le vase ne peut que tourner autour de la verticale du point O; on suppose d'ailleurs que ce mouvement de rotation a lieu sans frottement.

A l'intérieur du vase se trouve une tige OH, homogène et

pesante, d'épaisseur constante infiniment petite, dont une extrémité est immobile au centre O, tandis qu'à l'autre extrémité H est fixée d'une manière invariable une sphère, aussi homogène et pesante, ayant son centre O sur l'axe de la tige et s'appuyant contre la paroi interne du vase. Le corps solide S, constitué par la tige et la sphère, peut se mouvoir librement autour du point fixe O : mais on suppose que des frottements se développent au contact de ce corps avec la paroi interne du vase. On négligera les frottements de pivotement et de roulement, pour ne tenir compte que du frottement de glissement, dont le coefficient sera f.



A l'instant initial $t = 0$, le solide S est immobile et le vase est animé d'une vitesse de rotation ω_0, autour de la verticale ascendante du point O : trouver les mouvements du vase et du solide.

On désignera par R le rayon intérieur du vase, et par γ son moment d'inertie par rapport à son axe. On représentera par m la masse de la tige OH et par M celle de la sphère. On appellera $2a$ la longueur OO' que l'on supposera supérieure à R, et ρ le rayon O'H de la sphère.

1° On trouvera d'abord les mouvements absolus du vase et du solide S dans le cas particulier où le rayon ρ de la sphère est nul ;

2° On les obtiendra ensuite dans le cas général où ρ a une valeur quelconque moindre que R ;

3° On discutera enfin le pivotement et le roulement du solide S sur le vase, et on écrira en particulier la condition nécessaire et suffisante pour que le roulement s'effectue constamment dans le même sens pendant toute la durée du mouvement. Négligeant ensuite la masse m de la tige et supposant invariable le rayon intérieur R du vase, on résumera la discussion précédente en la basant sur la valeur du rayon ρ de la sphère.

Composition sur l'analyse et ses applications géométriques. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0$$

où a désigne une constante, et $F(z)$ une fonction déterminée de z.

1° Former le système des équations différentielles des caractéristiques ;

2° Trouver une intégrale de ce système d'équations différentielles ;

3° Au moyen de cette intégrale, former une intégrale complète de l'équation proposée ;

4° Dire à quoi doit se réduire la fonction F z pour que les caractéristiques soient des lignes asymptotiques sur les surfaces intégrales.

Les épreuves orales consistent en deux leçons faites devant le jury. Nous donnons ici les sujets des leçons faites par les candidats en 1898 (1).

Mathématiques élémentaires. — 1. — Principe de la théorie des engrenages cylindriques. — Exemples simples.

2. — Enoncé du principe général des forces vives, application aux machines. — Volants.

3. — Cartes géographiques.

4. — Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. Réciproque. — Rapport harmonique de quatre points sur une conique. — Applications.

5. — Equilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité.

6. — Composition des vitesses, applications géométriques et mécaniques.

7. — Systèmes articulés, appareils de Peaucellier et de Hart. Parallélogramme de Watt.

8. — Calcul de π.

9. — Résoudre et discuter : — 1° l'équation $P+\sqrt{Q}=0$, où P est un polynôme du premier degré et Q un polynôme du second degré; l'équation $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=a$ où P et Q sont des polynômes du premier degré et a une constante. — Exemples tirés de la géométrie.

10. — Balances. — Balance ordinaire, balance romaine, balance de Roberval.

11. — Transformation par rayons vecteurs et réciproques. — Applications.

12. — Théorie des couples. — Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.

13. — Polygones réguliers, convexes et concaves.

14. — Polygones funiculaires. — Déterminer trois graphiques des tensions. — Applications.

15. — Involution sur une droite, faisceaux en involution. — Involution sur un conique. — Applications.

(1) Ces divers documents sont extraits des feuilles autographiées publiées par la librairie Croville-Morant.

16. — Propriétés générales des polyèdres convexes. — Théorème d'Euler. — Applications.

17. — Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit sur terre, soit sur mer.

18. — Extraction de la racine carrée à moins d'une unité ; à moins de $\frac{1}{n}$. — Indiquer quelques méthodes abrégées.

Mathématiques spéciales. — 1. — Invariants de la forme biquadratique. — Applications.

2. — Représentation d'un quadrique sur un plan. — Applications.

3. — Degré et classe d'une courbe plane. Points doubles et tangentes doubles. — Points de rebroussement et points d'inflexion. — Genre. — Exemples.

4. — Définition de la fonction eulérienne $\Gamma(z)$ par un produit infini de facteurs complexes ; principales propriétés de cette fonction. Montrer que si z prend une valeur réelle et positive a, cette fonction coïncide avec l'intégrale eulérienne de cette espèce : $\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$.

5. — Séries de Taylor et de Mac-Laurin, dans le cas d'une variable réelle. — Applications.

6. — Invariants d'une forme quadratique. — Invariants simultanés d'une forme quadratique et d'une forme linéaire dans le cas de trois ou de quatre variables. — Interprétations géométriques.

7. — Fonctions symétriques rationnelles des racines d'une équation algébrique. — Applications.

8. — Transformation d'une équation algébrique $f(x) = 0$ dans le cas où chaque racine y de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle d'une ou deux racines de l'équation donnée. — Exemples.

9. — Règles élémentaires permettant de reconnaître la convergence et la divergence d'une série à termes positifs : règles de Gauss et de Duhamel. — Exemples.

10. — Invariants et covariants d'une ou deux formes binaires. — Applications simples.

11. — Invariants d'une forme quadratique ; invariants simultanés d'une forme quadratique et d'une forme linéaire dans le cas de trois ou quatre variables. — Interprétations géométriques.

12. — Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. — Applications.

13. — Représentation d'une quadrique sur un plan. — Applications.

14. — Invariants de la forme biquadratique. — Applications.

15. — Application des invariants simultanés de deux formes quadratiques à la démonstration des principales propriétés métriques des cônes ou des courbes planes du second degré.

16. — Soient $f(x) = 0$ une équation algébrique irréductible, dans un domaine de rationalité et $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-1}$ les racines de cette équation ; étudier l'équation qui admet pour racines $\varphi(\alpha_0)$, $\varphi(\alpha_1) \ldots \varphi(\alpha_{n-1})$, où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle dans le même domaine.

17. — Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. — Applications.

18. — Principales propriétés des fonctions définies par une série ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable réelle ; dérivée ; intégrale. — Exemples.

Deux compositions finales complètent ces épreuves. En voici les textes :

Calcul. — Etant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère les deux ellipsoïdes qui ont pour équations :

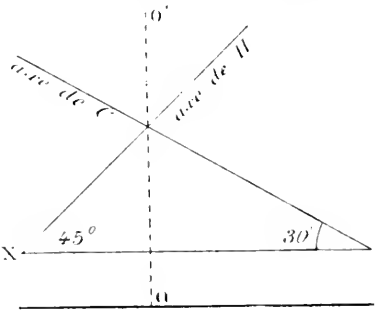
$$ax^2 + by^2 + Z^2 = 9$$
$$ax^2 + by^2 + 2Z^2 = 13,$$

a et b désignant deux nombres positifs ; soit S la portion du solide commun aux deux corps qui se trouve d'un côté du plan des xy :

1° Trouver, en fonction de a et de b, l'expression du volume du solide S ;

2° En supposant $a = 2$, $b = 3$, calculer ce volume à un dix-millième près par défaut ;

3° Le corps S étant supposé homogène, calculer à un centième près, par défaut, le Z de son centre de gravité.



Epure. — Intersection d'un hyperboloïde à une nappe et d'un cylindre de révolution.

L'axe de révolution de l'hyperboloïde II est une droite de front dont la projection verticale est inclinée de 45° sur la ligne de terre xy de gauche à droite et de bas en haut.

Le centre de l'hyperboloïde est un point situé à une distance de 10 c/m de chacun des plans de projection.

Le contour apparent de cette surface sur le plan horizontal est une hyperbole équilatère dont l'axe transverse a une longueur totale de 8 c/m.

Par le cercle de gorge de H on fait passer une sphère S, dont le centre a une cote de 8 c/m, et à cette sphère on circonscrit un cylindre de révolution C, dont les génératrices sont des droites de front inclinées à 30° sur la ligne de terre de gauche à droite et de haut en bas. — Trouver l'intersection de ce cylindre C et de l'hyperboloïde H.

Représenter le solide commun aux deux corps, en supposant enlevée la portion de ce solide située au-dessus du parallèle le plus à gauche de C dont le plan soit tangent à S.

Pour le concours de 1899, nous reproduisons ici le programme des questions d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites.

Analyse. — 1° Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre : systèmes complets.

2° Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes $f(x, y, z, p, q) = 0$: méthode de Lagrange et de Charpit ; méthode des caractéristiques. — Applications géométriques.

Nota. — On pourra admettre les théorèmes généraux de Cauchy sur l'existence des intégrales.

Mécanique. — Dynamique du corps solide. — Percussions.

Nota. — On ne tiendra pas compte du frottement.

Les sujets de leçons du concours de 1899 sont indiqués à l'avance comme il suit :

Mathématiques élémentaires. — 1. — Supposant les principes de la théorie des nombres premiers, établir la formule qui fait connaître combien il y a de nombres inférieurs à un nombre donné et premiers avec lui. — Théorème de Fermat. — Généralisation de ce théorème. — Théorème de Wilson.

2. — Extraction de la racine carrée à moins d'une unité ; à moins de $\frac{1}{n}$. Indiquer quelques méthodes abrégées.

3. — Polygones réguliers, convexes ou concaves.

4. — Calcul de π.

5. — Transformation par rayons vecteurs réciproques. — Applications.

6. — Cercles orthogonaux dans le plan et sur la sphère.

7. — Figures homothétiques dans l'espace. — Centre d'homothétie. — Axe d'homothétie. — Plan d'homothétie. — Application à un système de quatre sphères.

8. — Démontrer que toute conique peut être considérée comme le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. — Réciproque. — Rapport anharmonique de quatre points sur une conique. — Applications. (Ouvrages à consulter : Chasles, *Traité des coniques* ; Rouché et de Comberousse, *Traité de géométrie*.)

9. — Involution sur une droite. — Faisceaux en involution. — Involution sur une conique. — Applications.

10. — Propriétés générales des polyèdres convexes. — Théorème d'Euler. — Applications.

11. — Résoudre et discuter : 1° l'équation $P+\sqrt{Q}=0$, où P est un polynôme du premier degré et Q un polynôme du second degré ; 2° l'équation $\sqrt{P}+\sqrt{Q}=a$, où P et Q sont des polynômes du premier degré et a une constante. — Exemples tirés de la géométrie.

12. — Vitesse. — Étude de la vitesse dans quelques mouvements. — Représentations graphiques.

13. — Composition des vitesses. — Applications géométriques et mécaniques.

14. — Théorie des couples. — Réduction à une force et à un couple d'un système de forces appliquées à un corps solide. — Conditions d'équilibre.

15. — Équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné dépoli, en supposant le corps soumis à l'action d'une force passant par son centre de gravité.

16. — Balances. — Balance ordinaire, balance romaine, balance de Roberval.

17. — Systèmes articulés. — Appareils de Peaucellier et de Hart. — Parallélogramme de Watt.

18. — Principe de la théorie des engrenages cylindriques. — Exemples simples.

19. — Énoncé du principe général des forces vives. — Application aux machines. — Volants.

20. — Définition et détermination de la latitude et de la longitude d'un lieu, soit sur terre, soit sur mer.

21. — Cartes géographiques.

22 — Polygones funiculaires. — Détermination graphique des tensions. — Applications.

Programme des matières d'où seront tirés les sujets des leçons mathématiques spéciales. — Convergence et divergence des séries. Règles élémentaires permettant de reconnaître la con-

vergence ou la divergence d'une série. Règles de Gauss et de Duhamel. Séries à termes alternativement positifs et négatifs, séries à termes imaginaires. Convergence absolue. Principales propriétés de séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable complexe. Convergence uniforme. La variable étant supposée réelle, étudier la dérivée, l'intégrale de la série. Applications. Séries de Taylor et de Marc-Laurin dans le cas d'une variable réelle; applications.

Produits infinis de facteurs réels ou complexes. Convergence et divergence. Définition de $\sin z$ par un produit infini de facteurs complexes; montrer que si z est réel, cette fonction coïncide avec la fonction considérée en trigonométrie. — Définition de $\sigma(z, \omega, \omega')$ par un produit infini de facteurs complexes. — Définition des fonctions $\zeta(z)$ et $\mu(z)$. Changements produits sur ces fonctions par l'addition à l'argument z des périodes 2ω et $2\omega'$. Cas de dégénérescence.

Propriétés générales des équations algébriques. Nombre des racines. Relations entre les coefficients et les racines. Calcul des fonctions symétriques des racines. Applications. Élimination d'une inconnue entre deux équations algébriques entières et rationnelles.

Transformation d'une équation algébrique $f(x) = 0$ dans le cas où chaque racine y de l'équation cherchée doit être une fonction rationnelle φ d'une ou de deux racines de l'équation donnée. Exemples. Soit $y = \varphi(x)$ l'équation qui définit la transformation. On suppose que les coefficients des fonctions f et φ appartiennent à un certain domaine de rationalité dans lequel $f(x)$ est irréductible, et on désigne par $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines de l'équation $f(x) = 0$. Si les quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont distinctes, elles sont racines d'une équation irréductible de degré n. Toute fonction rationnelle d'une racine α_0 dans le domaine considéré s'exprime rationnellement au moyen de $\varphi(\alpha_0)$. Cas où plusieurs des quantités $\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_{n-1})$ sont égales. Si les racines d'une équation irréductible s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles, elles s'expriment rationnellement au moyen de l'une quelconque de ces racines.

Étant donnée, dans un certain domaine de rationalité, une équation $f(x) = 0$, on peut former, dans le même domaine, une équation irréductible $F(y) = 0$, telle que toutes les racines de $f(x) = 0$ soient des fonctions rationnelles de l'une quelconque des racines de $F(y) = 0$. Exemples.

Définitions des invariants et des covariants d'une ou de deux formes binaires. Application aux formes des trois premiers degrés. Interprétation géométrique. Application à la résolution de l'équation du troisième degré. Invariants de la forme biquadratique.

Rapport anharmonique de quatre quantités. Équation du sixième degré qui donne les six valeurs du rapport anharmonique : 1° des racines de l'équation du quatrième degré : 2° des racines de l'équation du troisième degré et d'un nombre donné x. Signification des invariants de la forme biquadratique. Relation fondamentale entre les covariants de la forme cubique.

Courbes planes. Ordre, classe : points doubles, points de rebroussement; tangentes doubles, tangentes d'inflexion. Genre. Formules de Plücker pour une courbe ne possédant que les singularités simples de l'espèce ci-dessus. Exemples choisis dans les courbes du troisième et du quatrième ordre.

Génération des cubiques planes au moyen de faisceaux homographiques de droites et de coniques. Génération analogue des quartiques planes au moyen de faisceaux homographiques de coniques.

Formes quadratiques à trois ou quatre variables. Formes adjointes. Équations ponctuelles et équations tangentielles des coniques et des quadriques. Réduction simultanée de deux formes quadratiques à trois variables x, y, z, à des sommes de trois ou d'un nombre moindre de carrés. Triangle conjugué commun à deux coniques. Invariants simultanés de deux formes quadratiques à trois variables. Triangle inscrit ou circonscrit à une première conique et conjugué à une seconde conique. Triangle inscrit dans une conique et circonscrit à une autre. Application aux propriétés projectives et métriques. Propriétés analogues des cônes du second degré.

Expression des coordonnés d'un point d'une quadrique au moyen des deux paramètres λ, μ, correspondant aux deux systèmes de génératrices rectilignes ou imaginaires. Représentation de la surface sur un plan. Cas particulier de la projection stéréographique. Intersection de deux quadriques quand cette intersection se décompose.

LE CHOIX DES SUJETS DE COMPOSITION

Il y a bien des années déjà, vers 1875, Catalan publiait dans sa *Nouvelle Correspondance mathématique* des observations souvent assez vives sur certains points de l'enseignement des mathématiques élémentaires en Belgique. Je crois qu'il a rendu ainsi un véritable service à l'enseignement qu'il critiquait, et que beau-

coup de professeurs ou d'examinateurs ont dû tirer un bon parti de ses remarques. Lorsqu'il s'agit surtout d'examens ou de concours publics, on ne saurait apporter un soin trop attentif au choix des questions proposées, et à la rédaction de ces questions quand elles sont proposées comme sujet d'un examen écrit. La clarté la plus absolue est une première condition qui s'impose; mais ce n'est pas la seule. Dans certains examens surtout, il est quelquefois difficile de choisir des sujets dont la solution soit de nature à fournir de sérieux renseignements sur l'instruction et l'intelligence du candidat, et cela sans excéder les limites du programme, sans donner à la question une apparence de rébus, et sans qu'elle soit de nature à faire croire que la science mathématique ne peut servir à rien, sinon à tracasser les candidats en les faisant échouer à leurs examens.

Plus il s'agit d'épreuves modestes, et plus il faut dépenser de travail et de réflexion dans le choix des sujets. C'est ce dont on ne semble pas encore se rendre suffisamment compte en France (et peut-être bien ailleurs) en ce qui concerne certains examens.

Le hasard vient de me faire tomber sous les yeux le texte d'une composition d'arithmétique proposée à Paris, à la session d'octobre 1898 (le 24 octobre pour être précis), pour le brevet supérieur des jeunes filles. Le voici :

Une somme a été divisée en trois parties telles qu'elles rapporteraient le même intérêt si elles étaient placées la première à 7 0/0 pendant cinq mois, la deuxième à 4 1/2 p. 0/0 pendant six mois, et la troisième à 5 p. 0/0 pendant trois mois. On sait que si la première partie était comptée en monnaie d'or, la deuxième partie en monnaie d'argent et la troisième partie en monnaie de cuivre, le poids total de la monnaie serait 34,169 kil. 15.

On demande quelle est cette somme?

Ce sujet, à mon humble avis, provoque quelques observations. Tout d'abord, n'appartient-il pas plutôt à l'algèbre élémentaire qu'à l'arithmétique? Le problème se réduit immédiatement à un système d'équation de la forme $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $lx + my + nz = p$. On peut répondre qu'il y a toujours moyen de résoudre des équations linéaires, surtout aussi simples, en parlant le langage arith-

métique, c'est-à-dire en remplaçant les équations par des phrases. Rien n'est plus vrai. Mais est-il vraiment bien judicieux de compliquer ainsi les choses simples et de créer artificiellement des difficultés là où il n'y en a pas, en obligeant à écrire une page où il faudrait une ligne.

En second lieu, l'essence même de ce problème est-elle de nature à faire comprendre à des jeunes filles, futures institutrices ou futures mères de familles, la haute utilité de la science du calcul dans ses applications à la vie réelle ? En se donnant la peine de consulter le premier actuaire ou le premier commis de banque venu, on trouverait mille sujets d'arithmétique commerciale ayant un intérêt plus direct. Il est fort rare qu'on ait à calculer le montant d'une somme au moyen de son poids global en monnaies de plusieurs sortes. Et les jeunes filles qui se trouveraient en présence d'une question dont elles saisiraient l'utilité possible, comprendraient qu'il est bon de travailler, non pas seulement pour passer des examens, mais pour l'avenir. Autrement il arrivera que neuf sur dix, parmi celles qui auront eu la chance de réussir, tout heureuses d'avoir en main leur diplôme, jetteront avec dégoût dans un coin leurs livres et leurs cahiers d'arithmétique, en se jurant bien de ne plus jamais les ouvrir. Si c'est comme cela qu'on s'imagine élever et étendre l'instruction des femmes, j'ai idée qu'on se trompe.

Parlons un peu maintenant de la rédaction. Sur un point, je dois le reconnaître, cet énoncé m'a instruit en me révélant l'existence de la *monnaie de cuivre*, qui m'était totalement inconnue. Malheureusement, on n'a pas donné le poids du franc dans cette monnaie, ou, ce qui revient au même, la valeur d'un kilogramme de monnaie de cuivre. Et le cours du cuivre étant des plus variables (d'autant plus que la spéculation s'en mêle), je suis obligé de constater que jamais pour mon compte je n'aurais pu résoudre un tel problème, à moins de remplacer les mots « monnaie de cuivre » par « monnaie de billon ». C'est peut-être ce que les auteurs de cette étrange question ont voulu dire, mais c'est ce qu'ils n'ont pas dit.

Il m'a été affirmé que l'exemple que je viens de citer n'était pas unique ; mais c'est le seul qui me soit tombé sous les yeux, et je ne veux pas critiquer ce que j'ignore.

Plus tard, je reviendrai s'il le faut sur ce sujet : mais j'aimerais mieux ne pas y être contraint. Il y a dans l'enseignement primaire et dans l'enseignement primaire supérieur, à Paris surtout, des hommes d'une très grande valeur. Il leur suffira d'être avisés pour exercer une surveillance un peu plus attentive et pour empêcher qu'on retombe dans d'aussi déplorables errements.

Les observations qui précèdent ont, du reste, une portée bien supérieure à la cause particulière qui les a provoquées. A tous les degrés de l'enseignement et dans tous les pays, depuis l'école primaire jusqu'à l'agrégation, le choix d'un sujet de composition est toujours chose grave et délicate ; *jamais* celui qui en a la responsabilité ne devrait s'acquitter de cette tâche à la légère ; jamais non plus il ne devrait s'en rapporter à lui seul, et le premier de ses soucis devrait être de solliciter un contrôle nécessaire, sans lequel on sera toujours exposé à des bévues désastreuses et irréparables.

C.-A. Laisant.

SUR L'EMPLOI
DES SIGNES EN GÉOMÉTRIE

1. Un grand progrès a été réalisé dans l'enseignement de l'Algèbre en France par le fait que la première leçon d'Algèbre concerne les nombres directifs, ou, si l'on veut, les nombres positifs et négatifs : un grand progrès sera réalisé dans l'enseignement de la Géométrie lorsque l'emploi des segments, des angles algébriques, des aires et des volumes algébriques sera adopté systématiquement, au lieu d'être présenté comme un complément réservé aux meilleurs élèves. Seulement, il faudrait faire deux choses : commencer tôt, et commencer par le commencement. Commencer tôt : dans un cours d'Algèbre destiné aux élèves des classes de lettres, M. A. Grévy débute par les nombres directifs ; quelle raison y a-t-il de ne pas faire de même en

Géométrie? Commencer par le commencement : c'est-à-dire apprendre aux débutants la Géométrie des segments sur une droite, cette Géométrie linéaire qu'ils ne savent jamais bien, parce qu'ils ne l'ont pas apprise à temps, et leur donner par exemple la notion importante de barycentre pour deux points A et B, la formule d'Euler pour quatre points en ligne droite, la formule de Stewart qu'ils n'auront plus qu'à généraliser, etc. ; leur apprendre ensuite la Géométrie des droites qui passent par un point dans un plan, la Géométrie plani-conique, en donnant des signes aux angles : on oriente le plan, on fait observer qu'un angle directif a un côté origine, un côté extrémité, et, distinguant deux cas selon que les droites α et β sont dirigées ou non, on écrit

$$(\alpha, \beta) = 0 + k.\ 1^d,$$

ou

$$(\alpha, \beta) = 0 + k.\ 2^d;$$

on peut alors, par exemple, énoncer correctement la réciproque du théorème des angles opposés par le sommet, sans allonger l'énoncé par des phrases lourdes que la notion d'angle directif remplace avec avantage.

Mais, dira-t-on, les élèves n'ont pas encore fait d'Algèbre ! C'est une raison aussi sérieuse que celle qui empêche de définir les lignes trigonométriques dans le courant du 3^e livre de Géométrie, comme il serait si utile de le faire. On définira les nombres directifs, leur addition et leur multiplication, dans un chapitre préliminaire : on établira la formule de Chasles $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ et il en résultera pour l'Algèbre une démonstration excellente du fait que dans un polynome on peut intervertir l'ordre des termes ; etc.

2. Dans un opuscule ayant pour titre *Géométrie dirigée*, édité par la librairie Nony, j'ai proposé d'appeler *transformée* d'une droite dirigée α une droite dirigée β telle que l'angle (α, β) soit égal à $+ 1^d$; il est en effet ridicule de dire que deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires sont *égaux ou supplémentaires :* quelle géométrie peut sortir de là? Cette même notion permet encore de définir le signe de la distance d'un point à une droite dirigée, dans un plan orienté ; ce signe peut être rattaché à l'idée

de moment, en considérant une force qui agit suivant la droite, dans le sens positif. On voit alors que le lieu des points équidistants de deux droites est ce qu'on peut appeler la pseudo-bissectrice.

3. Dans un triangle on dirige les trois côtés ; les pseudo-bissectrices sont concourantes, et voilà deux théorèmes réunis en un seul. Dans un polygone, on dirigera volontiers les côtés dans les sens AB, BC, CD, ..., LA, de manière à considérer les angles extérieurs dans le cas d'un polygone convexe.

4. J'ose dire que le théorème du segment capable est une honte pour l'enseignement de la Géométrie. Si l'on désigne par AB ou par BA indifféremment la droite dirigée qui porte les points A et B, on doit dire : *Etant donnés deux points fixes* A *et* B, *le lieu des points* M *pour lesquels on a*

$$(\mathrm{MA}, \mathrm{MB}) = \alpha + k\,2^d,$$

les droites MA *et* MB *étant dirigées à volonté, est une circonférence entière et une seule ;* ici, comme partout, le plan est orienté, l'angle a un côté origine et un côté extrémité. On peut alors, pour prendre un exemple simple, montrer que le lieu des points de concours des hauteurs des triangles MAB est une circonférence, donnée par la relation

$$(\mathrm{HB}, \mathrm{HA}) = \alpha + k.\,2^d.$$

Pour quatre points A, B, C, D sur une circonférence, on a toujours

$$(\mathrm{DA}, \mathrm{DB}) = (\mathrm{CA}, \mathrm{CB}) + k.\,2^d,$$

que le contour ADBC soit convexe ou non ; cela permet par exemple de démontrer correctement le théorème de Simson, *en prenant un point* M *du plan,* et en écrivant la condition nécessaire et suffisante pour que ce point fasse partie du lieu cherché.

5. Un cercle dirigé est un cycle. Un triangle dont les côtés sont dirigés a un cycle inscrit et un seul, dont le centre est au point de rencontre des pseudo-bissectrices : cela permet de débrouiller des questions que la notion de cercle inscrit et de

cercles ex-inscrits rend fort confuses, lorsque la figure varie, comme dans les lieux géométriques. Quand un contour quadrangulaire ABCD, convexe ou concave, est circonscrit à un cycle, on a, en dirigeant les tangentes d'après le sens du cycle,

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0.$$

6. Les aires algébriques intéressent les élèves. L'aire algébrique $\overline{OACB}$ du rectangle OACB, le point A étant sur $x'x$, le point B sur $y'y$, donne le meilleur exemple pour la multiplication des nombres directifs. Il est contraire à toute logique de définir l'aire d'un trapèze de seconde espèce comme l'on fait d'ordinaire, sans expliquer la définition, et en la légitimant par le résultat auquel elle conduit. Cela est surtout frappant pour le tronc de pyramide de seconde espèce, où la surface latérale est une différence, tandis que le volume est une somme. Il faut définir l'aire déterminée par un contour polygonal absolument quelconque, en écrivant :

$$\overline{ABCD\ldots L} = \overline{OAB} + \overline{OBC} + \overline{OCD} + \ldots + \overline{OLA},$$

et en démontrant que la position du point O est indifférente ; on se sert pour cela de la formule en question, vérifiée pour le cas du triangle. Pour un triangle, en dirigeant les côtés à volonté, et en posant $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$,

$$a + b + c = 2p.$$

$2p$ étant le périmètre algébrique, on a toujours $S = pr$, S étant $\overline{ABC}$, r étant la distance du centre du cycle inscrit à l'une quelconque des droites dirigées qui portent les côtés.

7. Dans le 3e livre, l'essentiel est de donner pour deux triangles qui ont leurs côtés parallèles la formule algébrique (ou directive)

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} ;$$

avec cela et la formule de Chasles, un élève peut se tirer d'affaire. On énonce, et l'on démontre d'un seul coup, la formule

$$\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{BC}.\,\overline{BH}.$$

Pour le théorème des sécantes dans le cercle, on a

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD},$$

et, comme le théorème est énoncé complètement, la réciproque est vraie ; même observation pour les théorèmes de Ménélaüs et de Jean de Ceva, etc. ; tandis que, en employant des longueurs au lieu de segments, il faut dire en de longues phrases (que l'on supprime trop souvent) que des points en nombre pair ou impair sont sur les prolongements, etc. Sans aller si loin, on énonce incomplètement le théorème de Thalès, et l'on énonce souvent la réciproque comme si les côtés du triangle n'étaient jamais prolongés.

Le problème du partage d'une droite AB en moyenne et extrême raison, avec des longueurs au lieu de segments, donne lieu à une remarque absurde sur l'impossibilité d'une solution au delà du point B, attendu que cette remarque ne serait pas valable si l'on demandait d'avoir par exemple

$$\overline{CA}^2 = 5\,CB \times AB,$$

chacun des deux problèmes exprimés par les relations

$$\overline{CA}^2 = 5\,\overline{CB} \times \overline{AB}, \qquad \overline{CA}^2 = -5\,CB \times \overline{AB},$$

ayant deux solutions ; on confond deux problèmes distincts, et il est fort heureux (pour l'enseignement de la géométrie des longueurs) que le problème

$$\overline{CA}^2 = -\overline{CB} \times \overline{AB}$$

n'ait pas de solution.

J'observe en passant que la règle de Descartes, relative à la manière de diriger des droites parallèles, est absolue : pour l'homothétie inverse, par exemple, il faut se conformer à cette règle, bien que l'on soit tenté de faire le contraire, si l'on veut avoir pour deux segments homothétiques $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = k$, k étant le rapport d'homothétie ; pour des aires, on a $\frac{S'}{S} = k^2$, en tenant compte d'un fait géométrique.

8. En ce qui concerne les choses de l'espace, je me conten-

terai de renvoyer à l'ouvrage cité, où j'ai montré que, avec des définitions convenables, la distance d'un point à un plan est égale et de signe contraire à la distance du plan au point; la règle générale de tels changements, pour un espace analytique à $n-1$ dimensions, a été donnée en 1892 dans un ouvrage ayant pour titre : *l'Hyperespace*. On devrait tout au moins, pour les trièdres, considérer les dièdres extérieurs, et dire, à propos des trièdres réciproques, que les rectilignes des dièdres extérieurs de l'un sont *égaux* aux faces de l'autre ; en Trigonométrie sphérique, il y a également avantage à employer les dièdres extérieurs. (A propos de dièdres, j'observe en passant qu'on ne doit pas définir l'égalité de deux dièdres par superposition, à cause du glissement possible, mais par l'égalité des rectilignes.)

9. Les mots *abscisse, argument, azimut,* devraient être employés couramment. En cinématique, dans l'enseignement le plus modeste, on devrait dire : l'abscisse x, et la date t, le déplacement $x'-x$, et l'intervalle de temps $t'-t$, et parler peu de l'espace parcouru, que les formules ne connaissent guère ; on devrait écrire, au début de la Physique,

$$\begin{cases} v - v_0 = \gamma\,(t - t_0), \\ x - x_0 = v_0\,(t - t_0) + \dfrac{\gamma}{2}\,(t - t_0)^2, \\ v^2 - v_0^2 = 2\gamma\,(x - x_0), \end{cases}$$

ce qui rend les problèmes faciles. En optique, on devrait prendre un sens positif unique, seul moyen de bien faire les problèmes sur les systèmes centrés ; la formule des lentilles, déduite par soustraction de la formule des dioptres, n'a rien à voir avec la formule des miroirs, et l'on a tort en mathématiques élémentaires de les rendre semblables ; on doit appeler R l'abscisse du centre, etc.

10. L'interprétation des racines négatives dans les problèmes, souvent utile ou même obligatoire, devrait en beaucoup de cas être remplacée par une mise en équation générale, avec *données* et *inconnues* directives. Combien d'élèves, en Mathématiques élémentaires, savent démontrer d'un seul coup l'équation de la ligne droite

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

à propos du problème classique de l'intersection de deux droites ? Ils examinent quelques cas, et se trompent généralement en marquant a comme une longueur sur la figure lorsque a est négatif ; on les amène à écrire $-a$, et ils croient souvent alors que $-a$ est négatif : ils trébuchent à chaque pas, parce qu'on ne les a pas exercés en Géométrie pure. On a énoncé correctement le problème des courriers ; en parlant de périmètres algébriques, d'aires et de volumes algébriques, on améliorerait beaucoup d'autres énoncés, et l'on ne verrait plus cette chose abominable : l'énoncé d'un problème fabriqué après la solution ; le problème qui consiste à inscrire à un rectangle donné un rectangle semblable à un rectangle donné est massacré si l'on ne tient pas compte du sens de rotation. Le cas douteux des triangles résulte d'un énoncé mal fait : le calcul du troisième côté le montre nettement ; c'est bien assez que la condition de réalité des racines empêche le problème d'être toujours possible, et il ne faut pas qu'une condition de signes soit imposée à la géométrie qui accepte fort bien le négatif.

Il ne faut d'ailleurs pas être excessif. On doit faire des problèmes avec des données et des inconnues segmentaires, et en faire aussi avec des longueurs, ne fût-ce que pour donner aux élèves le sens physique qu'ils ont en général si peu. Les problèmes d'attraction par exemple s'accommodent fort mal des signes $+$ et $-$, et on doit le dire. Même en géométrie, il est souvent difficile de faire un énoncé correct, auquel s'appliquent bien les signes $+$ et $-$; l'interprétation ordinaire des solutions négatives, et l'introduction après coup de données négatives, sont alors un moyen inférieur auquel on se résigne faute de mieux. Mais il est puéril, à propos d'un problème sur des robinets qui débitent de l'eau, d'interpréter les racines négatives par le moyen que l'on sait : comme le dit fort bien M. Bourget, qu'est-ce qu'un problème voisin d'un autre ? J'ajoute que, au lieu de dire que l'on change x en $-x$, on peut dire : j'appelle x' le module de x, et je mets $-x'$ où il y avait x ; s'il s'agit de Géométrie, x' est une longueur de la figure, et l'équation en x est construite avec l'inconnue $-x'$ désignée par x ; on trouve :

$$x = -\alpha, \text{ ou } -x' = -\alpha, \text{ et l'on a } x' = \alpha.$$

11. Une conséquence fatale de l'usage des longueurs au lieu de segments, et en général de l'usage des valeurs absolues, c'est que, quand on est amené à parler de grandeurs directives mesurées par des nombres directifs, d'une part les élèves ont de la peine à comprendre, d'autre part ils sont indifférents à des faits qu'ils ont toujours vu négliger par leurs maîtres. En Trigonométrie, à propos de la définition des lignes complémentaires, on leur démontre que, si un arc AM commence en A et finit en M, le sens positif étant de A vers B, son complément est un arc BM commençant en B et finissant en M, le sens positif étant de B vers A : je ne crois pas que l'ensemble d'une classe comprenne de quoi il s'agit, faute d'habitude de cet ordre d'idées, et le nombre est petit de ceux qui trouvent la chose intéressante. On définit $\sec x$ d'une manière peu naturelle, au lieu d'écrire

$$\sec x = \frac{\overline{OT}}{\overline{OM}},$$

et cela tient surtout à ce que l'on fait ordinairement $R = 1$, ce qui est au moins inutile, et conduit à dire *lignes* trigonométriques au lieu de *nombres* ou fonctions trigonométriques ; c'est pour la même raison que, souvent, on démontre en plusieurs fois la formule

$$\text{proj. } AB = AB \cos \alpha,$$

au lieu de la déduire en une seule fois de la définition du cosinus, en écrivant :

$$\cos \alpha = \frac{\text{proj. } AB}{AB},$$

au moyen d'un cercle trigonométrique de centre A et de rayon AB.

Deux triangles qui ont leurs côtés parallèles donnent du premier coup :

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{\sec x}{1},$$

on le vérifie souvent dans les quatre quadrants.

On ne donne pas, ou l'on donne avec l'intention de n'en pas faire usage, la formule essentielle :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta,\gamma)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma,\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha,\beta)}.$$

où α, β, γ désignent les droites dirigées qui portent les côtés du triangle ; en posant

$$\overline{BC} = a,\ \overline{CA} = b,\ \overline{AB} = c,$$
$$(\beta, \gamma) = A,\ (\gamma, \alpha) = B,\ (\alpha, \beta) = C,$$
$$a + b + c = 2p,$$

on réunit plusieurs formules en une seule, d'autant mieux que les demi-angles interviennent fréquemment, et que, avec les habitudes reçues, on voit $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ se succéder dans des formules dont l'analogie est ainsi masquée. En Mécanique plane, pour deux forces P, Q et leur résultante R, on doit écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{Q}{\sin(P,R)} = \dfrac{P}{\sin(R,Q)} = \dfrac{R}{\sin(P,Q} \cdot \\ (P,R) + (R,Q) = (P,Q), \end{array}\right.$$

tandis que, pour trois forces P, Q, S en équilibre, on a

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{Q}{\sin(P,S)} = \dfrac{P}{\sin(S,Q)} = \dfrac{S}{\sin(Q,P)} \cdot \\ (P,S) + (S,Q) + (Q,P) = 2\pi ; \end{array}\right.$$

des élèves préparés comprennent fort bien cela.

12. C'est seulement en Mathématiques spéciales que la Géométrie analytique impose l'emploi systématique des grandeurs directives. L'aire d'un triangle, le volume d'un tétraèdre, donnés par un déterminant, ne peuvent être des grandeurs absolues. Dans la formule :

$$\operatorname{tg} V = \frac{m' - m}{1 + mm'},$$

le plan est orienté, l'angle a un côté origine, un côté extrémité, les droites n'étant pas dirigées ; plus d'un élève hésite devant ces idées nouvelles pour lui. En coordonnées polaires, la démonstration de la formule $\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'}$ serait mieux comprise si l'on était mieux préparé ; même observation pour la formule relative aux asymptotes ; les formules elles-mêmes, indépendamment de la démonstration, ne sont pas toujours bien comprises, faute d'habitude des choses directives. L'ensemble d'une classe est-il inté-

ressé par le fait que l'équation normale $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$ dirige la droite, d'où résulte un signe net pour la distance d'un point à cette droite? par le fait que α est positif de Ox vers Oy, β de Oy vers Ox, d'où résulte $\alpha + \beta = 0$, comme en Trigonométrie pour un arc (A, M) et son complément (B, M)? Je ne le crois pas; et l'on peut regretter cette indifférence qui tient au premier enseignement.

13. Je n'ai cité aucun nom, craignant trop de me tromper dans un sujet qui est du domaine public. Chasles, Laguerre surtout, ont beaucoup fait : c'est, je crois, Laguerre qui a donné l'idée du cycle, et la formule essentielle

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta,\gamma)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma,\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha,\beta)}$$

si je ne me trompe, c'est Baltzer qui a donné l'écriture excellente :

$$(DA, DB) = (CA, CB)$$

pour quatre points d'un cercle ; M. Gérard, professeur au lycée Charlemagne, a donné le premier, entre autres choses, la formule :

$$\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CD} - \overline{DA} = 0$$

pour le quadrilatère circonscriptible, et, si je ne l'ai pas cité dans l'opuscule dont j'ai parlé, c'est que je ne connaissais pas les articles qu'il avait publiés dans le *Bulletin de Mathématiques élémentaires* dirigé par lui. Bien d'autres se sont préoccupés de la question des signes en Géométrie ; il serait temps que l'enseignement profitât des résultats acquis : au XIX^e^ siècle, la Géométrie n'est pas *l'art de mesurer la terre*.

G. Fontené (Paris).

Note. — En coordonnées cartésiennes dans l'espace, quelle que soit la disposition des axes, on peut dire que l'espace est orienté de Oy vers Oz pour l'observateur Ox,..., de Ox vers Oy pour l'observateur Oz; c'est, je crois, ce que dit Cauchy. En ne parlant ni de gauche ni de droite, on met tout le monde d'accord. G. F.

CHRONIQUE

L'enseignement mathématique à l'Université de Strasbourg.

Nous avons sous les yeux un des plans d'études des candidats à l'enseignement des sciences mathématiques et physiques dans les établissements secondaires supérieurs en Prusse ; c'est celui qui vient d'être publié par MM. les professeurs Becker, Braun, Coux, Crazer, Reye, Roth, Weber, de la section des sciences mathématiques et physiques de l'Université de Strasbourg, à la suite du décret dont nous avons parlé dans le n° 1 de la *Revue* (p. 60). Cette brochure (1) est destinée à guider l'étudiant dans le choix des cours et à le mettre au courant du nouveau règlement qui a eu pour effet immédiat un remaniement des programmes universitaires et la création de chaires nouvelles.

Ce plan d'étude présente bien ce que de nos jours doit offrir une université qui a la prétention de posséder une section des sciences mathématiques, et c'est à ce titre que nous résumons ici le contenu de cette brochure.

Le nouveau règlement, qui doit entrer en vigueur le 1er avril prochain, établit pour l'enseignement mathématique trois sortes de brevets :

a) Le certificat secondaire (*Zweite Stufe*) pour l'enseignement dans les classes inférieures et moyennes ;

b) Le certificat supérieur (*Erste Stufe*) pour l'enseignement dans les classes supérieures ;

c) Le certificat de capacité pour l'enseignement des mathématiques appliquées.

Les candidats du certificat *b* doivent être en possession du certificat *a*) ; les candidats au certificat *c*) doivent posséder le certificat *b*).

La préparation scientifique des candidats est confiée aux universités, mais les examens sont passés devant une commission nommée par le gouvernement et composée de professeurs pris dans l'université et dans l'enseignement secondaire.

L'examen principal porte sur les branches suivantes :

a) *Pour le certificat secondaire :* Connaissance approfondie des

(1) Nous venons de recevoir une brochure analogue publiée par l'Université de Gottingue, qui au point de vue des études mathématiques jouit d'une réputation bien justifiée.

mathématiques élémentaires, de la géométrie analytique à deux dimensions, des propriétés fondamentales des sections coniques, et des éléments du calcul différentiel et intégral.

b) *Pour le certificat supérieur :* Géométrie supérieure, arithmétique et algèbre supérieures, analyse et mécanique analytique; dans chacune de ces branches le candidat doit pouvoir résoudre une question d'une difficulté moyenne.

c) *Pour le certificat des mathématiques appliquées :* La géométrie descriptive jusqu'aux méthodes de la projection centrale (inclusivement) et le tracé des épures; la connaissance des méthodes employées en mécanique appliquée, en particulier de la statique graphique; la connaissance des éléments de géodésie et de la théorie des erreurs.

Connaissances générales et branches accessoires. — Les candidats à l'enseignement doivent faire preuve de connaissances générales dans les branches suivantes : Philosophie, Pédagogie et Littérature allemande. En outre, ils ont à faire choix d'une branche accessoire appartenant, soit au domaine littéraire, soit au domaine des sciences physiques et naturelles.

Cours de première année. — Dans leur brochure, les professeurs adressent aux étudiants de sages conseils sur la façon de travailler un cours, sur le choix des cours et sur le travail pendant la longue période des vacances.

Aux étudiants de première année il est recommandé de suivre comme cours fondamentaux : la géométrie analytique à deux et à trois dimensions, et le calcul différentiel et intégral.

Parmi les autres cours élémentaires, on doit encore compter l'introduction à la géométrie synthétique (projective), la mécanique technique et la géométrie de position. Toutefois ces cours peuvent aussi être suivis pendant l'un des semestres suivants ; ils sont, en général, donnés tous les deux ans.

Dans ses leçons sur le calcul différentiel, le professeur examine, entre autres, les questions les plus importantes qui se rattachent à l'analyse algébrique et à l'étude des séries infinies ; ces deux branches font, de temps en temps, l'objet de cours spéciaux qui sont également recommandés aux commençants. Il en est de même des cours sur les déterminants, la trigonométrie sphérique et l'introduction à l'algèbre supérieure.

Sous le titre d'introduction aux mathématiques supérieures, l'Université de Strasbourg offre un cours à l'usage des étudiants en sciences naturelles afin qu'ils puissent avoir un aperçu des méthodes employées dans les sciences exactes.

Voici enfin un cours qui, suivant la façon dont il est conçu, peut être d'une utilité incontestable aux candidats à l'enseignement. Il a pour objet l'*Encyclopédie* des mathématiques élémentaires. Il ne s'agit pas ici d'une simple revision des éléments, mais d'une étude approfondie

de ces éléments envisagés au point de vue élevé de la science proprement dite.

Cours supérieurs. — Pour les cours spéciaux, l'Université de Strasbourg a adopté un certain cycle comprenant les diverses parties des mathématiques supérieures et embrassant une période de trois à quatre années. En général il ne sera pas possible à un étudiant de suivre avec fruit l'ensemble de ces cours. Il devra faire un choix selon ses dispositions personnelles et la direction qu'il désire donner à ses études. Ce choix est d'autant plus facile que la plupart des cours peuvent être suivis dans un ordre quelconque, à partir de la deuxième année universitaire. Toutefois il est bien recommandé aux étudiants de ne pas s'engager trop tôt dans la spécialisation ; ce conseil s'adresse tout particulièrement à ceux qui postuleront plus tard le doctorat.

Les cours spéciaux ont été répartis en quatre groupes :

1er *groupe*. — Géométrie analytique à trois dimensions d'après les méthodes récentes. — Théorie des courbes gauches et des surfaces. — Théorie de la courbure des courbes et des surfaces. — Mécanique analytique. — Théorie du potentiel.

2e *groupe*. — Intégrales définies. — Equations différentielles ordinaires. — Les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. — Calcul des variations. — Théorie des groupes de transformation (d'après Lie).

3e *groupe*. — Théorie générale des fonctions. — Les équations différentielles linéaires traitées au point de vue de la théorie des fonctions. — Fonctions elliptiques. — Fonctions hyper-elliptiques. — Fonctions abéliennes et fonctions θ.

4e *groupe*. — Algèbre supérieure. — Théorie des nombres. — Théorie des invariants. — Théorie des nombres algébriques. — Théorie des groupes finis. — Calcul des probabilités.

L'*Histoire des mathématiques* figure également au programme de l'Université de Strasbourg. Elle fait l'objet d'un cours portant soit sur l'ensemble des mathématiques, soit sur certains chapitres choisis.

Exercices et séminaires. — Les cours les plus importants sont, dès la première année, accompagnés de leçons spécialement consacrées aux *exercices*.

Outre les cours spéciaux, il existe encore des conférences, désignées sous le nom de *séminaires* et consacrées à l'étude de questions préparées et exposées par l'étudiant lui-même. Le principal but de ces conférences est d'amener l'étudiant dans la voie des recherches personnelles.

Dans les universités qui, au point de vue des mathématiques, ne peuvent offrir un programme aussi vaste que celui dont il est question ici, ces séminaires peuvent, dans une certaine mesure, apporter une compensation. En effet, ils permettent aux professeurs d'abor-

der les principes fondamentaux des branches spéciales les plus importantes ; mais, de plus, et c'est là le point essentiel, ils obligent l'élève à travailler de lui-même et développent ainsi chez lui l'esprit d'initiative et de méthode. Grâce à une pareille préparation, l'étudiant saura tirer parti de l'enseignement reçu, si minime soit-il, et sera en état de compléter lui-même les lacunes qu'il pourra rencontrer dans les connaissances acquises.

Physique. — Le programme est fort bien compris. Les cours théoriques forment un cycle de quatre semestres ; ils exigent la connaissance du calcul différentiel et intégral.

Nous croyons pouvoir laisser de côté la partie détaillée de ce programme.

Astronomie. — Il est donné chaque année, pendant le semestre d'hiver, un cours d'astronomie générale. En outre l'université offre un ensemble de cours spéciaux destinés à ceux qui se vouent particulièrement à l'astronomie. Certains cours pratiques ont lieu à l'Observatoire, qui, ainsi que le remarque la brochure, compte parmi les plus importants de l'Europe.

Mathématiques appliquées. — Dans le domaine des mathématiques appliquées, plusieurs chaires nouvelles ont été créées. L'ensemble des cours comprend :

La géométrie descriptive, la mécanique technique, la statique graphique, la géodésie et la théorie des erreurs ; il répond au programme des candidats à l'enseignement des mathématiques appliquées. A ces cours viennent se joindre des exercices pratiques.

Il convient de signaler ici une lacune que l'on retrouve d'ailleurs encore dans bien des programmes universitaires. Jusqu'ici, on a accordé une large place à tout ce qui concerne les applications des sciences mathématiques à la physique, à la mécanique, à l'astronomie et à la géodésie, mais on n'a que trop négligé une branche dont l'utilité ne saurait être contestée ; nous voulons parler de la *science de l'actuaire*. Un cours semestriel de une à deux heures par semaine serait d'ailleurs suffisant. La question a été soulevée à plusieurs reprises ces dernières années. Plusieurs universités et écoles techniques supérieures consacrent maintenant un enseignement spécial à cette branche, et il est à espérer que cet exemple ne tardera pas à être suivi dans d'autres établissements supérieurs. H. F.

Un projet d'Union académique.

Nous apprenons qu'à Göttingue, il y a quelques mois, se sont réunis des représentants des Académies de Vienne et de Munich, et des sociétés de Göttingue et de Leipzig. Dans cette assemblée, on aurait adopté le principe d'une union à former entre les diverses Académies du

monde pour mener à bien les œuvres communes intéressant les mathématiciens.

C'est là un projet auquel on ne saurait assez hautement applaudir et dont chacun doit souhaiter la réalisation aussi prompte que possible. Une pareille organisation serait le complément naturel, sinon nécessaire, des Congrès internationaux, dans lesquels, du reste, elle pourrait trouver un puissant appui. A côté des assemblées nombreuses et ouvertes à tous, mais essentiellement passagères, une sorte de fédération universelle permanente des plus hautes personnalités de la science mathématique serait capable de mettre au jour les œuvres les plus utiles et de contribuer puissamment aux progrès de cette science, grâce aux moyens et aux ressources dont disposent les Académies. Nous avons le ferme espoir que les savants illustres qui tiennent en leurs mains le succès d'une telle entreprise sauront la mener à bien. Il leur suffit pour cela d'un peu de bonne volonté et d'abnégation, car l'œuvre à faire, si elle leur vaut collectivement la reconnaissance du monde mathémathique, n'est pas de nature à accroître la renommée personnelle de chacun d'eux. Mais il s'agit de maîtres placés bien au-dessus d'une telle considération, dont le caractère est en général aussi digne d'admiration que le talent, et qui n'ont qu'une passion, celle de la science et de la vérité.

Nous ne manquerons pas de tenir nos lecteurs au courant de ce que nous pourrons apprendre sur le projet dont nous venons de parler.

C. A. L.

Association internationale pour la propagation de la méthode des quaternions.

Une association internationale pour la propagation de la méthode des quaternions et des méthodes vectorielles qui s'y rattachent avait fait l'objet, il y a quelques années, d'une tentative de M. le Dr Molenbroek, de la Haye. Nous venons d'apprendre avec le plus grand plaisir que ce projet est loin d'être abandonné, et qu'au contraire on s'occupe activement de le mettre à exécution. Le secrétaire général est M. M. Macfarlane, Gowrie Grove, Chatham, Ontario (Canada). La France compte déjà un certain nombre d'adhérents, parmi lesquels M. Paul Genty, licencié ès sciences, 207, rue de Vaugirard, à Paris, a été désigné comme secrétaire. Il y a ou il y aura ainsi des secrétaires pour chaque pays.

Plusieurs des membres de cette association ont déjà mis en avant l'idée de profiter du Congrès de 1900 pour tenir à Paris, vers la même époque, une assemblée générale de l'association. C'est une excellente initiative, à laquelle applaudiront tous ceux qui connaissent les ressources des méthodes vectorielles, et qui voudraient les voir encore plus répandues.

Conservatoire national des Arts et Métiers de Paris.

Cet important établissement vient de nous communiquer l'affiche de ses Cours pour l'année 1898-1899. Nous en extrayons ce qui intéresse l'enseignement mathématique.

Géométrie appliquée aux arts. — A. Laussedat, professeur; P. Haag, professeur suppléant; lundis et jeudis, 9 heures du soir. — Grandeur et figure de la terre. — Cartes géographiques et topographiques. — Instruments de lever et de nivellement. — Méthodes régulières, méthodes rapides, lever des plans à l'aide de la photographie. — Cadastre. — Etude des formes générales du terrain. — Tracé des voies de communication et des travaux d'art. — Calcul des surfaces, des déblais et des remblais. — Etat de la topographie et de la cartographie en France et à l'étranger.

Géométrie descriptive. — E. Rouché, professeur; lundis et jeudis, 7 h. 3/4 du soir. — *La perspective pratique.* — Propriétés projectives des figures. — Le trait de perspective et ses principales applications : Arcades, voûtes d'arête, moulures, escaliers, ombres, images réfléchies, etc. — Notions sur les bas-reliefs et les décors. — Le problème inverse de la perspective.

Mécanique appliquée aux arts. — J. Hirsch, professeur; lundis et jeudis, 7 h. 3/4 du soir. — *Les transports mécaniques sur voies de terre et voies navigables.* — Moteurs à gaz, à pétrole. — Automobiles pour poids lourds, pour poids moyens; motocycles; vélocipèdes. — Traction mécanique sur les rivières, sur les canaux; machines marines.

Constructions civiles. — J. Pillet, professeur; lundis et jeudis, 9 heures du soir. — Stabilité des constructions. — I. *Statique graphique :* Composition et décomposition des forces. — Moments d'inertie. — II. *Résistance des matériaux :* Compression et traction, glissement. — Flexion, torsion. — III. *Résistance et stabilité des organes isolés :* Poutres à une ou plusieurs travées. — Supports isolés. — IV. *Résistance et stabilité des systèmes d'organes :* Planchers, combles, arcs. — V. *Résistance et stabilité des massifs :* Poussée des terres, poussée des eaux; murs, voûtes.

Si quelqu'un des professeurs du Conservatoire avait l'heureuse inspiration de nous communiquer une note sur cette branche si intéressante de l'enseignement technique, au point de vue mathématique, il est inutile de dire avec quelle satisfaction nous nous empresserions de l'insérer.

CORRESPONDANCE

Paris, le 20 janvier 1899.

Monsieur le Directeur,

Aux *questions de terminologie* sur lesquelles vous appelez l'attention de vos correspondants, ne serait-il pas utile d'ajouter les *questions de notation* qui donnent lieu à des réflexions analogues? Un exemple suffira pour expliquer ma pensée.

Beaucoup d'auteurs considèrent comme équivalentes les équations

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0, \tag{1}$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=0. \tag{2}$$

Ce qui est exact, c'est que, si l'équation (1) représente, en coordonnées trilinéaires, le cercle inscrit à un triangle équilatéral de référence et s'obtient en rendant rationnelle l'équation quadruple $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{z}=0$, les équations

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}=0,\quad \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}=0,\quad \sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z}=0$$

représentent chacune *un tiers* de ce cercle, et l'équation (2) ne représente *absolument rien*, puisque la somme de trois quantités positives ne peut être nulle.

On peut dire, il est vrai, que l'équation (2) est une *notation abrégée* de l'équation quadruple; mais une abréviation, qui ne conserve d'une équation possible que la partie impossible, ne saurait être recommandable, au point de vue de l'enseignement moins encore qu'à tout autre. A tous les égards, d'ailleurs, la notation : $\Sigma x^2-2\Sigma yz=0$ est préférable, comme brève, exacte, rationnelle et par conséquent conforme à la définition donnée des courbes algébriques.

La commission, dont vous proposez si justement la création, pourrait s'appeler *Commission de terminologie et de notation* et aurait un vaste champ d'examen avec les questions si nombreuses qui se présentent dans les deux ordres d'idées.

Agréez, etc.

L. Ripert (Paris).

Sarzana, 28 janvier 1899.

Monsieur,

Dans le premier numéro de votre Revue internationale *l'Enseignement mathématique* que je viens de recevoir, parmi les articles très remar-

quables qu'elle renferme, j'ai lu avec un véritable intérêt celui que vous avez publié sous le titre : « Les questions de terminologie. » Quant à moi, pendant ma carrière de vingt-trois ans, comme professeur de mathématiques, j'ai précisément remarqué que certaines idées inexactes que l'on enseigne communément dans les traités d'Arithmétique et qui parfois sont en contradiction avec celles que l'on doit développer ensuite en algèbre, produisent chez les jeunes gens une répugnance très marquée et chez les maîtres une grande difficulté à les corriger et à les réduire à cette exactitude scientifique que l'enseignement supérieur doit nécessairement exiger.

C'est sous cette impression que j'ai tenté de composer un précis d'arithmétique où les idées se trouvent généralisées et expliquées de manière à ne pas être modifiées ensuite.

Je vous prie donc, de bien vouloir donner un coup d'œil à ces deux opuscules (1), que je vous envoie en hommage de ma haute estime.

Veuillez agréer, etc.

Prof. Can. B. Raganti.

Porto, 16 février 1899.

Messieurs,

Je viens d'avoir connaissance, par mon libraire, de votre excellente entreprise de la revue internationale : *l'Enseignement Mathématique*.

Comme ancien professeur de sciences mathématiques, je ne peux assez louer votre savante initiative pour l'avancement de la pédagogie de la plus belle des sciences.

Je crois utile de vous remettre mes livres d'enseignement mathématique, selon la nouvelle réforme de l'instruction secondaire (moyenne) de mon pays ; ces ouvrages, au dernier concours général officiel des livres de l'enseignement de ce degré, ont obtenu l'adoption exclusive du Gouvernement, pour quatre ans (maximum), pour l'enseignement officiel et privé de ces sciences dans les institutions secondaires (Lycées et Collèges).

Par le même courrier, je vous envoie le livre d'enseignement pour les classes de 4e et 5e (1); les autres, des classes antérieures, suivront bientôt. Pour les classes de 6e et 7e (dernière) les livres n'ont pas été encore mis en concours.

Veuillez, Messieurs, agréer l'assurance de ma très haute considération,

Joaquim d'Azevedo Albuquerque (Porto),
Professeur à l'Académie Polytechnique.

---

(1) Voir ci-après, *Bulletin bibliographique*.

BIBLIOGRAPHIE

Encyklopædie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. — Mit Unterstützung der kaiserlichen und kœniglichen Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der kœniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen: herausgegeben von Dr H. Burkhardt, o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich, und Dr W. Franz Meyer, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr. En six volumes gr. in-8° (prix du volume : environ 20 francs) B. G. Teubner. Leipzig, 1898. — t. I Arithmetik und algebra, redigiert von W. Franz Meyer. Erstes und zweites Heft. (224 S.)

Plusieurs publications (1) ont été fondées, surtout ces dernières années, dans le double but d'orienter le mathématicien dans le vaste domaine des sciences exactes et de lui faciliter les travaux dans le domaine restreint de ses recherches personnelles.

Cependant il restait à faire un travail de la plus haute importance : celui de présenter, sous forme de résumés synthétiques, l'état actuel de la science, de dresser pour ainsi dire un inventaire des résultats acquis dans les différentes branches.

Ce travail vient d'être entrepris par MM. Fr. Meyer, professeur à l'Université de Kœnigsberg et H. Burkhardt, professeur à l'Université de Zurich. Il sera publié sous le titre de : Encyklopædie der mathematischen wissenschaften.

Pour aplanir les nombreuses difficultés que devait présenter un ouvrage de cette nature, les deux rédacteurs se sont assuré le concours d'une commission déléguée par les Académies des Sciences de Munich et de Vienne et par la société royale des sciences de Gœttingue, et composée de MM. W. Dyck (Munich), G. V. Escherich (Vienne), F. Klein (Gœttingue), L. Boltzmann (Vienne), et H. Weber (Strasbourg).

---

(1) Parmi les publications de cette nature on doit classer : 1° le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, dirigé par M. Lampe, le *Bulletin des sciences mathématiques*, dirigé par MM. Darboux et Tannery, et la *Revue semestrielle des publications mathématiques*, publiée par la Société mathématique d'Amsterdam; ces revues donnent le résumé des publications mathématiques, périodiques ou autres; 2° le *Repertoire bibliographique des sciences mathématiques*, fondé par la Société mathématique de France; 3° les *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung*; on y trouve chaque année un rapport sur les progrès de telle ou telle branche des sciences mathématiques; 4° le *Synopsis der höheren Mathematik*, sorte d'encyclopédie limitée aux mathématiques supérieures, rédigée par M. Hagen; 5° l'*Intermédiaire des mathématiciens*, fondé et dirigé par MM. Laisant et Lemoine.

Quant à l'exécution même du travail MM. Meyer et Burkhardt se sont adressés à de nombreux collègues. L'ensemble des collaborateurs choisis parmi les mathématiciens les plus en vue dans les divers pays, fait de cette encyclopédie une œuvre vraiment internationale.

Grâce à ces précautions, cette publication sera rédigée dans chacune de ses parties par des personnes d'une compétence incontestée, et pourra être terminée dans un temps relativement restreint (en six ans).

D'après le plan général adopté par les rédacteurs, cet ouvrage ne sera pas un simple dictionnaire encyclopédique, ainsi qu'il en avait d'abord été question dans un premier projet présenté au congrès des mathématiciens allemands, tenu à Vienne en 1894. A l'ordre alphabétique on a préféré *l'ordre logique des matières* (1). Cette façon de procéder offre de grands avantages. Elle permet de mettre en relief les principes fondamentaux qui caractérisent chaque branche particulière et de présenter dans un ordre méthodique les propriétés les plus importantes qui s'y rattachent. Quant aux démonstrations il va de soi qu'on a dû renoncer à les reproduire.

L'encyclopédie comprendra six volumes. Les deux premiers fascicules du premier volume seuls viennent de paraître. Avant d'en indiquer le contenu nous croyons devoir énumérer les grandes divisions de l'ouvrage complet :

Tome I. — Arithmétique et algèbre. — A. Arithmétique. — B. Algèbre. — C. Théorie des nombres. — D. Calcul des probabilités et méthode des moindres carrés. — E. Calcul des différences.

Tome II. — Analyse. — A. Analyse des variables réelles. — B. Analyse des variables complexes.

Tome III. — Géométrie. — A. Théories purement géométriques. — B. Principes fondamentaux de l'application de l'algèbre et de l'analyse à la géométrie. — C. Géométrie des formes algébriques. — D. Géométrie infinitésimale.

Tomes IV et V. — Mathématiques appliquées. — A. Applications à la mécanique et aux questions de mécanique technique. — B. Applications à la physique et aux questions de physique technique. — C. Applications à l'astronomie et à la géodésie. (Ces divisions n'ont encore qu'un caractère provisoire.)

Tome VI. — A. Histoire, philosophie, didactique. — B. Coup d'œil sur le développement des sciences mathématiques pendant le XIX^e^ siècle. — C. Registres alphabétique et autres.

Comme le montre ce tableau, il a été accordé une place importante aux mathématiques appliquées. A ce point de vue l'encyclopédie sera d'un précieux secours non seulement à ceux qui cultivent les mathématiques dans un

(1) On constate avec regret que dans un ouvrage de ce genre on n'ait pas tenu compte de la classification, ou tout au moins de la notation, adoptée par la *Commission internationale du Repertoire bibliographique des sciences mathematiques*. Il est vrai que cette question a été examinée avec beaucoup de soin, et que les rédacteurs ne l'ont abandonnée que parce que cette nomenclature ne cadrait pas avec le but de leur ouvrage. Mais, ne serait-il pas possible, dans la suite, d'accompagner les différents articles de la notation du Repertoire? Dans tous les cas une table spéciale placée à la fin du dernier volume et dans laquelle les matières seraient rangées d'après cette classification, rendrait de grands services à bien des personnes. C'est là une proposition que nous nous permettons de soumettre à la commission de l'Encyclopédie.

but purement scientifique, mais encore à tous ceux qui se servent de cette branche en vue des applications aux sciences techniques.

Afin de faciliter les comptes rendus ultérieurs nous reproduisons ici le plan détaillé du premier volume avec les noms des collaborateurs qui ont été chargés de la rédaction de ses différentes parties.

A. Arithmetik. — 1. Grundlagen der Arithmetik : H. Schubert in Hamburg. — 2. Kombinatorik : E. Netto in Giefsen. — 3. Irrationale Zahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse : A. Pringsheim in München. — 4. Komplexe Zahlen : E. Study in Greifswald. — 5. Mengenlehre : A. Schoenflies in Göttingen. — 6. Endliche diskrete Gruppen : H. Burkhardt in Zürich. — 7. Numerisches Rechnen : R. Mehmke in Stuttgart.

B. Algebra. — 1. Grundlagen : *a*, *b*). Rationale Funktionen : E. Netto in Giefsen. — *c*). Algebraische Gebilde : G. Landsberg in Heidelberg. — 2. Invariantentheorie : W.-Fr. Meyer in Kœnigsberg. — 3. Gleichungen : *a*). Separation und Approximation der Wurzeln : C. R. Runge in Hannover. — *b*). Rationale Funktionen der Wurzeln : K.-Th. Vahlen in Kœnigsberg. — *c*, *d*). Galois'sche Theorie und Anwendungen derselben : O. Hœlder in Kœnigsberg. — *e*). Gleichungssysteme : K. Th. Vahlen in Kœnigsberg. — *f*). Endliche Gruppen linearer Substitutionen : P. Wiman in Lund.

C. Zahlentheorie. — 1. Niedere Zahlentheorie : P. Bachmann in Weimar. — 2. Theorie der Formen : K. Th. Vahlen in Kœnigsberg. — 3. Analytische Zahlentheorie : P. Bachmann in Weimar. — 4. Algebraische Zahlen : D. Hilbert in Gœttingen. — 5. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen : G. Landsberg in Heidelberg. — 6. Komplexe Multiplikation : H. Weber in Strassburg.

D. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. — 1. Wahrscheinlichkeitsrechnung : E. Czuber in Wien. — 2. Ausgleichungsrechnung : J. Bauschinger in Berlin. — 3. Interpolation : J. Bauschinger in Berlin. — 4. Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung : L. v. Bortkewitsch in Strassburg.

E. Differenzenrechnung. — Differenzenrechnung : D. Seliwanoff in St.-Petersburg.

Les deux fascicules parus comprennent les six premiers numéros de la lettre A. M. Schubert expose d'abord les principes fondamentaux des opérations arithmétiques; puis vient l'analyse combinatoire avec ses applications aux déterminants, rédigée par M. Netto. L'article 3, dû à M. Pringsheim, comprend les nombres irrationnels et la convergence des séries et des produits infinis. Il est divisé en quatre parties : *a*) nombres irrationnels; *b*) la notion de limite; *c*) séries infinies; *d*) produits infinis, fractions continues, déterminants.

Dans l'article 4, M. Study résume la théorie des quantités complexes ordinaires ou quantités imaginaires, puis il donne un exposé très complet des systèmes de quantités complexes. Vient ensuite la théorie des ensembles qui, bien que relativement récente, a déjà pris une place importante dans la science mathématique. M. Schoenflies a su condenser en une vingtaine de pages les propriétés fondamentales de cette théorie. Le deuxième fascicule

se termine par l'article 6, consacré aux groupes finis de substitutions et rédigé par M. H. Burkhardt.

Malgré l'espace fort limité réservé à chaque branche, les questions sont traitées d'une façon très complète. L'exposé est présenté avec méthode, précision et clarté. Ce sont là des qualités indispensables à un ouvrage encyclopédique.

Les auteurs ont apporté un grand soin aux indications bibliographiques, afin de permettre au lecteur de se reporter aux mémoires fondamentaux relatifs au sujet traité.

La lecture des deux premiers fascicules donne déjà une excellente idée de ce que sera l'*Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften* et des services que cette publication pourra rendre à tous ceux qui s'occupent de sciences mathématiques.

Cette œuvre est certainement la plus importante qui ait été entreprise ces dernières années. Aussi doit-on féliciter MM. Meyer et Burkhardt d'en avoir pris l'initiative et d'être parvenus à vaincre les nombreuses difficultés qu'ils ont dû rencontrer dans la réalisation de leur projet.

H. Fehr.

B. Lefebvre, S. J. — **Cours développé d'Algèbre élémentaire**, *précédé d'un Aperçu historique sur les origines des Mathématiques et suivi d'un Recueil d'exercices et de problèmes*. 2 vol. gr. in-8° (t. I, Calcul algébrique, XLIX-320 p., 1898 ; t. II, Equations, Progressions, Logarithmes, 544 p.) ; Prix : 10 fr. ; Namur, Wesmael-Charlier.

La littérature mathématique offre malheureusement trop peu d'exemples du genre d'ouvrages auquel appartient le Cours du P. Lefebvre. Ce n'est pas un simple manuel strictement limité à une sèche exposition de la science algébrique ; c'est un ample commentaire, enrichi des fruits d'une longue pratique de l'enseignement et d'une érudition consommée. Le *Cours développé* s'adresse aux maîtres. Pour les élèves, l'auteur a publié (1897) une édition abrégée, renfermant les mêmes matières et disposée d'après le même plan : elle sert déjà de livre de texte dans un bon nombre de collèges belges. Assurément le professeur qui saura tirer parti des richesses considérables accumulées dans les deux volumes du Cours développé, donnera à ses leçons, alors même que tout autre moyen d'information lui ferait défaut, une précision et un intérêt qui ne se rencontrent pas souvent dans l'enseignement secondaire.

Le P. Lefebvre montre un grand souci de la rigueur des définitions et des démonstrations. Sous ce rapport, l'ouvrage est à la hauteur des progrès les plus récents. Peut-être même la recherche de l'exactitude sera-t-elle de nature à rebuter quelque peu, dans les commencements, les plus jeunes élèves.

Le plan général est, lui aussi, en harmonie parfaite avec les tendances les plus modernes. Dès les premiers préliminaires du Cours, les quantités négatives, abstraites et concrètes sont minutieusement étudiées. Le binome de Newton est traité de bonne heure par les simples règles de la multiplication. Le calcul des radicaux du second degré y est traité en sa place propre, dans la théorie générale du calcul algébrique. Ce ne sont pas là les seules concordances que nous avons relevées entre les vues si justes développées tout récemment par M. Laisant dans son ouvrage remar-

quable, *la Mathématique*, et les améliorations suggérées au P. Lefebvre par son expérience de l'enseignement.

Signalons encore les développements et les soins donnés aux premières notions sur les limites, à la théorie des imaginaires, au calcul pratique des déterminants, à la théorie des maxima et des minima, aux équations du second degré à plusieurs inconnues.

Les exercices disséminés dans le corps de l'ouvrage et ceux qui forment un vaste recueil à la fin de chaque volume méritent une mention toute spéciale. Bon nombre de problèmes y sont signés des noms les plus illustres dans l'histoire des Mathématiques ; une foule de questions ont des données réelles, empruntées à la Physique, à l'Astronomie et à d'autres sciences ; enfin peu ou point de ces questions banales qui rendent si rebutantes et parfois si ridicules les listes de problèmes. Le recueil des exercices contient plusieurs milliers de questions, munies très souvent de leur clef de solution et accompagnées fréquemment de précieux renseignements historiques. Ce recueil a été signalé aux professeurs de l'enseignement moyen par M. Mansion dans le journal *Mathesis :* pour qui connaît l'extrême souci de la rigueur et la sûreté d'information qui distinguent le savant professeur de Gand, cette recommandation est un précieux éloge.

Aux yeux des maîtres, un des principaux mérites de l'ouvrage du P. Lefebvre se trouvera, pensons-nous, dans la partie historique.

Un aperçu assez long sur la naissance et les développements successifs de l'Algèbre et des Mathématiques élémentaires ouvre le premier volume. Les sources les plus authentiques et les plus récentes y sont mises à contribution, entre autres les savantes recherches publiées par le *Bulletin* de MM. Darboux et Tannery. Plus d'un lecteur français y sera surpris de constater combien l'Algèbre est redevable aux vieux analystes de son pays, et d'apprendre à connaître en particulier Oresme, le remarquable précurseur de Descartes, et Chuquet, lui aussi encore presque inconnu en France et qui mérite, par son *Triparty es la science des nombres* (1894) le titre de Père de l'Algèbre française.

Mais ce n'est pas dans cette vaste introduction seulement que le P. Lefebvre prodigue les trésors d'érudition qu'il a patiemment accumulés. Tout le long de l'ouvrage, des notes fréquentes et développées remontent jusqu'aux origines les plus lointaines de toutes les questions importantes. N'en donnons comme exemple que la dissertation du tome II (p. 462 et suiv.) sur une nouvelle étymologie du mot *Algèbre*. Souvent même, c'est dans le texte que l'auteur est amené à discuter l'historique de certaines théories. C'est ainsi qu'il fait voir les différences caractérisées entre la méthode de Fermat et celle de Huyghens pour le calcul des maxima et minima, méthodes souvent regardées comme identiques. C'est ainsi encore qu'une longue étude historique et critique est consacrée à la méthode de Bezout pour la résolution des équations simultanées du 1er degré : actuellement encore beaucoup de traités français ne signalent pas l'échec apparent de la méthode dans certains cas particuliers, tandis que les analystes d'outre-Rhin relèvent ces exceptions et contestent toute valeur à ce qu'ils appellent la *méthode française*. Le P. Lefebvre expose très bien la modification due à Gergonne et montre que la méthode ainsi modifiée n'échoue jamais.

V. Schaffers (Louvain),
Docteur en Sciences physiques et mathématiques.

Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Par MM. les Secrétaires perpétuels ; — T. XII ; Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Ce volume, qui fait partie de l'édition nouvelle des œuvres de l'illustre géomètre, entreprise et régulièrement poursuivie depuis plusieurs années déjà, contient des mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences de Paris et de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France. Nous nous bornerons ici à en indiquer la liste :

Deux mémoires sur le flux et le reflux de la mer (3-128 et 473-548) ; Mémoire sur les mouvements des corps célestes autour de leurs centres de gravité (129-190) ; Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune, de son apogée et de ses nœuds (191-236) ; Mémoire sur le mouvement des orbites des satellites de Saturne et d'Uranus (237-256) ; Mémoire sur la théorie de la lune (257-266) ; Mémoire sur les mouvements de la lumière dans les milieux diaphanes (267-300) ; Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités (301-348) ; Supplément au mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres (349-356) ; Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités, et spécialement à la recherche du milieu qu'il faut choisir entre les résultats des observations (357-414) ; Mémoire sur la figure de la Terre (415-458) ; Addition au Mémoire sur la figure de la Terre (459-472) ; Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique, en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité (549-566).

A. Rebière. — **Les savants modernes, leur vie et leurs travaux,** d'après les documents académiques choisis et abrégés ; 1 vol. VIII-455 p., 38 portraits ; prix : 5 francs ; Paris, Nony, 1899.

« Combien ai-je vu d'anciens candidats à l'École polytechnique, qui, connaissant fort bien un traité d'algèbre classique et n'ayant rien lu au delà, ignoraient les noms d'Euler et de Bernoulli, et mettaient sur le même plan dans leur souvenir Newton et Bezout, Descartes et Budan, Cauchy et Sarrus. »

Les progrès ont été lents depuis que M. J. Bertrand écrivait ces lignes piquantes. Nos étudiants savent peu l'histoire des sciences, et nous croyons devoir leur signaler un livre récent de M. Rebière, aussi instructif qu'intéressant.

Il s'étend aux mathématiciens (1), aux physiciens et aux naturalistes, mais il ne porte que sur une soixantaine de savants, les plus importants, et il ne dit sur chacun que ce qu'il est indispensable de savoir. Cette sobriété de bon aloi est à remarquer et à louer. C'est un premier aperçu qu'on pourra compléter plus tard.

Après quelques lignes résumant la biographie, les découvertes et la

(1) Mathématiciens et astronomes étudiés : Cassini, Huygens, Newton, Leibniz, les Bernoulli, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Herschel, Monge, Laplace, Delambre, Legendre, Carnot, Fourier, Gauss, Poncelet, Cauchy, Chasles et Le Verrier.

bibliographie, chaque notice est composée d'extraits académiques où sont exposées les découvertes capitales, les idées de génie, et qui nous font connaître aussi le moral et le physique du savant, sa vie familière. M. Rebière compilateur scrupuleux, n'a puisé qu'aux sources sûres ; il a voulu que les savants soient racontés et jugés par leurs pairs, et en particulier par les secrétaires perpétuels de l'Académie des sciences.

L'introduction traite de l'Académie et comprend les courts chapitres suivants : la science antique ; les grands précurseurs ; l'ancienne Académie des sciences ; l'Institut et la nouvelle Académie ; les prix et les lauréats ; les documents académiques ; les secrétaires perpétuels.

Ajoutons que le volume est élégamment imprimé et orné d'une collection de portraits, comme on l'a vu d'après le titre.

Moritz Cantor. — **Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens;** 1 vol. pet. in-8°, 136 p. ; Prix : 1 mark 80 : Leipzig, Teubner, 1898.

Ce livre, que M. Moritz Cantor intitule « Arithmétique politique ou de la vie journalière », est un traité très élémentaire des opérations financières les plus usuelles. Une première partie est consacrée aux opérations financières proprement dites ; une autre, précédée de notions sur le calcul des probabilités, est consacrée aux questions d'assurances. Pour lire l'ouvrage de M. Cantor, il suffit de posséder les premières notions d'arithmétique et d'algèbre.

Le premier chapitre est relatif à la règle d'intérêt simple et aux diverses questions pratiques qui s'y rattachent : l'escompte des divers papiers de commerce, le change, etc.

Le second chapitre se rapporte à l'intérêt composé, aux annuités et à l'amortissement.

Le troisième chapitre contient les premiers éléments du calcul des probabilités avec quelques applications aux jeux de cartes et de dés, aux tirages de boules dans une urne. Ces notions ont surtout pour but de faire mieux comprendre les questions relatives aux assurances.

Le quatrième chapitre est relatif aux loteries.

Le cinquième aux assurances sur les choses.

Le sixième est relatif aux tables de mortalité ; on y trouve en particulier la table de Süssmilch, et deux tables provenant d'expériences faites dans vingt-trois compagnies allemandes, l'une relative aux assurances en cas de vie, l'autre relative aux assurances en cas de décès. Les trois chapitres suivants sont consacrés à l'étude des opérations des compagnies d'assurances.

Ce n'est pas sans un certain étonnement que nous avons parcouru le livre de M. Cantor ; nous le connaissions depuis longtemps comme mathématicien et comme historien, et nous voyons avec plaisir qu'un savant aussi éminent n'a pas dédaigné la science de l'actuaire. Les savants français, et c'est bien regrettable, ignorent même le nom de la science dont M. Cantor a exposé les principes élémentaires dans son livre, et cependant, à l'étranger, de grands savants ont été actuaires de profession. Pour ne citer que les plus illustres, je me contenterai de mentionner Sylvester et Lobatto.

Et cependant il y a dans la science de l'actuaire bien des parties à élucider et des problèmes à résoudre, qui exigeraient l'emploi des parties les

plus élevées des mathématiques, et très dignes de fixer l'attention de nos savants.

Quelques leçons professées à l'École polytechnique sur la science de l'actuaire auraient évité bien des catastrophes qui se sont produites dans ces derniers temps, et si nos ingénieurs avaient reçu les quelques notions que je voudrais voir introduire dans les programmes, les caisses de retraite de nos grands établissements industriels ne se seraient pas trouvées en déficit, ainsi qu'une enquête officielle vient de le constater.

H. Laurent (Paris).

G.-E. Fischer and J.-J. Schwatt, assistant professors of Mathematics in the University of Pennsylvania. — **Text-Book of Algebra with Exercices** for secondary schools and colleges. Première partie. 1 vol. in-8°, 683 p. Philadelphia, 1898.

Bien qu'il existe déjà un grand nombre de traités consacrés aux éléments d'Algèbre, il y en a relativement peu qui, à côté de la clarté et de la rigueur de l'exposé, présentent les qualités pédagogiques que l'on est en droit d'exiger d'un ouvrage destiné aux commençants. Le *Text-Book* de MM. Fischer et Schwatt réunit incontestablement toutes ces qualités et, à ce point de vue, mérite d'être signalé à l'attention des professeurs.

On constate à chaque page combien les auteurs se sont efforcés à mettre le sujet à la portée des élèves. Ainsi, aucune démonstration n'est abordée avant que la propriété soit clairement expliquée au moyen d'exemples convenablement choisis. Il en est de même des règles concernant les opérations algébriques : elles sont toujours précédées d'un grand nombre d'exercices.

Il nous paraît inutile d'énumérer les différents chapitres que comprend ce premier volume. Nous pouvons nous borner à dire qu'il contient une étude très approfondie : 1° de tout ce qui se rattache au calcul algébrique ; 2° des équations du premier degré à une ou plusieurs inconnues ; 3° des équations du second degré et de celles qui s'y ramènent ; 4° des progressions ; et 5° du théorème du binome à exposants entiers et positifs.

Chaque chapitre est accompagné d'un choix considérable d'exercices et de problèmes. Les professeurs trouveront là une source féconde d'applications très variées.

H. F.

Cours complet de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. Darboux, doyen de la Faculté des sciences de Paris. — 5 volumes parus. — Paris, Armand Colin et Cie.

I. *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, par M. Jules Tannery, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. Un vol. in-8° (1894) : prix : 5 francs. — II. *Leçons de Cosmographie*, par M. M. Tisserand, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris, et H. Andoyer, maître de conférences à la Faculté des sciences de Paris. Un vol. in-8° (1895) ; prix : 6 francs. — III. *Leçons d'Algèbre élémentaire*, par M. C. Bourlet, docteur ès sciences, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Un vol. in-8° (1896) ; prix : 7 fr. 50. — IV. *Leçons de Géométrie élémentaire (géométrie plane)*, par M. Jacques Hadamard, maître de conférences à la Faculté des sciences

de Paris, professeur suppléant au Collège de France. Un vol. in-8° (1898 ; prix : 6 francs. — V. *Leçons de Trigonométrie rectiligne*, par M. C. Bourlet, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Un vol. in-8° (1898) : prix : 6 francs.

Les programmes des classes de mathématiques élémentaires indiquent les matières de l'enseignement et en fixent les limites. Mais le sujet est à la fois si vaste et si complexe, il touche à tant d'ordres d'idées distincts, que bien des desiderata subsistent, moins encore peut-être pour la composition des programmes eux-mêmes que pour la manière de les appliquer. La plus grande initiative est avec raison laissée aux professeurs à cet égard ; mais on peut dire que ce qui leur manque surtout pour bien l'exercer c'est l'outillage. Un très grand nombre d'ouvrages classiques de mérites divers et quelques-uns d'une valeur incontestée existent : mais ils ne permettent pas à un professeur de préparer son cours avec la vue d'ensemble et la cohésion indispensables. Le besoin se fait universellement sentir de livres d'enseignement élémentaires, conçus d'après un plan d'ensemble mûrement élaboré, qui puissent être pour les maîtres des guides sûrs dans l'accomplissement de leur tâche difficile et qui, tout en se maintenant suffisamment à la portée des élèves pour pouvoir être mis fructueusement entre leurs mains pendant la durée des études, restent pour eux des livres intéressants et utiles après ses études terminées.

Le *Cours complet de Mathématiques élémentaires*, publié, depuis 1894, sous la direction de M. Darboux, doyen de la Faculté des sciences de Paris, par une société de professeurs et de savants, nous paraît répondre dans la plus large mesure au besoin que nous venons d'indiquer. Cinq volumes ont déjà paru. Ce sont, comme le dit M. J. Tannery en tête de ses *Leçons d'Arithmétique*, des livres d'enseignement, qui peuvent servir à ceux qui commencent leurs études mathématiques et à ceux qui les poursuivent, très élémentaires au début, où les démonstrations prennent peu à peu une forme plus abstraite et qui touchent, à la fin, à des sujets d'ordre assez élevé.

Ce que révèlent ces divers ouvrages, c'est le souci de la clarté de l'exposition, de la rigueur du raisonnement et de la mise en relief des méthodes. Les auteurs se préoccupent sans cesse d'élucider par de nombreuses applications les théories exposées. Lorsque plusieurs méthodes se présentent, ils développent de préférence celle qui leur paraît la plus féconde ou qui est susceptible d'une extension ultérieure. Chaque volume contient, sous la forme de derniers chapitres, de Notes ou d'Appendices, des compléments traitant de matières qui, sans être explicitement dans les programmes, s'y rattachent immédiatement, éclaircissant ainsi les difficultés, éveillant l'intérêt des lecteurs en leur faisant comprendre que la science est allée beaucoup plus loin, et leur inspirant par suite le goût et le désir de continuer son étude.

Dans le développement des sujets classiques, les auteurs se sont abstenus autant que possible d'innovations. Mais il en est quelques-unes qui s'imposent, que réclament depuis longtemps tous les bons esprits, qui sont même entrées dans la pratique de l'enseignement de beaucoup de professeurs. Les auteurs guidés, comme ils le déclarent, par les éminents conseils de M. Darboux, n'ont pas reculé devant l'introduction de ces innovations dans leurs ouvrages, et ils ont pu ainsi simplifier et élucider certaines théories jusqu'à présent compliquées et obscures.

C'est ainsi que, dans ses *Leçons d'Algèbre*, M. Bourlet facilite considérablement l'exposé de la théorie des équations du premier degré en la faisant précéder de quelques notions très brèves de Géométrie analytique, celles qui sont nécessaires pour arriver à montrer que l'équation d'une droite est du premier degré.

Ces notions fort simples et d'un caractère bien élémentaire sont indispensables pour faire comprendre toute la portée de la discussion des équations du premier degré. En montrant comment on peut représenter graphiquement la fonction du premier degré, on met l'élève en état de saisir les questions plus difficiles qui vont se présenter pour la discussion des fonctions du second degré.

Pour l'étude de la variation de ces fonctions, M. Bourlet prenant une initiative depuis longtemps désirée (1), a résolument abandonné les méthodes dites élémentaires, dont l'exposition présente tant de difficultés et qui ne se prêtent pas d'ailleurs à la généralisation, et adopté la *méthode des dérivées* qui, sans être plus difficile à concevoir est d'une application plus régulière, plus aisée et surtout plus féconde. Cette méthode initie les élèves, aux idées essentielles de limites et de continuité ; la simple définition des coordonnées précédemment donnée rend les résultats tangibles en permettant de construire la courbe représentative de chaque fonction étudiée. Les élèves qui ont bien compris la théorie élémentaire exposée dans le corps du volume passent sans aucune peine au complément de la même étude que M. Bourlet a placé dans un Appendice, et qui contient sur les fonctions circulaires, la construction des courbes, etc., des notions du plus grand intérêt pour ceux de ces élèves qui sont destinés à suivre le cours de mathématiques spéciales.

Chacun des volumes qui composent le Cours complet de Mathématiques élémentaires demanderait une analyse très détaillée ; mais, dans les limites de notre cadre, cette analyse se réduirait presque forcément à une sèche énumération des matières. Les *Leçons d'Arithmétique* de M. J. Tannery (1894) et les *Leçons de Cosmographie* de MM. Tisserand et Andoyer (1895) sont des livres déjà bien connus et d'ailleurs grandement recommandés par la notoriété et la compétence de leurs auteurs ; la plupart des journaux scientifiques en ont rendu compte et ont été unanimes dans la constatation du mérite de ces ouvrages. Il en est de même des *Leçons d'Algèbre* de M. Bourlet (1896) ; nous venons du reste d'indiquer deux points principaux qui distinguent ces Leçons des Traités d'Algèbre parus jusqu'à ce jour, et le seul vœu que nous aurions à émettre serait l'introduction, soit au Livre II soit dans un Appendice, de quelques notions élémentaires sur les déterminants permettant d'énoncer dans toute leur généralité les règles de Cramer et la règle de l'élimination du premier degré. Il ne nous reste donc qu'à rendre compte des deux volumes parus en 1898.

---

(1) Tout récemment, dans un remarquable compte rendu (*Enseignement mathématique*, n° 1, p. 67), M. le professeur Greenhill signalait le grand avantage que possède l'étudiant français d'avoir été initié, dès ses premiers pas en Algèbre, à la conception fondamentale d'une quantité variable et de ses dérivés. C'est en effet ce qui devrait être, ce que presque tous les professeurs réclament ; mais on ne saurait dire que ce progrès considérable soit effectivement réalisé ; il faut espérer que l'heureuse initiative prise par M. Bourlet permettra d'atteindre un but si désirable. — Voir également sur ce sujet : C.-A. Laisant, *la Mathematique*, p. 214.

Les *Leçons de Trigonométrie rectiligne* de M. Bourlet sont conçues dans le même esprit et d'après les mêmes principes que ses *Leçons d'Algèbre*, dont elles sont la suite naturelle. L'auteur, après une Introduction où il complète la théorie des segments et établit celle des projections, divise son ouvrage en trois Livres, contenant toutes les matières du programme de la classe de mathématiques élémentaires, et un Appendice présentant tous les compléments nécessaires aux élèves de mathématiques spéciales.

La division en trois Livres (Formules fondamentales concernant les angles, arcs, lignes trigonométriques. — Construction et usages des tables; équations trigonométriques. — Résolution des triangles et applications diverses) est celle que l'expérience a consacrée et que tous les Traités de Trigonométrie ont adoptée. Dans l'exposition de cette science, il n'y a en effet aucune innovation de principe à introduire (1). Il nous paraît donc inutile de donner un plus long détail; il suffira de dire que l'ouvrage est aussi complet que possible sans jamais cesser d'être élémentaire, et que l'auteur a fait la plus large place aux applications et au développement des procédés de calcul. Chacun des dix-huit chapitres qui composent les trois Livres est suivi d'un grand nombre d'exercices proposés.

L'Appendice, destiné aux élèves de mathématiques spéciales, peut sembler, au premier abord, en contradiction avec le plan général du Cours complet; mais il est ici parfaitement justifié, car il n'y a rien, dans les compléments de Trigonométrie, qui ne puisse être compris par un bon élève de Mathématiques élémentaires; et d'ailleurs, il y a grand avantage, toutes les fois que cela est possible comme dans le cas actuel, à mettre entre les mains des élèves un ouvrage qui puisse leur servir dans tout le cours de leurs études.

Les *Leçons de Géométrie élémentaire* (Géométrie plane), de M. Hadamard, débutent par une Introduction ne donnant avec raison que les premières définitions strictement nécessaires pour aborder l'étude de la Géométrie. L'auteur adopte ensuite la division classique en quatre Livres; mais le troisième est doublé par un Complément de même importance exposant, sans sortir du domaine élémentaire, celles des théories de la Géométrie moderne qui ont pris place d'une façon définitive dans l'enseignement. Une énumération sommaire des chapitres nous paraît ici indispensable pour donner une idée du plan de l'ouvrage et de l'enchaînement logique des matières.

Le Livre I^er^ (*De la ligne droite*) comprend six chapitres : Angles. Triangles. Perpendiculaires et obliques. Cas d'égalité des triangles rectangles; propriétés de la bissectrice d'un angle. Droites parallèles. Parallélogrammes; translations. Droites concourantes dans un triangle.

Livre II (*Du cercle*), sept chapitres : Intersection d'une droite et d'un cercle. Propriétés du diamètre. Arcs et cordes. Intersection de deux cercles. Mesure des angles. Construction. Déplacement des figures.

Livre III (*De la similitude*), sept chapitres : Lignes proportionnelles. Similitude des triangles. Relations métriques relatives aux triangles. Lignes proportionnelles dans le cercle; axe radical. Homothétie et similitude. Constructions. Polygones réguliers; mesure de la circonférence.

(1) S'il n'y a pas, relativement à l'exposition de la Trigonométrie, d'innovations compatibles avec les programmes actuels, il y aurait bien des remarques à faire sur le mode de distribution de l'enseignement des éléments. Consulter à ce sujet l'excellent article de M. H. Fehr (*Enseignement math.*, n° 1, p. 45).

Livre III (*Compléments*), sept chapitres : Signes des Segments. Transversales. Rapport anharmonique ; faisceaux harmoniques. Pôles et polaires dans le cercle. Figures inverses. Problèmes des cercles tangents. Propriétés du quadrilatère inscrit.

Livre IV (*Des aires*), quatre chapitres : Mesure des aires. Comparaison des aires. Aire du cercle. Constructions.

L'auteur a revu avec le plus grand soin tous les raisonnements classiques et a pu en modifier très avantageusement quelques-uns, soit sous le rapport de la rigueur, soit sous le rapport de la simplicité. Par exemple, la considération du sens de rotation des angles, défini dès le premier chapitre, lui permet de donner aux énoncés du second Livre ainsi qu'à plusieurs des suivants toute la netteté, la simplicité et la généralité désirables.

M. Hadamard a multiplié les exercices autant que le comportait le cadre de son ouvrage. A cet effet, il propose des questions de difficulté très différente et graduellement croissante qu'il divise en trois catégories : 1° des exercices placés à la fin de chaque chapitre et en général très simples, surtout les premiers d'entre eux ; 2° des exercices sur l'ensemble de chaque Livre, d'une solution moins immédiate, quoique toujours à la portée des élèves ; 3° des énoncés de problèmes relativement difficiles, rejetés à la fin du volume.

L'ouvrage se complète par quatre Notes. Dans la Note A, d'une très grande importance, l'auteur expose, en ce qui concerne la démonstration des théorèmes, la solution des problèmes, les constructions, les transformations, les principes fondamentaux de la *méthode en géométrie*, principes dont les commençants devraient être pénétrés dès la première année de l'enseignement et sur lesquels il est essentiel d'appeler fréquemment leur attention.

La Note B sur le *Postulatum d'Euclide* que, dans le corps du volume, M. Hadamard a admis comme axiome, donne un aperçu tout à fait élémentaire des graves questions soulevées à ce sujet depuis le commencement du siècle et qui a donné naissance à la géométrie non-euclidienne.

Les Notes C et D ont un caractère plus spécial. La première comble une lacune de la solution donnée par Gergonne du problème des cercles tangents ; la seconde fait disparaître, d'une manière simple et ingénieuse, le postulatum qui existe dans la théorie ordinaire de l'aire.

Peut-être sera-t-il utile, dans une seconde édition, d'ajouter une Note développant et précisant quelques-unes des théories si importantes du Complément du Livre III, notamment celles qui concernent la Géométrie sur la droite, et donnant, par exemple, quelques notions succinctes sur l'involution dont il est incidemment question dans les exercices de la fin du volume. D'ailleurs, les Notes ont un but éminemment utile, celui de permettre de jeter un coup d'œil sur les conséquences immédiates de l'enseignement donné et la liaison intime de ses diverses parties : on pourrait, croyons-nous, profiter de cette Note additionnelle pour développer *un peu* les premières notions de Géométrie analytique que contient l'Algèbre de M. Bourlet. Quelques définitions et considérations sur les signes des aires nous paraîtraient enfin pouvoir être ajoutées utilement au Livre IV.

La Géométrie plane de M. Hadamard nous fait vivement désirer la publication la plus prompte possible du volume qui doit être consacré à la Géométrie de l'espace. En l'étudiant, on reconnaît, par la facilité d'exposition

qui résulte des renvois aux ouvrages précédemment publiés de MM. Tannery et Bourlet, le grand avantage d'un Cours complet de Mathématiques élémentaires et la justesse de la pensée qui a inspiré celui dont nous n'avons pu rendre que trop sommairement compte.

L. Ripert (Paris).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXXVIII; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 1 (2 janvier). — État de l'Académie. — Allocution de MM. Wolf et Van Tieghem, président sortant et président pour 1899. — G. Poisson : Sur la propagation des ondes liquides dans les cours d'eau.

N° 2 (9 janvier). — E. Fabry : Généralisation du prolongement analytique d'une fonction. — Servant : Sur les points singuliers d'une fonction définie sur une série de Taylor. — E.-O. Lovett : Sur la correspondance entre les lignes droites et les sphères. — Ribière : Sur la flexion des cylindres à base circulaire.

N° 3 (16 janvier). — Du Ligondès : Sur la variation de la densité à l'intérieur de la Terre. — G. Gallice : Sur une nouvelle règle à calcul. — N. Saltykow : Sur les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles.

N° 4 (23 janvier). — E. Picard : Sur le prolongement des fonctions. — N. Saltykow : Généralisation de la première méthode de Jacobi sur l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. — G.-A. Miller : Sur les groupes d'opérations. — Crelier : Sur le développement de certaines irrationnelles en fraction continue. — C. Guichard : Sur la déformation des quadriques de révolution. — A. Pellet : Sur l'équation normale des surfaces.

N° 5 (30 janvier). — N. Seltykow : Sur la généralisation de la première méthode de Jacobi. — E. Maillet : Sur les groupes de classe $N-u$ et de degré N au moins $u-1$ fois transitifs. — Lémeray : Sur le problème de l'itération. — Steckloff : Sur le développement d'une fonction donnée suivant les fonctions harmoniques. — E. Borel : Sur le prolongement des fonctions analytiques. — A. Pallet : Sur les systèmes orthogonaux. — L. Raffy : Surfaces doublement cylindrées et surfaces isothermiques. — Tzitzéica : Sur les surfaces à courbure totale constante. — Blutel : Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. — Bouasse : Sur les courbes de traction.

N° 6 (6 février). — A. Hurwitz : Sur un théorème de M. Hadamard. — M. Brillouin : Théorie moléculaire du frottement des solides polis.

N° 7 (13 février). — S. Pincherle : Sur les séries de puissances toujours divergentes. — L. Autonne : Sur les intégrales algébriques de l'équation de Riccati. — G. Poisson : Sur la voûte élastique. — L. de la Rive : Sur la propagation d'un allongement graduel dans un fil élastique.

N° 8 (20 février). — E. Borel : Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles. — Le Roy : Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. — E. Cahen : Sur

les formes de différentielles invariantes vis-à-vis de certains groupes.

N° 9 (27 février). — G. Darboux : Notice sur Sophus Lie. — A. Laussedat : Sur de nouvelles et importantes applications faites au Canada de la méthode du lever des plans à l'aide de la Photographie. — E. Vessiot : Sur les équations linéaires aux dérivées partielles.

American Journal of mathematics, edited by Th. Craig. and Newcomb ; vol. XXI; prix d'abonnement annuel : 5 dollars ; Baltimore, John Hopkins Press, 1899.

N° 1 (janvier). — F.-H. Saffard : Systems of Revolution and their Relation to Conical Systems, in the Theory of Lamé 's Products. — A. Latham Baker : Elementary proof of Cauchy's Theorem. — C.-L. Bouton : Invariants of the general Linear differential Equation and their relation to the Theory of continuous Groups.

Annali di Matematica pura ed applicata, dirigées antérieurement par E. Brioschi, et continuées par les professeurs E. Bettrami, L. Cremona, U. Dini et G. Jung ; série 3, t. II. Prix d'abonnement à un volume : 16 L.; Milan, C. Reberchini, 1898-1899.

Fasc. 1. — Almansi : Sul integrazione dell' equazione differentiale $\Delta^{2n} = 0$. — Ciani : Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer.

Atti della Reale accademia dei Lincei; anno 296, série 5a, vol. VIII, 1899 ; Rendiconti ; Rome, tip. della R. acc. dei Lincei.

Fasc. 1 (8 janvier). — Dini : Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine. — Somigliana : Sulle funzioni reali d'una variabile. — Bortolotti : Sulla convergenza delle frazioni continue algebriche ; Sulla representazione aprossimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.

Fasc. 2 (22 janvier). — Bortolotti : Sulla rappresentazione approssimata di funzioni algebriche per mezzo di funzioni razionali.

Fasc. 3 (5 février). — Voigt : Dimostrazione semplice della sviluppabilità in serie di Fourier di una funzione angolare finita e ad un sol valore. — Almansi : Sull'integrazionne dell'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$.

Bolletino di Bibliografia e Storia delle Scienze mathematiche, publié par Gino Loria : 1re année, 1898. Prix d'abonnement annuel : Italie, 6 L.; Etranger, 7 L. 1/2. Turin, C. Clausen.

Le petit volume que forme la première année de cette intéressante et utile publication contient un article de M. Gino Loria sur l'histoire de la Strophoïde, un de M. Vassilief sur Tchebychef et son œuvre scientifique, une abondante bibliographie, des programmes de Cours universitaires, et d'importantes Notices sur divers points.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par MM. Humbert et G. Papelier; 9e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr.; Etranger, 9 fr. Paris, Nony.

N° 5 (janvier 1899). — Fontené : Note sur le lieu des foyers des sections planes d'une quadrique. — Ch. Biocue : Note sur le nombre des conditions exprimant qu'une surface algébrique passe par une courbe donnée.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, publié par G. Lazzeri ; organo dell' associazone « Mathesis » ; 2e série, vol. I ; 1898-1899.

Supplemento al periodico di Matematica, 2e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : au *Periodico :* Italie, L. 8; Etranger, L. 9; au *Supplemento :* L. 2 et 2,50; pour les abonnés au *Periodico :* L. 1,50 et 2,00. Livourne, R. Ginsti.

Il Pitagora, Giornale di Matematica per gli lunni delle scuole secondarie; publié par G. Fazzari, 5e année, 1er semestre. Prix d'abonnement semestriel : Italie, L. 1,00; Union postale, 1,30. Palerme, D. Vena, 1899.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver. W. Kapteyn, P. Zeeman; t. VII, 1re partie (1898, avril-octobre). Prix de l'abonnement annuel : 4 florins, ou pour l'étranger 8 fr. 50. Amsterdam, Leipzig, Paris, Londres, Edimbourg, 1899.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann; 30e année, 1899. Teubner, Leipzig.

No 1 (janvier). — W. Gœring (Dresde) : Sur les racines rationnelles de l'équation cubique réduite et des équations réduite de degré supérieur.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von Prof. Dr B. Schwalbe und Prof. Fr. Pietzker; 4e année, nos 5 et 6; 1898. O. Salle, Berlin.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von E. Czuber, A. Becntel, M. Gloeser; 24e année, nos 1 et 2, 1899. Hölder, Vienne.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. L. Gegenbauer; 10e année, 1899. Eisenstein et Cie, Vienne.

No 1. — F.-J. Studnicka : Beiträge zur Determinanten-Theorie. — S. Kantor : Neue Acquivalenz-theorie für die linearen Systeme rationaler, elliptischer und hypterelliptischer Curven der Ebene. — A Klingatsch : Eine Abbildung der Kugel auf den Rotationskegel. — L. Klug : Die Verallgemeinerung des Pythagoräischen Lehrsatzes auf den n-dimensionalen Raum. — E. Dintzl : Ueber den zweiten Ergänzungssatz des biquadratischen Reciprocitatsgesetzes.

Zeitschr. f. lateinlose höh Schulen. — 10e année, nos 4 et 5, janv. 1899. Leipzig, Teubner.

J. d'Azevedo Albuquerque. — **Arithmetica, Algebra e Geometria** para o ensino da IV e V classes dos Lyceus, com 250 exercicios; 1 vol. in-8o, 381 p.; Porto, 1899.

Can. B. Raganti. — **Aritmetica pratica,** per le tre prime classi ginnasiali; 1 vol. in-12, 191 p.: prix : 1 L. 70; Sarzana, G. Tellarini, 1898.

Can. B. Raganti. — **Aritmetica ragionata,** per la IV et V classe ginnasiale; 1 vol. in-12, 168 p.; prix : 1 L. 50; Sarzana, G. Tellarini, 1898.

H. Bork, P. Crantz, E. Haentzschel. — **Mathematischer Leitfaden für Realschulen.** — Zweiter Theil : Trigonometrie und Stereometrie. Leipzig, Dürr, 1898.

H. Bork. — **Mathematische Hauptsætze für Gymnasien.** — Zweiter Theil; Zweiter Auflage. Leipzig, Dürr.

E. Jackwitz. — **Gleichgewichtlagen und Schwingungen eines Pendelsystemes.** — *Programme*, Schrimm (Prusse), Pâques, 1899. Leipzig, Teubner.

Dr G.-M. Testi. — **Corso di Matematiche.** — Vol. I : Aritmetica ragionata : 2e édit., in-8° ; prix : 2 L. 20. — Vol. II : Algebra elementare, in-8° ; prix : 4 L. — Vol. III : Geometria elementare, in-8° ; prix : 3 L. 50. — Livourne, R. Giusti, 1892-1898.

NÉCROLOGIE

M. SOPHUS LIE

La mise en pages de ce numéro était achevée, lorsque nous avons appris la nouvelle bien inattendue de la mort de M. Sophus Lie, décédé le 18 février 1899. C'est une grande perte pour la Science mathématique contemporaine. Le temps et la place nous manquent pour rendre compte de l'œuvre considérable accompli par le célèbre géomètre norvégien ; et nous nous bornons à extraire quelques renseignements biographiques de l'intéressante notice communiquée par M. Darboux à l'Académie des Sciences de Paris.

M. Sophus Lie était né le 17 décembre 1842. Il quitta l'Université de Christiania en 1865, et c'est seulement alors qu'il se dirigea vers les Sciences mathématiques. Son premier travail date de 1869, et, à partir de 1872, il fit paraître toute une série de brillants mémoires.

Vers 1870, il avait habité la France ; en 1877 il fut professeur à l'Université de Christiania, puis à celle de Leipzig de 1886 à 1898. Il y a quelques mois, il revenait à Christiania pour y occuper une chaire qui lui avait été réservée par le Parlement. C'est là que l'anémie cérébrale vient de le terrasser.

« Les admirables travaux de Sophus Lie, dit M. Darboux, à la fin de « la notice précitée, ont joui du privilège, aujourd'hui bien rare, de « réunir dans une commune admiration les géomètres aussi bien que « les analystes. Il a découvert des propositions fondamentales qui « préserveront son nom de l'oubli ; il a aussi créé des méthodes et des « théories qui, pendant longtemps encore, exerceront leur influence « féconde sur le développement des Mathématiques. Le pays qui l'a vu « naître et qui a su l'apprécier peut placer avec orgueil son nom à « côté de celui d'Abel, dont il a été le digne émule et dont il eût été si « heureux de célébrer le prochain centenaire. »

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LA LOGIQUE ET L'INTUITION

DANS LA SCIENCE MATHÉMATIQUE

ET DANS L'ENSEIGNEMENT

Pour bien faire comprendre la question que je vais traiter et qui est à mes yeux d'une importance capitale pour l'enseignement mathématique, il faut que je jette un petit coup d'œil rétrospectif sur l'histoire du développement de la science.

Si nous lisons un livre écrit il y a cinquante ans, la plupart des raisonnements que nous y trouverons nous sembleront dépourvus de rigueur.

On admettait à cette époque qu'une fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler ; on le démontre aujourd'hui ; on admettait que les règles ordinaires du calcul sont applicables aux nombres incommensurables ; on le démontre aujourd'hui. On admettait bien d'autres choses qui quelquefois étaient fausses.

Nous voyons donc qu'on a marché vers la rigueur ; j'ajouterai qu'on l'a atteinte et que nos raisonnements ne paraîtront pas ridicules à nos descendants ; je veux parler, bien entendu, de ceux de nos raisonnements qui nous satisfont.

Mais comment a-t-on atteint la rigueur ? C'est en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle. Autrefois, on partait d'un grand nombre de notions, regardées comme primitives, irréductibles et intuitives ; telles étaient celles de nombre entier, de fraction, de grandeur continue, d'espace, de point, de ligne, de surface, etc. Aujourd'hui une seule subsiste, celle du nombre entier ; toutes les autres n'en sont que des combinaisons, et à ce prix on atteint la rigueur parfaite.

Nos pères inscrivaient dans une aire plane une série de rectangles, et obtenaient comme limite de la somme de ces rectan-

gles une intégrale qui représentait cette aire plane. En effet, disaient-ils, la différence entre la surface cherchée et la somme tend vers zéro ; car on peut la rendre plus petite que toute quantité donnée. Ils faisaient ce raisonnement sans scrupule, parce qu'ils croyaient savoir ce que c'est qu'une surface. Nous, au contraire, ce raisonnement ne nous satisfait plus, parce que nous savons qu'on ne sait pas ces choses-là en naissant, que l'on ne peut savoir ce que c'est qu'une surface que quand on sait le calcul intégral. Nous ne démontrons plus que la surface est égale à l'intégrale, mais nous considérons l'intégrale comme la définition de la surface. Cette notion de surface, autrefois fondée sur l'intuition, ne nous paraît plus légitime par elle-même.

D'autre part, les notions mathématiques n'ont acquis cette pureté parfaite qu'en s'éloignant de la réalité. On peut parcourir tout le domaine mathématique sans rencontrer aucun des obstacles qui le hérissaient autrefois ; mais ces obstacles n'ont pas disparu, ils ont seulement été transportés à la frontière ; et on aura à les vaincre de nouveau si on veut franchir cette frontière pour entrer dans le domaine de la pratique.

On possédait une notion plus ou moins vague, formée d'éléments disparates, les uns a priori, les autres fournis par la généralisation de données d'expériences ; on croyait connaître par intuition ses principales propriétés. Aujourd'hui on rejette tous les éléments empiriques, on ne conserve que les éléments a priori ; on prend l'une des propriétés pour définition et on en déduit toutes les autres par un raisonnement rigoureux. Mais il reste à prouver que la propriété qui sert de définition appartient en effet aux objets réels, que nous connaissions par l'expérience, et d'où nous déduisions autrefois la notion intuitive par une généralisation inconsciente. C'est ce que M. Milhaud a fort bien mis en évidence dans la thèse qu'il a soutenue devant la Faculté des Lettres de Paris.

Voilà dans quel sens la science a évolué depuis un demi-siècle.

C'est alors qu'on vit surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc., etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions

étranges qui sont les plus générales : au contraire, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées, et qui suivent des lois simples, n'apparaissent plus que comme un cas très particulier ; il ne leur reste plus qu'un tout petit coin.

Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Or, si la logique doit être notre seul guide dans les questions d'enseignement, c'est évidemment par les fonctions les plus bizarres qu'il faut commencer. C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique. Faute de l'avoir fait, on n'atteindra jamais la rigueur, ou on ne l'atteindra que par étapes.

Voilà à quoi la logique absolue voudrait nous condamner ; devons-nous lui faire ce sacrifice ? Telle est la question à laquelle, pour mon compte, je n'hésite pas à répondre non.

Sans doute il est dur pour un maître d'enseigner un raisonnement qui ne le satisfait pas entièrement ; et ce ne sera à ses yeux qu'un palliatif insuffisant de dire : nous admettons que, ou : il arrive souvent que, au lieu de dire : il est évident que.

Mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement, et on doit se préoccuper avant tout de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne.

Les zoologistes prétendent que le développement embryonnaire d'un animal résume en un temps très court toute l'histoire de ses ancêtres des époques géologiques. Il semble qu'il en est de même du développement des esprits. La tâche de l'éducateur est de faire repasser l'esprit de l'enfant par où a passé celui de ses pères, en passant rapidement par certaines étapes mais en n'en supprimant aucune. A ce compte, l'histoire de la science doit être notre guide.

Quand un élève commence sérieusement à étudier les mathématiques, il croit savoir ce que c'est qu'une fraction, ce que c'est que la continuité, ce que c'est que l'aire d'une surface courbe ; il considère comme évident, par exemple, qu'une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler. Si, sans autre préparation, vous venez lui dire : Non, tout cela n'est pas évident,

il faut que je vous le démontre ; et si dans la démonstration vous appuyez sur des prémisses qui ne lui semblent pas plus évidentes que la conclusion, que pensera ce malheureux ? Il pensera que la science mathématique n'est qu'un entassement arbitraire de subtilités inutiles ; ou bien il s'en dégoûtera ; ou bien il s'en amusera comme d'un jeu et il arrivera à un état d'esprit analogue à celui des sophistes grecs.

Au contraire, quand il sera plus avancé, quand il se sera familiarisé avec le raisonnement mathématique et que son esprit se sera mûri par cette fréquentation même, les doutes naîtront d'eux-mêmes, et alors votre démonstration sera la bienvenue. Elle en éveillera de nouveaux, et les questions se poseront successivement à l'enfant, comme elles se sont posées successivement à nos pères, jusqu'à ce que la rigueur parfaite puisse seule le satisfaire. Il ne suffit pas de douter de tout, il faut savoir pourquoi l'on doute.

Ce n'est pas tout ; j'ai dit qu'au point de vue de la pure logique, il ne reste plus qu'une notion irréductible, celle du nombre entier, et que toutes les autres n'en sont que des combinaisons. Mais des combinaisons pareilles, on en peut imaginer des milliers ; pourquoi celles-là plutôt que d'autres ? Le choix ne s'explique que par le souvenir de la notion intuitive dont cette combinaison a pris la place ; et si ce souvenir même fait défaut, le choix semblera injustifié. Or, pour comprendre une théorie, il ne suffit pas de constater que le chemin que l'on a suivi n'est pas coupé par un obstacle, il faut se rendre compte des raisons qui l'ont fait choisir. Pourra-t-on donc jamais dire qu'on comprend une théorie si on veut lui donner d'emblée sa forme définitive, celle que la logique impeccable lui impose, sans qu'il reste aucune trace des tâtonnements qui y ont conduit ? Non, on ne la comprendra pas réellement, on ne pourra même la retenir, ou on ne la retiendra qu'à force de l'apprendre par cœur.

Le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse. C'est par elle que le monde mathématique reste en contact avec le monde réel ; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler l'abîme qui sépare le symbole de

la réalité. Le praticien en aura donc toujours besoin, et pour un géomètre pur il doit y avoir cent praticiens.

Mais pour le géomètre pur lui-même, cette faculté est nécessaire ; c'est par la logique qu'on démontre, mais c'est par l'intuition qu'on invente ; et il ne suffit pas d'être à même de critiquer les théorèmes des autres, il faut en inventer de nouveaux. Il ne suffit pas de savoir faire des combinaisons correctes, il faut posséder l'art de choisir entre toutes les combinaisons possibles. Cet art, j'ai dit plus haut pourquoi, c'est l'intuition qui nous l'apprend. Sans elle le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.

Or, comment cette faculté se développerait-elle si dès qu'elle se montre, on la pourchasse et on la proscrit, si on apprend à s'en défier avant de savoir ce qu'on en peut tirer de bon ?

Mais l'art de raisonner juste n'est-il pas aussi une qualité précieuse, que le professeur de mathématiques doit avant tout cultiver ? Je n'ai garde de l'oublier, et on doit s'en préoccuper avant tout dès le début ; mais on a assez d'occasions d'exercer les élèves au raisonnement correct, dans les parties des mathématiques où les inconvénients que j'ai signalés ne se présentent pas. On a de longs enchaînements de théorèmes où la logique absolue a régné du premier coup et pour ainsi dire tout naturellement, qui ont par conséquent conservé la forme que les premiers géomètres leur avait donnée.

Ce qu'il faut éviter seulement, c'est de chercher la petite bête dans l'exposition des premiers principes. Cela n'empêche pas d'apprendre à raisonner juste, pourvu que l'on ait soin de ne pas donner aux élèves des idées fausses. Quelquefois il faudra pour cela beaucoup de tact de la part du maître ; souvent il lui suffira, comme je l'expliquais plus haut, de dire : nous admettrons que, au lieu de dire : il est évident que.

Parmi les jeunes gens qui reçoivent une éducation mathématique complète, les uns doivent devenir des ingénieurs ; ils apprennent la Géométrie pour s'en servir ; il faut avant tout qu'ils apprennent à bien voir et à voir vite ; c'est de l'intuition qu'ils ont besoin d'abord. Les autres, moins nombreux, doivent à leur tour devenir des maîtres ; il faut donc qu'ils aillent jusqu'au fond ; une connaissance approfondie et rigoureuse des

premiers principes leur est avant tout indispensable. Mais ce n'est pas une raison pour ne pas cultiver chez eux l'intuition, car ils se feraient une idée fausse de la science s'ils ne la regardaient jamais que d'un seul côté, et d'ailleurs ils ne pourraient développer chez leurs élèves une qualité qu'ils ne posséderaient pas eux-mêmes.

J'ai écrit un bien long article sur une question bien abstraite et bien générale. Pour que le lecteur me le pardonne, je vais énoncer quelques conclusions précises.

En spéciales et dans la première année d'École polytechnique, on ne parlera pas des fonctions sans dérivées, on n'en parlera que pour dire : il peut y en avoir, mais nous ne nous en occuperons pas.

La première fois qu'on parlera aux élèves des intégrales, il faudra les définir par les surfaces, et ce n'est que quand ils auront pris beaucoup d'intégrales qu'on leur donnera la définition rigoureuse.

H. Poincaré (Paris).

UN CHAPITRE DE L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES (1)

Le 10 mars 1897, un siècle après la présentation de l'original, l'Académie royale des sciences et lettres de Danemark a publié une traduction française d'un mémoire de Wessel intitulé : « Om « Direktionens analytiske Betegning et Forsøg, anvendt fornem- « melig til plane og spheriske Polygoners Opløsning » ou, Un essai sur la représentation analytique des directions avec des

(1) Cette étude si intéressante de M. Beman sur le Mémoire de Wessel a fait l'objet d'une communication au Congrès de l'association américaine pour l'avancement des sciences, à Detroit (1897). Les lecteurs de *l'Enseignement mathematique* prendront connaissance, avec grand intérêt, de la traduction française dont M. Berdellé a bien voulu se charger, à l'intention de notre Recueil.

La Direction.

applications, en particulier à la résolution des polygones plans et sphériques.

Cet écrit, qui traite de la représentation géométrique des quantités imaginaires, qui fut lu plusieurs années avant le fameux essai d'Argand, et qui parle sur ce sujet d'une façon tout à fait exacte, resta enterré dans l'oubli pendant près d'un siècle, jusqu'au moment où il en fut tiré, en 1895, par une thèse de S.-D. Christensen sur le développement des Mathématiques en Danemark et en Norwège pendant le XVIII^e^ siècle.

En considérant que ce mémoire de Wessel est relativement encore inconnu, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt de composer la présente esquisse sur le développement du traitement géométrique des quantités imaginaires, particulièrement dans la dernière partie du XVIII^e^ siècle et la première du XIX^e^.

Nous trouvons que la racine carrée d'une quantité négative apparaît pour la première fois dans la *Stéréométrie d'Héron* (100 ans avant Jésus-Christ). Après avoir donné une formule correcte pour la détermination d'un tronc de pyramide à base carrée et l'avoir appliquée avec succès au cas où le côté de la base inférieure est 10, celui de la base supérieure 2 et l'arête latérale 9, l'auteur s'efforce de résoudre le problème pour le cas où le côté de la base inférieure est 28, celui de la base supérieure 2 et l'arête latérale 15. Au lieu de la racine carrée de $81 - 144$ indiquée par la formule il met celle de $144 - 81$ et la pose égale à $8 - \frac{1}{16}$, c'est-à-dire il remplace $\sqrt{-1}$ par 1 et ne songe pas à observer que le problème est impossible. Cette méprise est-elle due à Héron ou à l'ignorance d'un copiste, c'est ce qu'on ne saurait déterminer.

Dans la solution du problème : trouver un triangle rectangle dont le périmètre est 12 et l'aire 7. Diophante, dans son Arithmétique (300 ans après J.-C.) résout l'équation $336\,x^2 + 24 = 172\,x$ et dit que l'équation ne peut être résolue à moins d'admettre que la moitié du coefficient de x diminué du produit par 24 du coefficient de x^2, puisse être un carré. Mais on ne fait pas remarquer que la valeur de x dans cette équation renferme le carré d'une quantité négative.

Bhaskara, né l'année du Seigneur 1114, dans son chapitre Vija

Ganita eut l'habileté de faire faire un pas à la question. Il y donne cette règle :

« Le carré d'un nombre positif, et de même celui d'un nombre « négatif, est positif, et la racine d'un nombre positif a deux « valeurs, une positive et une négative. Il n'y a pas de racine « d'un nombre négatif, et un tel nombre ne peut être un « carré. »

Le premier mathématicien qui a eu le courage de se servir effectivement dans le calcul de la racine carrée d'un nombre négatif fut Cardan. A une époque antérieure il avait déclaré que de pareilles quantités étaient tout-à fait impossibles, mais dans son *Ars Magna*, 1545, il discuta le problème : partager 10 en deux parties dont le produit doit être 40, et il obtint les deux valeurs $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$. Il les vérifia par la multiplication, mais il appela de pareilles quantités sophistiques, attendu qu'on ne peut admettre de calculer avec ces nombres comme avec des nombres purement négatifs ou d'autres, ni de leur attribuer une signification.

Bombelli, dans son Algèbre, 1572, donne nombre de règles sur l'usage de quantités telles que $a+b\sqrt{-1}$, mais sans faire le moindre effort pour éclaircir leur nature.

Girard sait que chaque équation a un nombre de racines égal à son degré, par conséquent il reconnaît l'existence de racines imaginaires. Dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre*, 1629, en discutant les racines de l'équation $x^2-4x+3=0$, il demande quelle pouvait être l'utilité de racines telles que $-1+\sqrt{-2}$ et $-1-\sqrt{-2}$; il répond qu'elles montrent la généralité de la loi de formation des coefficients, et qu'elles sont utiles pour cela même.

Descartes, dans sa *Géométrie*, 1637, n'émet pas d'idées neuves à ce sujet, mais il est le premier à appliquer les termes de réel et d'imaginaire pour marquer la différence entre les racines d'une équation.

Wallis, dans son *Traité d'Algèbre*, 1685, mena l'avant-garde dans les efforts faits pour interpréter géométriquement les racines carrées des nombres négatifs. Dans son chapitre LXVI, il dit :

« Ces quantités imaginaires, comme on les appelle communé- « ment, provenant de la racine supposée d'un carré négatif (si

« toutefois il y en a) sont réputées nous montrer quand le cas est « impossible.

« Et il en est en effet ainsi d'après la notion première et stricte « de ce qui nous est proposé. Car il n'est pas possible qu'un « nombre (positif ou négatif) multiplié par lui-même puisse pro- « duire par exemple — 4. Le même signe, que ce soit + ou —, « ne peut produire que +, et par conséquent pas — 4.

« Mais il est aussi impossible qu'une quantité, même sans « supposer que ce soit un carré, puisse être négative. Car il « n'est pas possible qu'une grandeur soit plus petite que rien, « qu'un nombre soit moindre que zéro.

« Et pourtant cette supposition (de quantités négatives) n'est « pas tout à fait aussi inutile ou absurde, si elle est bien com- « prise. Et bien que la simple notation algébrique signifie une « quantité plus petite que rien, pourtant quand elle sert à une « application physique elle indique une quantité aussi réelle que « celle qui aurait le signe +, mais devra être interprétée dans « un sens opposé. »

Il éclaircit cela au moyen de distances mesurées en avançant ou en reculant sur la ligne droite d'un chemin ordinaire, puis il dit :

« Maintenant ce qui est admis pour les lignes, doit, par la « même raison, l'être pour les plans. »

Ayant de la sorte justifié l'existence de plans négatifs, il continue ainsi :

« Mais maintenant (en supposant cette surface plane négative « de — 1600 perches en forme de carré) ne faut-il pas que ce « carré supposé ait un côté ? Et s'il en est ainsi, quel est ce « côté ?

« On ne peut dire ni que c'est + 40, ni que c'est — 40. Mais on peut plutôt dire que c'est $\sqrt{-1600}$, ou $10\sqrt{-16}$, ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$.

« Le $\sqrt{\ }$ indique une moyenne proportionnelle entre la quantité positive et la quantité négative. Or il est clair que $\sqrt{bc}$ indique « une moyenne proportionnelle entre $+b$ et $+c$, ou entre $-b$ « et $-c$. Ainsi $\sqrt{-bc}$ signifie une moyenne proportionnelle entre « $+b$ et $-c$ ou entre $-b$ et $+c$. »

Dans le chapitre LXVII, Wallis donne un exemple géométrique

d'une moyenne proportionnelle, présentant $\sqrt{bc}$ comme un sinus dans un cercle dont le diamètre est $b+c$. Après il trouve la base d'un triangle, étant donnés les deux côtés de l'angle opposé à cette base et à la hauteur partant de cet angle. Prenant AP = 20, PB = 15 et la hauteur PC = 12, au moyen du triangle PCB rectangle en C, il obtient deux valeurs réelles de la base AB. Après cela, posant AP = 20, PB = 12, et la hauteur PC = 15, il trouve pour cette base des valeurs imaginaires. Il les interprète ainsi :

« Cette impossibilité algébrique accuse une impossibilité dans « le cas géométrique proposé, et montre que le point B ne peut « se trouver dans la ligne AC tracée d'abord (en avant ou en « arrière) à partir de A.

« Cependant ces points sont (hors de cette ligne, mais) sur le « même plan. Si par chacun d'eux nous traçons les lignes AP et BP, « nous avons un triangle où les côtés AP, BP satisfont aux con- « ditions, et où l'angle PAC et la hauteur PC (sur AC et non « sur AB) sont tels qu'on les a demandés. »

Dans ce cas, il suppose le triangle BCP rectangle en C, et il continue :

« Et (voir la figure) quoique les deux lignes AB et AB ne « soient pas (comme dans le premier cas où elles sont situées « sur AC) le double de AC, pourtant la ligne de base où se trou- « vent Aβ et Aβ est le double de AC, c'est-à-dire si à chacun de « ces AB nous joignons Bα égale à l'autre de ces lignes, et avec « la même déclivité, la ligne ACα (distance de Aα) sera une ligne « droite égale au double de AC, comme l'est ACα dans le pre- « mier cas. La plus grande différence est ceci, que dans le premier « cas les points B et B se trouvant sur la ligne AC, les lignes AB « et AB n'en forment qu'une seule avec celle de la base, mais « que cela n'existe pas dans le dernier cas où B et B sont élevés « au-dessus de β et β (les points qui leur correspondent dans la « ligne de base, au-dessus desquels ils sont élevés) de telle manière « que le cas devienne possible (c'est-à-dire dans la relation où le « sinus-verse de CB est avec le diamètre PC). Mais dans les « deux cas ACα (la base de ABα) est égale au double de AC. »

« De manière que, tandis que dans le cas des racines négatives « nous sommes à dire que le point B ne peut être trouvé, comme « nous le supposions, en avant de A, dans la ligne AC, mais bien

« en arrière, dans la même ligne, il faut dire ici, dans le cas « d'une racine de carré négatif que le point B ne peut être trouvé « dans la ligne AC, mais au-dessus de cette ligne, dans le même « plan. J'ai bien plus largement insisté là-dessus parce que cette « idée, à ce que je pense, est nouvelle ; et c'est là la déclaration « la plus complète que je puisse imaginer pour expliquer ce « qu'on appelle communément des racines imaginaires. Et celles- « ci le sont. »

De ces extraits, il résulte que Wallis possédait, au moins en germe, quelques éléments de la méthode moderne d'addition et de soustraction des lignes dirigées.

Mais dans le siècle qui le suivit, aucun progrès ne fut fait.

Euler, par exemple, fit largement usage des imaginaires. Pourtant, dans son Algèbre 1770, il fit cette observation :

« Toutes les expressions telles que $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, etc., sont par « conséquent impossibles. Ce sont des quantités imaginaires, « puisqu'elles représentent des racines de quantités négatives ; et « de pareils nombres on peut dire certainement qu'ils ne sont « rien, ni plus grands que rien, ni plus petits que rien et qu'ils « constituent nécessairement l'imaginaire ou l'impossible. »

Le 10 mai 1797, un arpenteur du nom de Wessel présenta à l'Académie royale des sciences et lettres du Danemark un mémoire « sur la représentation analytique des directions. Il fut imprimé « en 1798 et parut dans le cinquième volume des *Mémoires de* « *l'Académie*, en 1799.

Caspar Wessel était né le 8 juin 1745 à Jonsrud, en Norwège, où son père était pasteur. Quoique l'un de quatorze enfants, il reçut une assez bonne éducation pour entrer en 1757 à la Haute-Ecole de Christiania, et pour aller en 1763 à Copenhague continuer ses études. En 1764, il fut engagé par l'Académie comme aide pour la triangulation et la préparation de la carte du Danemark. Jusqu'en 1805 il resta constamment au service de l'Académie comme arpenteur. Wessel était hautement estimé de ses contemporains, et, pour cette œuvre spéciale, sans compter les autres services rendus à l'Académie, il reçut de celle-ci la médaille d'argent et le recueil complet de ses mémoires. En 1819 lorsqu'un certain nombre de ces cartes furent déclarées vieillies, il fut fait une exception spéciale pour les déterminations trigono-

métriques de Wessel. En 1778 il passa un examen en droit romain. En 1815 il fut nommé chevalier de l'ordre du Danebrog. Il mourut en 1818. Quoique bien renommé comme arpenteur, Wessel fut passé sous silence comme mathématicien. Outre ce fait que cet écrit fut le premier reçu par l'Académie, aucun de ses membres, hors un seul, ne parla en sa faveur. L'acceptation fut due à Tetens, conseiller d'État, qui eut à examiner le manuscrit, et dont l'habileté pour ce genre de service était reconnue. Dans son histoire de l'Académie des sciences du Danemark, publiée en 1842, le professeur Jürgensen classa Wessel avec d'autres dans la catégorie suivante : « Les traités des autres mathématiciens sont des monographies dont la valeur scientifique n'est pas considérable » ou bien « ils sont trop spéciaux pour être plus amplement mentionnés. »

Dans l'introduction de son mémoire, Wessel dit :

« Le présent essai a pour objet la question de savoir comment « la direction doit être représentée analytiquement, c'est-à-dire « comment on devrait exprimer les segments des droites, si l'on « voulait, au moyen d'une équation unique entre un seul segment « inconnu et d'autres segments donnés, trouver une expression « représentant à la fois la longueur et la direction du segment « inconnu.

« Pour pouvoir répondre à cette question, je vais m'appuyer « sur deux considérations qui me paraissent évidentes. En « premier lieu, la variation de direction, qu'on peut produire « par des opérations algébriques, doit être représentée aussi par « leurs symboles. En second lieu, on ne peut soumettre la « direction à l'algèbre qu'en faisant dépendre ses variations « d'opérations algébriques. Or, selon la conception ordinaire, « on ne peut la transformer par ces opérations qu'en la direction « opposée, ou bien de positive en négative, et réciproquement. « Il s'ensuit que ces deux directions seulement seraient suscep- « tibles d'une représentation analytique conforme à la conception « connue, et que la solution du problème serait impossible pour « les autres directions. C'est probablement pour cette raison que « personne ne s'est occupé de cette matière. Sans doute on ne « s'est pas cru permis de rien changer à la définition une fois « adoptée des opérations. A cela il n'y a rien à objecter tant que

« la définition est appliquée à des quantités ordinaires; mais il
« existe des cas spéciaux où la nature propre des quantités semble
« nous inviter à donner aux opérations des définitions particulières.
« Alors, si l'on trouve ces définitions avantageuses, il me semble
« que l'on ne doit pas les rejeter. En effet, en passant de l'Arithmé-
« tique à l'analyse géométrique, c'est-à-dire des opérations rela-
« tives à des nombres abstraits aux opérations sur des segments
« de droite, on aura à considérer des quantités qui peuvent avoir
« entre elles non seulement les mêmes relations que les nombres
« abstraits, mais aussi un grand nombre de relations nouvelles.
« Essayons donc de généraliser la signification des opérations :
« n'en bornons pas, comme on l'a fait jusqu'à présent, l'usage
« aux segments de droite de même sens ou de sens opposés,
« mais étendons-en un peu la notion, de façon qu'elles s'appli-
« quent, non seulement aux mêmes cas qu'auparavant, mais
« encore à une infinité d'autres cas. Si, en même temps qu'on
« prend cette liberté, on respecte les règles ordinaires des
« opérations, on ne tombe pas en contradiction avec l'ancienne
« théorie des nombres, mais on la développe seulement, on
« s'accommode à la nature des quantités, et on observe la règle
« générale qui commande de rendre, petit à petit, plus aisée à
« comprendre, une théorie difficile. Il n'est donc pas absurde
« d'exiger qu'on prenne en Géométrie les opérations dans un
« sens plus étendu qu'en Arithmétique. On admettra aussi sans
« difficulté qu'il sera possible ainsi de faire varier d'une infinité
« de manières la direction des segments. Par là précisément,
« comme on le démontrera plus loin, non seulement on réussit
« à éviter toutes les opérations impossibles, et à expliquer ce
« paradoxe qu'il faut quelquefois avoir recours à l'impossible
« pour chercher le possible, mais encore on parvient à exprimer
« la direction des segments de droite situés dans un même plan,
« d'une manière aussi analytique que leur longueur, sans que la
« mémoire soit embarrassée de nouveaux symboles ou de nou-
« velles règles. Or il faut convenir que la démonstration générale
« de théorèmes géométriques, devient souvent plus facile lors-
« qu'on sait exprimer la direction d'une manière analytique et la
« soumettre aux règles des opérations algébriques, que lors-
« qu'on est réduit à les représenter par des figures qui ne sont

« applicables qu'à des cas particuliers. Il paraît donc être non « seulement admissible, mais même avantageux de se servir « d'opérations embrassant d'autres segments que ceux qui ont « le même sens ou le sens opposé.

« Pour ces raisons je me suis proposé :

« 1° De donner des règles des opérations de cette nature;

« 2° D'en montrer, par quelques exemples, l'application aux « cas où les segments se trouvent dans le même plan;

« 3° De déterminer par une méthode nouvelle, qui n'est pas algé- « brique, la direction des segments situés dans des plans différents;

« 4° D'en déduire la résolution générale des polygones plans « et des polygones sphériques;

« 5° De déduire de la même manière les formules connues de « la Trigonométrie sphérique.

« Voilà, brièvement indiqué, le contenu du présent mémoire. « Ce qui m'a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais « une méthode qui permît d'éviter les opérations impossibles; « l'ayant découverte, je l'ai employée pour me convaincre de la « généralité de certaines formules connues. »

C'est dans le mémoire lui-même qu'il faut voir comment l'auteur réussit à sortir du plan. Wessel dit :

« L'addition de deux segments se fait de la manière suivante : « on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se ter- « mine ; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de « la ligne brisée ainsi obtenue. »

Il étend sa définition à plus de deux segments, et il affirme :

« Dans l'addition des segments, l'ordre des termes est arbi- « traire, et la somme reste toujours la même. »

La définition du produit de deux segments est particulièrement remarquable :

« Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les « rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière « que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou « absolu qu'on a pris égal à 1 ; c'est-à-dire que :

« 1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils « puissent être placés dans le même plan que l'unité positive ;

« 2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs « comme l'autre l'est à l'unité ;

« 3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir « de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, « celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit « dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même « sens, que l'autre dévie de l'unité, en sorte que l'angle de « direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité « positive soit égale à la somme des angles de direction des « facteurs.

« Désignons par $+1$ l'unité rectiligne positive, par $+\varepsilon$ une « autre unité perpendiculaire à la première et ayant même « origine : alors l'angle de direction de $+1$ sera égal à 0° ; « celui de -1 à 180° ; celui de $+\varepsilon$ à 90° et celui de $-\varepsilon$ à « $-90°$ ou à 270° ; et selon la règle que l'angle de direction du « produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura :

$$\begin{array}{lll} (+1).(+1)=+1 & (+1).(-1)=-1 & (-1).(-1=+1 \\ (+1).(+\varepsilon)=+\varepsilon & (+1).(-\varepsilon)=-\varepsilon & (-1).(+\varepsilon)=-\varepsilon \\ (-1).(-\varepsilon)=+\varepsilon & (+\varepsilon).(+\varepsilon=-1 & (+\varepsilon).(-\varepsilon=+1 \\ & (-\varepsilon).(-\varepsilon=-1. & \end{array}$$

« Il en résulte que ε est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du « produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en « contradiction avec aucune des règles d'opérations ordinaires. »

Il est intéressant de remarquer que, tandis que Wessel fait de l'addition et de la multiplication de lignes dirigées une matière à définitions, Argand, dans son fameux mémoire de 1806, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, dit : « Certains « points de théorie en algèbre et en géométrie portent sur des « principes admis par l'induction et dont la certitude est établie « plutôt par l'exactitude des conséquences qui en découlent que « par les raisonnements sur lesquels on les fonde. »

Pourtant, dans son dernier envoi aux *Annales de Gergonne*, il avoue que « il n'y aura plus de difficulté si, comme l'a fait « M. Français, on établit comme définition ce que l'on entend « par rapport de grandeur et de position entre deux lignes. »

Après avoir expliqué que si φ représente un angle et $\sin\varphi$ un segment égal en longueur à son sinus, positif si l'arc mesuré se termine dans la première demi-circonférence, négatif s'il se

termine dans la seconde, $\varepsilon \sin \varphi$ désignera le sinus de l'angle φ en direction et en grandeur, Wessel montre qu'un rayon formant l'angle φ avec l'unité positive est égal à $\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi$. Dans la multiplication de deux rayons $\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi$ et $\cos u + \varepsilon \sin u$, il établit la loi distributive en la tirant des formules :

$$\sin (v + u) = \sin v \cos u + \cos v \sin u$$
$$\cos (v + u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u$$

au contraire d'Argand qui prend ces lois distributives pour en tirer les formules trigonométriques.

Une des phrases de cet ensemble mérite d'être remarquée.

« Mais si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne « se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité « absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente. C'est « pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication « de pareils segments. »

La manière de faire la division suit naturellement, et on prouve que les quantités indirectes (inverses) partagent avec les quantités directes cette propriété que si le dividende est une somme, vous obtenez en divisant chaque terme de cette somme par le diviseur, plusieurs quotients dont la somme est le quotient cherché.

Puis vient une discussion sur les puissances et les racines établissant ce fait que $(\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)^{\frac{1}{m}}$ n'a que m valeurs différentes. Dans le paragraphe suivant Wessel montre que la m^{me} puissance d'une ligne peut être mise sous la forme $e^{ma + mb\sqrt{-1}}$ où e^{ma} représente la longueur et mb l'angle de direction, et que nous avons ainsi une nouvelle manière de représenter la direction d'une ligne dans un plan au moyen des logarithmes naturels. Cette dernière chose n'est pas dite, mais il est facile de voir que Wessel était en possession des trois manières actuelles de représenter les nombres complexes :

$$a + b\sqrt{-1} \qquad r(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) \qquad \text{et} \qquad re^{\varphi\sqrt{-1}}$$

Et à la fin de cette section l'auteur remarque :

« Je présenterai une autre fois, si l'Académie me le permet, « les preuves complètes de ces théorèmes. Ayant rendu compte « à présent de la manière dont il faut, selon moi, entendre la

« somme, le produit, le quotient et la puissance des segments « de droite, je me bornerai ici à donner quelques exemples de « l'application de la méthode. »

La première application est le théorème de Cotes qui énonce et établit préalablement la proposition fondamentale de la *Théorie des équations algébriques*. La seconde est la résolution des polygones plans.

Dans celle-ci se rencontrent des notations caractéristiques. Le premier côté du quadrilatère pris pour exemple est posé comme égal à l'unité absolue ; les côtés qui suivent en commençant par celui-ci sont désignés par les numéros II, IV, VI, VIII, tandis que les numéros I, III, V, VII désignent leurs déviations en degrés des prolongements des côtés précédents, déviations considérées comme positives ou bien négatives selon qu'elles ont lieu dans le même sens que le cours du soleil, ou dans un sens contraire. I′, III′, V′, VII′, sont mis pour les expressions cos I + ε sin I, etc., tandis que I$^{-\prime}$, III$^{-\prime}$, V$^{-\prime}$, VII$^{-\prime}$ sont mis pour cos (— I) + ε sin (— I), etc.

L'auteur en déduit ces deux formules :

$$\text{II} + \text{IV}.\text{III}' + \text{VI}.\text{III}'.\text{V}' + \text{VIII}.\text{III}'.\text{V}'.\text{VIII}' = 0$$
$$\text{II}.\text{III}'\text{V}'\text{VII}' + \text{IV}.\text{V}'.\text{VII}' + \text{VI}.\text{VII}' + \text{VIII} = 0$$

et il prouve que deux équations de cette forme suffisent pour la résolution d'un polygone où il n'y a d'inconnus que trois angles, ou deux angles et un côté, ou un angle et deux côtés. Immédiatement après, Wessel attaque le problème de la représentation d'une ligne dans l'espace en plaçant celle-ci sous forme de rayon dans une sphère. Prenant trois rayons perpendiculaires (entre eux) comme axes, il les prend comme unités positives, celui à gauche étant nommé 1, celui qui avance ε et celui qui monte η_1, et établit que $\varepsilon^2 = -1$ et que $\eta_1^2 = -1$. Il conclut que le rayon dont l'extrémité a pour coordonnées x, $\eta_1 y$ et εz doit être justement désigné par $x + \eta_1 y + \varepsilon z$. Définissant le plan de r et εr comme plan horizontal, celui de r et $\eta_1 r$ comme plan vertical, il examine l'effet du mouvement de l'extrémité de cette ligne suivant un arc de I degrés, parallèle au plan horizontal, et il obtient pour $x + \eta_1 y + \varepsilon z$ les nouvelles valeurs

$$\eta_1 r + (x + \varepsilon z)(\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I}) = \eta_1 r + \cos \text{I} - z \sin \text{I} + \varepsilon x \sin \text{I} + \varepsilon z \cos \text{I}$$

dans lesquels le terme $\eta_1 y$ reste sans changement.

Il indique cette opération par le signe » par exemple

$$(x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I})$$

et il dit que ce signe est celui d'une multiplication imparfaite parce que le multiplicande est en dehors du plan du multiplicateur (et de l'unité positive). Il appelle l'attention sur ce fait que les facteurs doivent être pris en allant de gauche à droite. De même si l'extrémité du rayon se mouvait suivant un arc de II degrés parallèlement au plan vertical, nous aurions :

$$\begin{aligned}(x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{II} + \gamma_1 \sin \text{II}) = \varepsilon z + x \cos \text{II} - y \sin \text{II} \\ + \gamma_1 x \sin \text{II} + \gamma_1 y \cos \text{II}.\end{aligned}$$

D'où il suit que

$$\begin{aligned}(z + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I}) \text{ » } (\cos \text{III} + \varepsilon \sin \text{III}) \\ = (x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } \left[\cos \left(\text{I} + \text{III}\right) + \varepsilon \sin \left(\text{I} + \text{III}\right)\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{II} + \gamma_1 \sin \text{II}) \text{ » } (\cos \text{IV} + \gamma_1 \sin \text{IV}) \\ = (x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } \left[\cos \left(\text{II} + \text{IV}\right) + \gamma_1 \sin \left(\text{II} + \text{IV}\right)\right]\end{aligned}$$

de manière que

$$\begin{aligned}x + \gamma_1 y + \varepsilon z = (x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{I} + \varepsilon \sin \text{I}) \text{ » } (\cos \text{I} - \varepsilon \sin \text{I}) \\ = (x + \gamma_1 y + \varepsilon z) \text{ » } (\cos \text{II} + \gamma_1 \sin \text{II}) \text{ » } (\cos \text{II} - \gamma_1 \sin \text{II}).\end{aligned}$$

Wessel étudie après l'effet de rotations alternativement horizontales et verticales. Représentant par s le rayon dans sa position primitive et par S dans la position finale, et notant tous les arcs décrits par les numéros d'ordre I, II, III... etc., il obtient la formule :

$$\text{S} = s \text{ » I' » II' » III' » IV' » V' » VI'.$$

Dans cette formule il a observé qu'une réunion de facteurs pouvaient être transposés dans le premier membre sous forme de facteurs réciproques et posés dans le sens inverse. Ainsi

$$\text{S » VI}^{-1} \text{ » V}^{-1} \text{ » VI}^{-1} = s \text{ » I' » II' » III''}.$$

Ces résultats sont applicables à la résolution des polygones sphériques et à la détermination des propriétés des triangles sphériques. Dans le cas de polygones plans les numéros I, II, III, etc., représentent les angles extérieurs et les côtés dans l'ordre

où ils se suivent, les nombres impairs les angles et les pairs les côtés. Supposant les angles et les côtés d'un polygone connus à l'exception soit d'un angle et de deux côtés, ou de deux angles et d'un côté, ou de trois angles, ou de trois côtés les parties inconnues peuvent être déterminées par l'équation

$$s \,»\, I' \,»\, II' \,»\, III' \,»\, IV' \,»\, V' \,»\, VI' \,»\, \ldots,. \,»\, N' = s$$

où s est indéterminé et peut être supposé égal à r, εr ou $\eta_i r$. L'effet des rotations indiquées est de soumettre cette sphère alternativement à des rotations autour de l'axe du cercle horizontal et autour de l'axe du cercle vertical, de manière que chaque point de la sphère décrive d'abord un arc de cercle horizontal d'une ouverture égale à celle du premier angle extérieur du polygone, puis un arc vertical égal à l'angle que forme le premier côté, puis encore un arc horizontal d'ouverture égale à celle du second angle extérieur, etc. La sphère finalement revient à sa position primitive puisque chacun de ses points a décrit autant d'arcs horizontaux que le polygone a d'angles et autant d'arcs verticaux qu'il a de côtés.

Pendant que les résultats de Wessel sont justes jusqu'au point où il les pousse, il oublie cependant d'observer qu'une rotation quelconque se décompose en trois rotations autour des axes $\varepsilon, \eta_i, \varepsilon$ ou bien encore autour des axes $\eta_i, \varepsilon, \eta_i$. Il est encore plus étrange qu'il n'ait étudié les rotations autour de l'axe réel. Thiele, dans son introduction au mémoire de Wessel nous montre combien il lui aurait été facile de faire un pas de plus et d'arriver à la notion des Quaternions. Mais, quoi qu'il en soit, Wessel mérite une grande considération pour avoir inventé la seule méthode avec laquelle on ait pu soumettre au calcul les droites de l'espace, avant l'ouvrage de Hamilton commencé en 1843.

Sans songer qu'Euler avait démontré que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ était une quantité réelle, Argand s'efforça de montrer qu'une pareille expression pourrait servir pour la représentation des lignes dirigées dans l'espace. Français essaya de résoudre le problème au moyen d'angles imaginaires, mais il reconnut franchement son erreur. Servois vit avec une remarquable clarté ce qui manquait, mais sans pouvoir y suppléer. Il dit :

« La table à double argument que vous (Gergonne) proposez

« étant appliquée sur un plan conçu divisé par points ou carreaux « infinitésimes de manière que chaque point correspondit à un « nombre qui en serait l'*indice* et la *cote* serait très propre à « indiquer la grandeur et la position des rayons vecteurs qu'on « ferait tourner autour du point ou carreau central portant ± 0 ; « et il est bien remarquable qu'en désignant alors par a la lon- « gueur d'un rayon vecteur, par α l'angle qu'il ferait avec la ligne « réelle ...— 1,0, + 1...; par x, y les coordonnées rectangles du « point extrême opposé à l'origine, rapporté à cette ligne réelle « comme axe des x, la cote de ce point serait exprimée par « $x + y\sqrt{-1}$.

« Il est clair que votre ingénieuse disposition tabulaire des « grandeurs numériques peut être considérée comme une *tranche* « *centrale* d'une table à triple argument et pourrait servir à « fixer, de grandeur et de position, les droites dans l'espace. « Vous donneriez sans doute à chaque terme la forme trino- « miale ; mais quel coefficient aurait le troisième terme ? Je ne « le vois pas trop. L'analogie semblerait exiger que le trinôme « fût de la forme

$$p \cos\alpha + q \cos\beta + r \cos\gamma$$

« α, β et γ étant les angles avec trois axes rectangulaires, et « qu'on eût :

$$(p \cos\alpha + q \cos\beta + r \cos\gamma)(p' \cos\alpha + q' \cos\beta + r' \cos\gamma) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

« Les valeurs de p, q, r, p', q', r', qui satisferaient à cette condi- « tion seraient absurdes, mais seraient-elles réductibles à la « forme $A + B\sqrt{-1}$?

Comme nous le savons, toutes ces quantités non réelles que Servois ne peut déterminer peuvent être identifiées avec les $+i$, $+j$, $+k$, $-i$, $-j$, $-k$ des Quaternions d'Hamilton.

En 1799, dans le premier mémoire qu'il ait publié, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraïcam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, le célèbre Gauss, âgé de vingt-deux ans seulement, dit :

« Par quantité imaginaire, j'entends toujours ici une quantité

« exprimée sous la forme $a+b\sqrt{-1}$ où b n'est pas égal à 0...
« Si les quantités imaginaires sont à retenir en analyse (ce qui,
« pour bien des raisons, me semble préférable à les rejeter,
« pourvu qu'elles soient établies sur un fondement suffisamment
« solide), il faudrait qu'on puisse les considérer comme aussi pos-
« sibles que les quantités réelles ; et dans ces calculs je préfère
« renfermer les quantités réelles et imaginaires toutes les deux
« sous la dénomination commune de quantités possibles... Je
« remets pour une autre occasion la justification de ces quantités
« imaginaires sous forme d'une exposition plus fructueuse de
« toute cette matière. »

Cette occasion cependant semble ne s'être présentée que trente ans plus tard. Dans les *Annonces savantes de Gœttingue*, du 23 avril 1831, dans un rendu compte que Gauss fait de son propre ouvrage : *Theoria residuorum quadraticarum, commentatio secunda*, il dit :

« Notre Arithmétique générale, en tant qu'elle excelle à étendre
« la Géométrie des anciens, est entièrement une création des
« temps modernes. Partie d'abord de la notion des nombres
« absolus, elle a graduellement élargi son domaine. Aux nombres
« entiers elle a joint les fractions, aux quantités rationnelles les
« quantités irrationnelles : à la quantité positive la quantité
« négative : aux nombres réels les nombres imaginaires. Ces
« progrès néanmoins ont toujours été faits à pas bien timides et
« bien hésitants. Les anciens algébristes appelaient les racines
« négatives des équations des racines fausses, et elles le sont en
« effet, quand le problème pour lequel la relation a été posée
« présente des quantités auxquelles on ne peut en attribuer
« d'autres qui leur soient opposées. Mais c'est justement dans
« l'Arithmétique générale que personne n'hésite à admettre les
« fractions, lorsqu'il y a cependant tant d'objets capables d'être
« représentés par des nombres, pour lesquels les fractions n'au-
« raient aucun sens ; de même il ne faut pas refuser aux nombres
« négatifs les droits accordés aux nombres positifs par la raison
« qu'il y a d'innombrables choses auxquelles on n'en peut oppo-
« ser d'autres. La réalité des nombres négatifs est suffisamment
« justifiée puisque dans d'innombrables autres cas ils trouvent
« des objets auxquels ils peuvent s'appliquer (*substratum*) exac-

« tement. Cela est admis depuis longtemps ; mais les quantités « imaginaires, anciennement et parfois encore de nos jours, « quoique à tort, nommées impossibles, furent encore plutôt tolé- « rées qu'entièrement naturalisées, et elles apparaissent plutôt « comme un vain jeu de symboles auquel tout substratum imagi- « nable est dénié sans hésitation par des gens qui ne songent « pourtant pas à déprécier la riche contribution dont ce jeu de « symboles a enrichi le trésor des relations entre elles des quan- « tités réelles.

« Il y a nombre d'années déjà que l'auteur a considéré cette « importante partie des mathématiques sous un tout autre point « de vue, à savoir que pourtant une existence objective peut être « assignée aussi bien aux valeurs imaginaires qu'aux négatives. « Mais si jusqu'à ce jour il n'a pas cru à l'opportunité de publier « ses vues, cependant les lecteurs que cela intéresse peuvent en « trouver des traces dans le mémoire sur les équations qui a « paru en 1799, et encore dans le mémoire couronné, sur les « *Transformations des surfaces*. Dans le présent mémoire, les « contours en sont donnés brièvement et consistent en ce qui « suit :

« Les nombres positifs et négatifs ne peuvent trouver d'appli- « cation que lorsque les choses comptées sont d'espèces oppo- « sées de telle façon qu'une unité d'une espèce a pour effet de « neutraliser une unité de l'autre espèce. A bien dire, cette « supposition ne peut être faite que lorsque les objets comptés « sont non pas des substances, des objets qu'on peut considérer « comme existants par eux-mêmes, mais des relations entre de « tels objets. Il est nécessaire que ces objets forment en quelque « sorte une série

... *e. g.* A, B, C, D.....

« et que le rapport qui existe entre A et B puisse être regardé « comme égal à celui entre B et C, et ainsi de suite. Cette « notion d'opposition implique encore l'échange possible entre « les termes de la relation s'opérant de telle manière que si la « relation, ou si vous préférez le passage de A à B soit marqué « par + 1, celui de B à A par — 1. En tant qu'une pareille « série est illimitée des deux côtés, chaque nombre entier réel

« représentera la relation entre un terme pris arbitrairement « comme origine, à un terme déterminé de la série.

« Si cependant les objets sont de telle nature qu'on ne peut les « arranger en une seule série, mais bien en séries de séries, ou « que l'ensemble de ces choses forme une multitude disposée « sur deux dimensions ; si alors la même connexion existe dans « le passage d'une série à l'autre, que dans le passage d'un terme « à l'autre de la même série, on aura nécessairement besoin, « outre les unités primitives + 1 et — 1, de deux nouvelles « unités opposées entre elles, + i et — i. Il faut alors établir « préalablement que l'unité i doit toujours marquer le passage « d'un terme donné d'une série à un terme défini de la série « immédiatement adjacente. De cette manière le système peut « être établi de double façon en série de séries.

« Les mathématiciens font entièrement abstraction de la « nature des objets et ne s'occupent que de leurs relations. Ils « n'ont à faire que l'énumération et la comparaison de leurs « rapports, et la ressemblance qui existe entre les relations « marquées par + 1 et — 1 peut être certainement étendue « aux quatre éléments + 1, — 1, + i et — i.

« Ces relations ne peuvent être rendues intuitives que par une « représentation géométrique, et pour le faire le plus simple- « ment possible il n'y a pas de raison d'employer une autre « manière que la manière carrée (le quadrillage, c'est-à-dire « que dans un plan illimité l'on trace des carrés au moyen d'un « double système de lignes parallèles se coupant à angle droit, « et on prend les points d'intersection comme symboles. Chacun « de ces points est entouré de quatre points adjacents, et si l'on « désigne le rapport du point A à n'importe lequel des points « voisins par + 1, le sens du symbole — 1 est déterminé par « cela même ; après on peut prendre pour + i lequel on voudra « des deux autres points, c'est-à-dire qu'on peut marquer par « + i le passage au point de droite ou à celui de gauche. La « distinction entre la droite et la gauche, dès que nous avons « fixé à volonté ce que nous appellerons en avant et en arrière « dans le plan, au-dessus et au-dessous par rapport aux deux « côtés du plan, est complètement déterminée par elle-même, « bien que nous ne puissions faire partager à d'autres notre

« intuition qu'au moyen d'objets matériels réellement existants. « Mais quand nous aurons décidé de tout cela, nous verrons que « nous aurons encore matière à choix pour savoir laquelle de « deux séries qui se coupent en un point doit être choisie comme « la série principale, et quelle direction dans celle-ci doit être « choisie pour avoir affaire aux nombres positifs. Nous voyons « encore que si l'on veut mettre $+1$ pour la relation exprimée « auparavant par $+i$ nous devrons nécessairement mettre $+i$ « pour la relation exprimée avant par -1. Dans le langage des « mathématiciens cela veut dire que $+i$ est une moyenne pro- « portionnelle $+1$ et -1, et correspond au symbole $\sqrt{-1}$. « Nous ne disons pas la moyenne parce que $-i$ a le même droit « à cette dénomination. La démonstrabilité d'une signification « intuitive de $\sqrt{-1}$ est donc pleinement justifiée, et nous « n'avons plus besoin d'autre chose pour faire entrer les quan- « tités imaginaires dans le domaine des objets réels de l'arith- « métique.

« Nous avons pensé rendre un service aux amis des mathé- « matiques par cette brève exposition des principaux éléments « d'une théorie nouvelle des soi-disant quantités imaginaires. Si « l'on a considéré ce sujet sous un faux point de vue, et si l'on y « a par suite trouvé une mystérieuse obscurité, cela est largement « dû à une nomenclature impropre. Si au lieu de donner à $+1$, « -1, $\sqrt{-1}$ les noms d'unité positive, négative, imaginaire « (ou impossible) on les avait nommés unité directe, inverse, « latérale, une pareille obscurité aurait eu de la peine à s'intro- « duire. Ce sujet auquel, avec assez de raisons, j'ai touché inci- « dentellement dans le présent traité, l'auteur se réserve de le « traiter plus tard d'une façon plus complète, et d'y montrer « que, où les relations entre deux choses présentent une compli- « cation assez grande pour nécessiter plus de deux dimensions, « il n'y a plus, pour les exprimer, d'autres classes de grandeurs « admissibles en arithmétique. »

C'est ainsi que Gauss présente magistralement les principes fondamentaux de la théorie des imaginaires. L'impulsion donnée en Allemagne par cette grande influence s'est étendue jusqu'à nos jours.

Le mémoire de Buée sur les quantités imaginaires dont il a été

donné lecture devant la Société royale à Londres en 1805 et couvrant 65 pages des *Transactions philosophiques* est tant soit peu vague et insuffisant.

Voici ce qu'il dit de $\sqrt{-1}$:

« $\sqrt{-1}$ n'est donc pas le signe d'une opération *arithmétique*, « ni d'une opération *arithmético-géométrique*, mais d'une opéra- « tion purement *géométrique*. C'est un signe de perpendicula- « rité. C'est un signe purement descriptif... qui indique la direc- « tion d'une ligne, abstraction faite de sa longueur. »

Au moment d'achever son travail il examine ce que deviennent les sections coniques quand leurs coordonnées deviennent imaginaires, et il décide que le cercle se transforme en une hyperbole équilatère dans le plan perpendiculaire à celui du cercle, et de même pour les autres coniques.

Une plus longue discussion sur le mémoire justement célèbre et faisant époque, d'Argand, et les additions qu'il y porta lui-même, ainsi que Français et Servois dans les *Annales de Gergonne* de 1813 à 1815 est rendu inutile par la réédition qu'en 1874 Houel a faite de ces écrits, et par leur traduction en anglais de Hardy en 1881.

Ce qui est intéressant à noter, ce sont les anciennes vues sur les imaginaires d'un mathématicien aussi distingué que Cauchy ; dans son *Cours d'analyse* 1821, il dit :

« Dans l'analyse on applique le terme d'expression symbo- « lique ou symbole à chaque combinaison de signes algébriques « qui n'ont aucun sens par eux-mêmes, ou auxquelles on attribue « une valeur différente de celles qu'elles devraient naturelle- « ment avoir... Parmi les expressions symboliques qui sont d'une « certaine importance en analyse il faut distinguer spéciale- « ment celles qu'on nomme imaginaires...

« Nous écrivons la formule

$$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b)=(\cos a+\sqrt{-1}\sin a)(\cos b+\sqrt{-1}\sin b).$$

« Les trois expressions que contient l'égalité ci-devant... sont « trois expressions symboliques qui ne peuvent être interpré- « tées suivant les conventions généralement établies et qui ne « représentent rien de réel... L'égalité elle-même, à proprement « dire, est inexacte et sans aucun sens. »

Pourtant en 1849, dans un écrit sur les quantités géométriques dans lequel il rend l'honneur qui leur est dû à Argand, Français et d'autres, il reconnaît :

« Dans mon *Analyse algébrique*, publiée en 1821, je me contentais de montrer que la théorie des expressions imaginaires « et des équations peut être rendue rigoureuse en considérant « ces équations comme symboliques. Mais après de nouvelles et « mûres réflexions, le meilleur parti à prendre, c'est, il nous « semble, l'abandon entier du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la « théorie des quantités imaginaires par celle des quantités « géométriques. »

Après avoir défini le terme de quantités géométriques comme nous définissons celui de vecteur, et après avoir défini l'égalité de deux quantités géométriques, il continue :

« La notion de quantité géométrique doit comprendre comme « un cas particulier celle de la quantité algébrique, positive ou « négative, et à plus forte raison celle de la quantité arithmétique... Il reste à définir les différentes fonctions de ces « quantités, particulièrement leurs sommes, leurs produits, leurs « puissances entières, en choisissant des définitions telles que « nous pouvons encore les adopter quand nous calculons avec « des quantités algébriques seules. Ces conditions seront rem- « plies si on adopte les conventions que nous allons donner. »

A la suite des définitions ci-dessus indiquées vient un traité complet satisfaisant pleinement aux demandes modernes, Cauchy observe qu'une large part des résultats des investigations d'Argand et d'autres lui semblent avoir été découverts plus tôt, en 1787, par Henri-Dominique Truel qui les communiqua vers 1810 à Augustin Normand au Havre.

En 1828, parut à Cambridge, en Angleterre, un ouvrage remarquable du Rev. John Warren, intitulé : *Traité sur la représentation géométrique des racines carrées des quantités négatives*. Quoique ce livre n'ait eu dans ces derniers temps que peu de crédit, ses mérites furent cependant pleinement appréciés par de Morgan, et Hamilton reconnut clairement ce qu'il lui devait.

Dans tout l'ouvrage de Warren le terme quantité, comme la quantité géométrique de Cauchy, indique une ligne donnée en longueur et en direction. Suivent alors ces définitions :

« La somme de deux quantités est la diagonale du parallélo-
« gramme ayant ces quantités pour côtés. On dit que la pre-
« mière de deux quantités est avec la seconde dans le même
« rapport que la troisième avec la quatrième, quand la première
« est avec la seconde dans le même rapport de longueur que la
« troisième avec la quatrième, conformément à la définition
« d'Euclide, et quand encore l'angle d'inclinaison de la quatrième
« sur la troisième est égal à l'angle d'inclinaison de la seconde
« sur la première, ces inclinaisons étant mesurées dans le même
« sens. — L'unité est une quantité positive prise arbitrairement
« pour déterminer par comparaison avec elle les valeurs d'autres
« quantités. Si de trois quantités l'unité est à la première, comme
« la seconde à la troisième, la troisième est appelée le produit
« de la seconde par la première ; la première est appelée le quo-
« tient de la seconde par la troisième. »

Les lois de l'Algèbre qui gouvernent ces quantités sont établies dans leur plus grande généralité avec une vigueur de raisonnement qui n'a probablement pas été surpassée. L'auteur alla même jusqu'à déduire la formule binomiale, à développer beaucoup de séries, et à appliquer les méthodes du calcul différentiel et intégral aux quantités de la classe définie. Dans sa forme l'œuvre de Warren est algébrique dans la force du terme, et vraiment hérissée de formules.

En somme, Caspar Wessel en 1797, publia le premier traité clair, précis et scientifique sur les lignes dirigées dans un même plan, comme représentées par les quantités de la forme $a + b\sqrt{-1}$, établissant les lois qui gouvernent leur addition, soustraction, multiplication et division, et montrant leur utilité pratique pour la démonstration des théorèmes et la solution des problèmes. Il a produit ainsi une théorie partielle des rotations dans l'espace, en tant que celles-ci peuvent être décomposées en rotations autour de deux axes formant angle droit.

Peu de temps après, en 1799, Gauss indiqua qu'il était en possession d'une méthode pour calculer avec des quantités de forme $a + b\sqrt{-1}$ considérées comme possibles aussi bien que les quantités réelles ; mais une exposition plus claire fut retardée jusqu'en 1831.

L'écrit de Buée de 1805 met une grande emphase à présenter

$\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité, mais il ne songe pas à donner une interprétation suffisante de la multiplication des lignes dirigées.

Le fameux mémoire d'Argand de 1806 est à peine en danger d'être reçu avec trop de confiance. Quoique écrit après celui de Wessel, il n'y a pas la moindre apparence qu'Argand ait eu connaissance de l'arpenteur norvégien, et, par le fait, certains de ses théorèmes sont établis moins rigoureusement que chez Wessel. Argand donne de nombreuses applications de ses théories à la trigonométrie, la géométrie, l'algèbre, applications vraiment remarquables, spécialement sa démonstration du théorème de Ptolémée relatif au quadrilatère inscrit et celle de la proposition fondamentale de la théorie des équations.

Les contributions de Français, Gergonne et Servois, 1813-1815, servent à écarter les erreurs dans lesquelles Argand était tombé et à rendre plus claires les notions fondamentales sur cet objet.

Quoique le livre de Warren de 1828 contienne des définitions différant à peine de celles de Wessel et de Français, et une notation qui ressemble sans aucun changement à celle de Français, son traité généralisé de la direction des lignes dans le plan doit être regardé comme hautement original.

L'ouvrage de Cauchy consiste dans l'extension et le développement des idées de ses prédécesseurs, plutôt que dans l'introduction de nouvelles idées.

Tels furent les commencements de l'étude de la représentation géométrique des imaginaires, qui dans les temps modernes nous a conduits à de si grands corps de doctrines, comme la théorie des fonctions d'un côté, celle des Quaternions de l'autre avec la *Ausdehnungslehre* qui occupe une position entre les deux.

Qui pourrait dire les progrès que lui fera faire le prochain siècle ?

W.-W. Beman (Ann Arbor, Mich., U. S. A.).

(Traduit de l'anglais par Ch. Berdellé.)

LES FONDEMENTS

DE L'ARITHMÉTIQUE MODERNE

La métaphysique des sciences mathématiques est à l'ordre du jour [1] et il est permis de penser que les difficultés très réelles et très grandes que présente cette étude des principes fondamentaux seront malaisément résolues au gré de chacun.

De nouvelles théories ont apparu [2]; mais pour l'instant les avis sont partagés.

On critique quelque peu les idées d'autrefois, on discute, on repousse même les idées d'aujourd'hui. On reproche aux méthodes anciennes de n'être point logiques, on accuse les méthodes nouvelles d'être artificielles, peu claires, difficilement accessibles.

Bref, les opinions diffèrent, d'une part quant au fond, de l'autre quant à l'opportunité, d'introduire les théories nouvelles dans l'enseignement [3]. Cependant on ne saurait nier qu'il soit nécessaire aux professeurs de méditer ces questions. Leur esprit ne pourra qu'y gagner en force et en profondeur, et l'enseignement en bénéficiera en fin de compte.

Entrons donc dans le corps de la question, nous bornant à l'exposition des nouveaux principes arithmétiques, bien que l'évolution soit générale [4].

1

Tout être matériel contingent possède, au moins selon l'idée commune, une nature, un mouvement, une forme qui le caractérisent.

---

[1] Cf. Calinon. *Études sur les diverses grandeurs en mathématiques*, G. V., 1897.

[2] Tannery. *Arithmetique*, Alcan, 1894. — Boutlet. *Algèbre*, Alcan, 1896. — Cor et Riemann. *Algèbre*, Nony, 1898. — Padé, *Premières leçons d'algèbre elementaire*, G. V., 1892.

[3] Cf. par exemple A. Poulain. *Le monde mathematique*, Études religieuses, juillet-août 1897.

[4] Cf. en Analyse, Jordan. *Cours de l'École polytechnique*, G. V., 1891, en Physique, les divers ouvrages de MM. Poincarré et Duhem; en Chimie, ceux de M. Berthelot.

Mettre à part la nature des êtres et ne retenir que leurs mouvements et leurs formes, c'est créer une abstraction ; abandonner la considération de leurs mouvements pour ne considérer que leurs formes, c'est créer une nouvelle abstraction, d'un ordre plus élevé ; laisser enfin la forme de côté, c'est atteindre une dernière abstraction, le nombre, qui dérive des idées d'unité et de pluralité, celles-ci provenant elles-mêmes de la conscience du « moi » [1].

Il est, dès lors, logique d'étudier le nombre en lui-même, puis la forme et les combinaisons de nombre et de forme, enfin les combinaisons de nombre, de mouvement et de forme, d'où trois sciences : l'Arithmétique générale, la Géométrie, la Mécanique, dont l'ensemble forme *la Mathématique*.

Dans la Mathématique, on abandonne le point de vue expérimental et on lui substitue le pur raisonnement; à cet effet, on définit des êtres de raison correspondant aux différentes abstractions auxquelles nous sommes déjà parvenus et de ces définitions on déduit, à l'aide de raisonnements logiques, diverses conséquences, dont l'ensemble constitue la Mathématique.

Or, tout raisonnement logique suppose une majeure, une vérité première, un axiome ; mais tout axiome portant sur un objet déterminé, il faut *avant tout* définir les objets des axiomes, c'est-à-dire, en Arithmétique, l'égalité et l'inégalité, l'addition et la soustraction.

Ces définitions, bien qu'arbitraires, sous la condition de n'être contradictoires, ni en elles-mêmes, ni dans leurs conséquences, seront prises de manière à cadrer avec le monde existant [2].

---

[1] « J'estime que sans la présence du monde extérieur, aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme; et que, seul dans l'univers et réduit à l'état de pure intelligence, le plus incomparable génie n'arriverait jamais à la notion du nombre 2, ce génie fût il celui d'un Archimède, d'un Gauss et d'un Lagrange. »

C.-A. Laisant, *La Mathématique*, Carré et Naud, 1898.

[2] On sait que l'étude des mondes *possibles*, au moyen de définitions appropriées, par exemple la Géométrie *non-euclidienne*, la Géométrie de l'hyperespace, donne lieu à des conclusions du plus haut intérêt.

« La géométrie à *n* dimensions a un objet réel. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises... La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate de corps qui tombent sous nos sens; elle est, avant tout, l'étude analytique d'un groupe. Rien n'empêche donc d'aborder

I. L'unité, juxtaposée à elle-même, ce qu'on indique par le signe $+$, donne naissance au nombre *deux*; l'unité, juxtaposée à deux, au nombre trois....., etc.

II. Deux nombres sont égaux si ceux qui les forment par juxtaposition d'une unité sont égaux, ceux qui forment ceux-ci égaux, etc., l'unité étant égale à elle-même et seulement à elle-même. Pour compléter la définition de l'égalité, nous dirons que le nombre a est plus petit que ceux qu'on en déduit par juxtaposition d'unités, d'où plus grand que celui dont il a été formé, que celui dont ce dernier provient, etc. Par analogie, l'unité sera regardée comme un nombre plus petit que tous les autres.

III. Le nombre $a+(b-1)+1$ est appelé somme de a et b et se représente par $a+b$, définition due à M. Poincaré [1]. Il est nécessaire d'ajouter :

1° Que le nombre $b-1$ est le nombre qui forme b quand on lui juxtapose l'unité ;

2° Que l'on forme $a+(b-1)+1$ en faisant la somme de a et $b-1$, $a+b$ étant le nombre obtenu par la juxtaposition d'une unité à cette somme ;

3° Que si l'on représente $b-1$ par c, $a+c$ sera le nombre $a+(c-1)+1$, etc., jusqu'à ce qu'on arrive au nombre $a+1+1$.

Faisons en passant une remarque des plus importantes, que *les définitions sont les principes féconds des mathématiques;* et, en effet, par exemple, notre définition de l'addition nous permettra en usant des axiomes — nous les énoncerons bientôt — de *démontrer* les deux propositions célèbres relatives au groupement et à l'inversion des termes d'une somme [2].

IV. Soustraire un nombre b d'un nombre a, c'est former un nouveau nombre c, tel qu'en ajoutant b à c on retrouve a, défini-

---

l'étude d'autres groupes analogues et plus généraux. » M. Poincaré, *Analysis situs*, Journal de l'École polytechnique.

Cf. aussi, du même auteur, *Acta*, tome II, à propos de la Géométrie non-euclidienne.

[1] *Revue de métaphysique et de morale*, janvier 1894.

[2] Ces deux démonstrations sont dues à M. Poincaré, *Revue de metaphysique, loc. cit.*

On sait que M. Helmoltz (Tannery, *Arithm., loc. cit.*), avait essayé, lui aussi, de donner des démonstrations à ce sujet.

tion qui conduit immédiatement à la proposition fondamentale

$$a-b-c-\ldots=a-(b+c+\ldots)\ (^1)$$

si l'on se base, bien entendu, sur les axiomes que voici enfin :

I. Deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux;

II. Les sommes de nombres égaux sont égales;

III. Les différences de nombres égaux sont égales.

Vérités primitives, c'est-à-dire indémontrables, ou regardées généralement comme telles (2), évidentes, nécessaires, logiques et non morales, réelles et non verbales (3).

---

(1) Soit $a-b-c=d$, d'où, *par définition* :

$$a-b=d+c,\ a=d+c+b=d+(b+c)$$
$$a-(b+c)=d=a-b-c$$

vu les propositions $a+(b+c)=a+b+c$ et $a+b=b+a$.

(2) On sait que Leibniz a donné une démonstration de ces axiomes :
La monadologie, Ed. Boutroux et H. Poincaré, p. 159 et suiv., Delagrave, 1881.

(3) Les anciens énonçaient (*Euclide*, d'après Peyrard, 1814) quatre axiomes généraux :

I. Les grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles ;

II. Si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux;

III. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, les touts seront égaux;

IV. Le tout est plus grand que la partie.

Le moyen âge ajouta, on le croit du moins, les propositions :

α) Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux;

β) Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux ;

γ) Les grandeurs qui sont doubles d'une même grandeur sont égales entre elles ;

δ) Les grandeurs qui sont les moitiés d'une même grandeur sont égales entre elles. J'ai remplacé dans les axiomes I, III (texte) le mot « grandeur » par le mot « nombre », mieux déterminé et suffisant à notre objet.

Bain, *Logique deductive et inductive*, traduction Compayré, Germer-Baillière, 1881, t. II, p. 227 et suiv., refuse le caractère d'axiome à la prop. IV d'Euclide et aux propositions $\alpha-\delta$. Il semble, en effet, que la proposition IV doive être regardée comme un tautologisme; enfin, les propositions $\alpha-\delta$ peuvent être démontrées comme il suit. On pourra renvoyer les deux premières à la fin de la théorie générale des opérations, en tête du chapitre supplémentaire ayant trait aux opérations approchées à une unité près. Là, il sera aisé de les démontrer, si l'on a prouvé en cours de route que les produits, quotients, puissances, racines exactes d'égalités donnent lieu à de nouvelles égalités — les propositions γ, δ sont des cas particuliers de ces propositions — et remarqué que si $a>b$, il existe un nombre d tel que l'on ait $a-b=d$. Ainsi, soit à démontrer que si $a>b$ et $C=c$, $a+C>b+c$. Par hypothèse, $a-b=d$, d'où $a-b+C=d+c$, $a+C-b=d+c$, $a+C-(b+c)=d$; donc $a+C>b+c$. De même pour l'axiome β.

Les définitions fondamentales données, les axiomes posés, viendra la numération, puis les opérations ordinaires, addition et soustraction, multiplication et division, élévation aux puissances et extractions des racines, *en se bornant aux cas où ces opérations sont possibles ;* je veux dire qu'on supposera le nombre à soustraire plus petit que le nombre dont on veut le retrancher, le dividende multiple du diviseur, etc.

On pourra, d'ailleurs, traiter en un chapitre supplémentaire les opérations approchées à une unité près.

Ce faisant, nous aurons terminé la première partie de l'Arithmétique, étude des opérations fondamentales.

II

C'est ici le lieu d'observer que l'Arithmétique, l'Algèbre, l'Analyse sont les branches d'une science *unique*, branches faciles à distinguer. L'Algèbre en particulier n'est plus, pour nous, une Arithmétique supérieure, caractérisée par l'emploi des symboles littéraux et des nombres négatifs, mais la science des groupes de nombres [1] ; or, il ne serait pas nécessaire, en Algèbre, de revenir sur ses pas à propos de l'introduction des incommensurables et des imaginaires, si l'on étudiait ces nombres en Arithmétique, où leur place semble marquée, ou au moins si on les présentait d'un bloc, comme introduction à l'Algèbre [2]. On me l'accordera pour les incommensurables. Mais les imaginaires ? Mais les nombres négatifs ?

Or, pourquoi ceux-ci et non les autres ?

---

[1] Par exemple, l'addition algébrique peut être définie : étant donnés plusieurs groupes de nombres — polynômes —, A, B,..., déterminer un autre groupe R, tel que la somme numérique des résultats de la substitution de valeurs numériques déterminées aux quantités littérales dans A, B,... soit identique au résultat de cette même substitution dans R, quelles que soient ces valeurs numériques. En général, les opérations algébriques élémentaires ne sont que l'étude des transformations de groupes donnés.

Dans le cas particulier où l'on attribue à toutes les lettres, sauf une, des valeurs numériques, si l'on se propose de déterminer la valeur numérique de la dernière lettre de manière que le groupe prenne une valeur donnée à l'avance, on a une équation numérique. L'extension aux équations littérales, aux équations simultanées, est immédiate.

[2] Cf. par exemple NETTO, *Vorlesungen über Algebra*. Teübner. Leipsig, 1896.

Les nombres négatifs ne sont-ils pas destinés à suppléer aux soustractions impossibles et les imaginaires aux extractions de racines qu'on ne peut effectuer ?

Comprenons donc les nombres négatifs, fractionnaires, incommensurables, imaginaires, sous la dénomination de *nombres conventionnels*, formons-en la deuxième partie de l'Arithmétique, ou l'introduction à l'Algèbre, et l'Algèbre pourra être ordonnée logiquement.

J'ai parlé de nombres conventionnels. Bien qu'il soit contraire à mes principes de préférer les mots les uns aux autres, ce terme me semble résumer de longs discours, et je vais expliquer pourquoi je l'ai choisi.

Aucun des nombres que nous étudiions jusqu'ici n'est le résultat de l'opération $a - b$, si a est plus petit que b; *de même pour la division*, si a n'est pas multiple de b, et aussi pour l'extraction des racines, si a n'est pas une puissance exacte, et même positive, dans le cas d'indice pair.

Nous voulons suppléer à ces opérations impossibles en créant de nouveaux nombres, des nombres « fictifs » [1] d'où l'on puisse revenir sans peine à la réalité [2], mais *qui conservent aux formules leur généralité*. Que seront ces nombres s'ils ne sont pas conventionnels [3] ? Aussi bien nous les regarderons comme tels, et je vais essayer de résumer le plus brièvement possible les théories modernes qui s'y rapportent.

Considérons un nombre entier a et affectons-le soit de l'indice n, soit de l'indice p. Nous dirons que a_n est un nombre négatif, a_p un nombre positif, que a est leur valeur absolue commune et nous définirons ces deux classes en *convenant :*

I. De regarder deux nombres comme égaux s'ils sont de la même classe et s'ils ont même valeur absolue, comme inégaux si l'une de ces deux conditions n'est pas remplie ;

II. D'ajouter deux nombres d'une même classe en faisant la somme de leurs valeurs absolues et en plaçant le résultat dans la même classe ; au contraire, de faire la différence des valeurs

---

(1) MÉRAY, *Traité d'analyse*, t. I, G. V., 1892.

(2) Est-il nécessaire de rappeler ici comment on interprète les solutions négatives

(3) « Le seul objet de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. » H. POINCARÉ, *Revue générale des Sciences*, 15 nov. 1897.

absolues, si les nombres ne sont pas de même classe, et de placer le résultat dans la classe du plus grand en valeur absolue ;

III. De faire le produit de deux nombres en faisant le produit de leurs valeurs absolues, le résultat étant placé dans la classe p si les deux nombres sont de même classe ; dans la classe n, s'ils sont de classes différentes.

Les propriétés dont nous venons de *convenir* et qui définissent les nombres positifs et les nombres négatifs sont arbitraires. Nous eussions pu les prendre tout autres. Mais il faut qu'elles soient *utiles* et *non contradictoires;* utiles, en ce sens que les entiers ordinaires doivent être un cas particulier de ces nombres ; non contradictoires, c'est-à-dire que les conséquences de ces définitions ne doivent pas être la négation les unes des autres. Enfin, elles doivent permettre de retrouver les propositions fondamentales de la théorie des nombres entiers.

Cette base acquise, nous ferons l'extension des opérations simples, et nous pourrons conclure : si l'on regarde comme *liés ensemble* un nombre et le signe (+ ou —) dont il est précédé, en admettant que le signe + soit toujours sous-entendu quand il n'est pas exprimé, les nombres positifs ne sont autres que les entiers ordinaires et les nombres négatifs les nombres précédés du signe —, qu'ils soient isolés ou engagés dans les calculs.

Si les opérations à effectuer sont *possibles*, — sens primitif — on pourra indifféremment user des règles ordinaires ou des principes ayant trait aux nombres positifs et négatifs : *c'est une vérité d'expérience.*

Les considérations bien connues que nous venons de rappeler s'appliquent mot pour mot aux autres catégories de nombres conventionnels dont les premiers à venir sont maintenant les fractions [1].

Si b divise a, le résultat de l'opération $\frac{a}{b}$ est un nombre entier parfaitement déterminé ; au contraire, si b ne divise pas a, $\frac{a}{b}$ n'a

---

[1] La théorie des nombres conventionnels est exposée en détail dans le *Traité d'Analyse* de M. Méray (*loc. cit.*) ; les nombres négatifs sont spécialement étudiés dans les ouvrages de MM. Padé, Bourlet, Cor et Riemann (*loc. cit.*), les imaginaires dans les algèbres de MM. Bourlet, Netto (*loc. cit.*). Toutefois les développements qu'on rencontre dans ces ouvrages paraissent exagérés. La théorie des incommensurables donnée dans l'*Analyse* de M. Jordan paraît remarquable.

plus de sens, *ne signifie rien*, et il convient, à l'exemple de ce qui a été fait pour la soustraction, de définir une nouvelle classe de nombres, dont l'emploi permette de suppléer à la non-divisibilité de a par b. Nous appellerons ces nombres fractions ; nous les représenterons par le symbole $\frac{a}{b}$, a étant appelé *numérateur* et b *dénominateur*. Nous leur attribuerons les propriétés suivantes, qui appartiennent aux *groupes* $\frac{a}{b}$ où b divise a :

I. Toute fraction dont les deux termes sont de même signe est positive ; sinon elle est négative ;

II. On a

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$\frac{a}{b} < c$, selon que $ad = bc$, $ad < bc$, $a < bc$, en supposant qu'il s'agisse de fractions positives ; la définition de l'égalité subsiste s'il s'agit de deux fractions négatives ; mais dans ce cas, la plus grande en valeur absolue est regardée comme la plus petite ; si les fractions sont de signes contraires, la négative est toujours plus petite que l'autre ; en dernier lieu, si $\frac{a}{b}$ est négative et c négatif aussi, $\frac{a}{b}$ est plus petit que c si $-\frac{a}{b} > -c$;

III. On ajoute deux fractions de même dénominateur en ajoutant les numérateurs ;

IV. On multiplie une fraction par une autre en multiplant entre eux respectivement les numérateurs et les dénominateurs ;

V. Les combinaisons de fractions et de pseudo-fractions — groupes $\frac{a}{b}$ où a est multiple de b — s'opèrent d'après les conventions précédentes. Ceci indique le procédé à suivre pour combiner les fractions et les entiers ; il suffit de mettre les entiers a sous la forme $\frac{am}{m}$, m entier.

Passons aux incommensurables. Soient deux classes de nombres A et B [1] telles que tout nombre a de A soit inférieur à tout nombre b de B et qu'il existe toujours dans ces classes deux nombres α, β dont la différence soit plus petite que toute quan-

[1] Ces classes étant formées de nombres entiers et fractionnaires, positifs et négatifs. L'extension aux imaginaires se fera d'un mot dans la suite.

tité donnée ε, si petit que soit ε. Les nombres possibles pourront être répartis en trois groupes : les nombres qui sont inférieurs à quelque nombre de B, ceux qui sont supérieurs à quelque nombre de A, ceux qui sont supérieurs à tous les a et inférieurs à tous les b. On démontre aisément que ce dernier groupe comprend au plus un seul des nombres définis jusqu'ici. S'il n'en comprend pas [1], nous ferons disparaître cette distinction, en disant qu'il existe encore un nombre plus grand que tous les a et plus petit que tous les b. Ce sera un *incommensurable*.

Pas n'est besoin d'autres conventions pour établir la théorie de ces nombres.

La théorie des imaginaires offre beaucoup de points communs avec la théorie des fractions ; on y considère encore des groupes de deux nombres (a, b), $a+b\sqrt{-1}$. Je ne m'y arrêterai pas, non plus qu'aux généralisations qu'on a essayé d'en faire [2].

Remarquons, en terminant, que les conventions relatives aux nombres conventionnels tiennent lieu, et doivent tenir lieu, des définitions et des axiomes relatifs aux nombres entiers.

III

Si l'on admet la supériorité des principes nouveaux, qu'en penser au point de vue pédagogique ? Sont-ils susceptibles de prendre place dans l'enseignement ?

Essayons de résoudre cette importante question.

En France, dans la classe de mathématiques élémentaires, surtout en première année, le but principal du professeur doit être d'ouvrir l'esprit des élèves, de leur donner des notions générales, de développer les questions susceptibles d'applications théoriques ou pratiques, sans oublier que la majeure partie des

---

[1] Soit à extraire la racine carrée de $\frac{4}{9} = 0,444\ldots$. Nous pourrons extraire la racine carrée de $0,444\ldots$ à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.... près par défaut (classe A) et par excès, (classe B). Le nombre c sera $\frac{2}{3} = 0,666\ldots$. Au contraire, le nombre $c = \sqrt{2}$ n'existe pas, au moins en tant qu'entier ou fraction, nombre négatif ou nombre positif.

[2] O. Stolz, *Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik*, t. II. — Bertoty, *Thèse* (G.-V.). — Weierstrass, *Göttinger Nachrichten*, 1884, p. 395; *Dedekind, ibid.*, 1895, p. 141.

élèves étudie en vue d'examens officiels et non par amour de la science.

Or, les questions d'Arithmétique logique n'étant guère susceptibles d'applications, n'étant pas non plus des questions d'examens, au moins actuellement, étant malaisées à saisir et difficiles à exposer, me semblent devoir être écartées, à priori, du cours et tout au plus regardées comme un complément, destiné aux élèves sérieux.

C'est un principe bien connu qu'un professeur savant a sur un professeur ordinaire l'avantage de pouvoir montrer de temps à autre l'au-delà : aux meilleurs élèves, j'entends, excitant ainsi la curiosité, sortant du terre-à-terre quotidien, offrant un but d'étude future.

Eh bien, en mathématiques élémentaires, laissons les théories nouvelles dans cet au-delà, nous bornant à énoncer les axiomes et passant de là, sans démonstration aux identités $a+b+c=a+(b+c)$, $a+b=b+a$ [1]; puis, plus loin, résumant en quelques lignes la théorie des nombres conventionnels : l'ensemble de la classe y gagnera et les bons élèves, auxquels on en dira quelques mots — je me place au point de vue des partisans des théories nouvelles, — en reconnaîtront la beauté logique, beauté enveloppée pour eux d'une ombre de mystère qui sera loin de lui nuire, sans être embarrassés de subtilités hors de saison.

En mathématiques spéciales ou en deuxième année d'élémentaires la question change d'aspect.

D'une part, bon nombre d'élèves médiocres ont été éliminés; par ailleurs, l'intellect des autres élèves est plus développé, enfin l'exposition de l'Algèbre doit être faite rationnellement.

Or, nous l'avons remarqué, on s'éviterait bien des retours en arrière, bien des extensions de démonstrations, en faisant au début du cours d'Algèbre, à titre, si l'on veut, d'*introduction*, une leçon — une seule suffirait — sur les nombres conventionnels d'après les principes que j'ai essayé d'exposer synthétiquement, glissant sur la théorie des fractions, dont l'utilité est contestable [2].

---

[1] Cf. par exemple Netto, *loc. cit.*

[2] On pourrait aussi, je crois, faire cette réforme dans l'enseignement de l'Algèbre en usant des méthodes anciennes, ceci pour les adversaires des théories nouvelles.

Là devrait se borner, je crois, l'introduction dans l'enseignement des nouvelles méthodes arithmétiques, si toutefois on voulait les y introduire, ce qui assurément ne saurait être fait à la légère : il ne faut pas que les « étudiants désireux de pousser plus loin « reculent devant l'obstacle, et perdent leur foi scientifique, « ébranlée par des raisonnements trop raffinés sur l'incertitude « des fondements de nos connaissances » [1].

R. DE MONTESSUS (Moulins).

QUELQUES PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Le XIX^e^ siècle est non seulement le siècle des grandes créations mathématiques, mais c'est aussi celui où l'esprit de synthèse s'est montré dans toutes les branches.

Avant le XIX^e^ siècle, on avait créé la science grâce à l'intuition du génie qui lui donnait des méthodes particulières, des guides pour un ordre spécial de questions, afin de résoudre certains problèmes sur lesquels sont fondées des branches entières de la Mathématique.

Mais quand notre siècle reçut l'héritage des grands mathématiciens, et que de nouvelles branches vinrent s'ajouter aux anciennes, le besoin de méthodes formelles se fit sentir, dans le but d'unifier les concepts dispersés çà et là.

L'intelligence humaine aurait été impuissante à saisir la science dans son ensemble et dans ses parties, sans la ressource supplémentaire de la méthode formelle ; il y a là une véritable branche spéciale, dont l'objet principal est la pédagogie appliquée aux mathématiques, la science de l'enseignement de cette riche branche des connaissances humaines.

D'autre part, le développement dogmatique de la science ne

[1] Cf. A. LAISANT, *loc. cit.*, p. 2.

suffisait pas; il fallut suivre les indications de l'histoire pour réunir les vues des créateurs scientifiques dans une certaine harmonie; certains noms étant aussi des schemas des branches qui leur sont dues. Cela a conduit les auteurs dans certains ouvrages à se livrer parfois à des considérations historiques. C'est ce que fit Carnot dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*; c'est ce qu'ont fait M. Klein dans sa *Einleitung in die höhere Geometrie* et sa *Nicht-Euclidische Geometrie*, M. Johann G. Hagen dans sa *Synopsis der höheren Mathematik*, et en ce moment même, c'est ce que font MM. Burkhardt et Franz Meyer dans leur *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Nous trouvons encore la même tendance dans les traités modernes destinés à l'enseignement, parce qu'il faut, dans l'enchaînement des découvertes récentes, exposer comment les diverses théories sont parvenues à leur état le plus parfait.

Cela doit conduire, croyons nous, à la création, dans les Facultés des sciences, de chaires destinées à fournir des connaissances critico-historiques sur la science mathématique.

D'un autre côté, on pourrait traiter l'art et la science de communiquer les connaissances aux élèves; mais cela fait partie d'une exposition trop étendue pour trouver place ici; il nous suffira de rappeler le précepte de Pestalozzi, recommandant la diminution des livres, afin de puiser nos connaissances dans la Nature; dans le cas actuel, la Nature, c'est notre organisation intellectuelle.

Nous rappellerons aussi le précepte de Staudt, qui voulut faire une Géométrie sans figures, dans le but de faire suivre aux élèves l'enchaînement des raisonnements par leur dépendance logique, délivrée des représentations accidentelles.

L'illustre pédagogue suisse voulut tirer de l'observation des choses la connaissance de celles-ci, et constituer l'enseignement réel objectif; le maître allemand voulut, de la réalité de nos conceptions sur les objets géométriques, déduire leurs rapports.

Ce besoin a été déjà compris par quelques professeurs dont les ouvrages élémentaires présentent une concision très favorable pour les élèves; ceux-ci, au lieu de trouver tout démontré avec un échafaudage de mots souvent inutiles, peuvent mettre en jeu leur activité intellectuelle éveillée par un sujet très simple;

la méthode socratique peut alors avoir une influence importante pour faire jaillir des idées sous l'effort individuel de l'élève, avec l'action directrice du professeur.

Le précepte de la méthode cartésienne : *ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la connusse évidemment être telle*, doit être la règle principalement suivie dans l'enseignement de toutes les sciences, et notamment dans celui de la Mathématique.

Mais nous croyons aussi important d'adjoindre à cette maxime celle de d'Alembert : *Allez en avant, la foi vous viendra*. Cela veut dire que nous pouvons avancer au milieu d'une certaine obscurité pour chercher la lumière. L'intelligence dans la conquête de la science, se trouve continuellement dans un mélange de lumière et d'obscurité.

Nous connaissons les mémorables controverses de Leibniz et Bernoulli, d'Euler et d'Alembert sur les logarithmes des nombres négatifs ; nous avons vu combien de tentatives il a fallu pour parvenir à une théorie complète des quantités imaginaires ; de nombreux paradoxes ont arrêté souvent d'illustres savants ; mais toujours la lumière a jailli du fond des ténèbres, et des vérités nouvelles sont sorties précisément là où l'obscurité paraissait ébranler les lois générales ; ces vérités, le plus souvent l'intelligence les devinait avec un certain instinct.

Aux penseurs profonds qui ouvrent les sillons de l'intelligence, il faut joindre les esprits idéaux qui font avancer la science et qui nous élèvent de l'analyse à la synthèse, des objets à leurs systèmes.

La systématisation a été l'œuvre prédominante de ce siècle, et son esprit doit entrer librement dans l'enseignement. L'analyse ne voit jamais la fin de sa route dans sa marche ascendante ; la synthèse, des hauteurs de la science, domine les ensembles ; la première forme les individualités, la deuxième les réunit. Dans les ouvrages parus dans la première moitié du siècle domine la première ; dans les ouvrages actuels, c'est la deuxième.

L'analyse est parvenue à séparer les branches mathématiques. La combinatoire s'est élevée comme un ensemble de connaissances qui dominent tout : le nombre, l'étendue, les mouvements, les forces, formant sur tout cela le calcul symbolique ou abs-

trait, le moule de toutes les réalités, et même de toutes les possibilités, dans le domaine de la pure raison, en évitant seulement de déroger au principe de contradiction, comme l'indique Hankel dans son principe de la permanence des lois du calcul. La Géométrie s'est délivrée du nombre, et la combinatoire, selon les vœux de Boole, ne regarde pas la nature des objets soumis à son action.

Cela procure au mathématicien des ressources pour l'organisation, de plus en plus parfaite, de la science dans son œuvre d'unification.

Sur la matière : nombre, étendue, force, mouvement, nous trouvons la forme donnée par les lois combinatoires ; à l'Algèbre ordinaire viennent s'ajouter les divers genres d'Algèbres caractérisées par le nombre de leurs unités et leurs rapports ; à l'espace ordinaire, les hyperespaces.

La projectivité, et par-dessus celle-ci les correspondances d'espèces supérieures, tiennent au rapport qui transforme des objets donnés en d'autres objets, et maintient l'enchaînement des êtres de même nature ou de nature différente. Dans ce cas nous trouvons les correspondances birationnelles, les complexes de Plücker, les connexes de Clebsch, les transformations de contact de M. Lie et la projectivité générale traitée par M. Georges Cantor dans sa théorie des ensembles, les théories de l'applicabilité, de la représentation conforme, la correspondance de l'Algèbre des formes avec la Géométrie, etc.

L'adjonction est un autre procédé de la synthèse. Si la projectivité rapporte des systèmes à d'autres systèmes et donne sa correspondance, l'adjonction enferme des systèmes inférieurs dans d'autres systèmes supérieurs. Son but est d'harmoniser le domaine subjectif avec le domaine objectif, d'établir une égalité ou relation d'équivalence entre le champ de l'objet mathématique et celui de nos concepts, qui sans cela manqueraient de correspondance objective.

Parmi ces adjonctions, celles qui ont produit une plus grande unification dans l'organisme de la Mathématique sont celles des éléments à l'infini et de l'imaginaire.

L'adjonction des sections, dans l'ensemble des nombres rationnels, d'après l'idée de Dedekind, forme un nouveau domaine sans lacunes et continu.

L'adjonction des points cycliques permit à Cayley d'établir, dans la Géométrie, la projectivité des relations métriques.

Tout ce que nous avons dit sur la partie formelle de la Mathématique a été réalisé dans les traités qui, écrits pour l'enseignement, deviennent de plus en plus synthétiques : et nous profitons de l'occasion pour signaler une nouvelle tendance des maîtres, celle de faire descendre les théories supérieures dans le domaine élémentaire.

Cette évolution s'est réalisée toujours graduellement, avec une certaine lenteur. Les nouvelles découvertes ne traversent le seuil de l'enseignement qu'après avoir été épurées et rendues accessibles aux jeunes intelligences.

Les conquêtes d'Abel et Galois dans la théorie des équations furent reléguées, comme un premier essai dans la magistrale Algèbre supérieure de Serret, sans se fusionner avec l'Algèbre classique des Descartes, Newton, Rolle, Fourier, Lagrange et Sturm.

Quelques ouvrages, tels que ceux de MM. Petersen, Todhunter, Drach et Vogt, furent publiés dans ce but, jusqu'au moment où M. Weber donna sa remarquable synthèse de la nouvelle et de l'ancienne Algèbre, avec la Théorie des nombres dont la place dans l'organisation de l'Analyse restait très incertaine.

Nous nous formerons une idée claire des progrès faits dans l'enseignement où sont réfléchies les conquêtes modernes de la science, si nous comparons les limitations données aux diverses branches mathématiques par les auteurs de la première moitié du siècle, avec celles qui distinguent les ouvrages modernes.

Les appendices de la Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse indiquent la tendance à étendre le domaine de l'enseignement élémentaire dans cette branche.

Le *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* de M. Schroeder donne un spécimen de la descente des concepts combinatoires et des classes logiques dans la théorie du calcul élémentaire.

Cette prédominance de la combinatoire dans l'Arithmétique se remarque dans les *Grundlagen der Arithmetik* de M. H Schubert qui commence la publication de *l'Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* et aussi dans la *Teoria delle grandezze* de M. Bettazzi.

Les élégantes *Vorlesungen über Geometrie* de M. Clebsch expriment une jonction systématique des Géométries synthétique et analytique avec l'Algèbre des formes, et M. Salmon, qui le premier fusionna dans ses traités pour l'enseignement, la Géométrie avec l'Algèbre des formes, exposa aussi, dans ce but, l'adjonction des éléments à l'infini et des éléments imaginaires, d'après les idées de Plücker.

D'autres ouvrages destinés à l'enseignement dans une mesure plus restreinte, tels que ceux de MM. Picquet et de Longchamps, expriment cette tendance nouvelle de l'enseignement.

Les traités d'Analyse parus dans ces derniers temps suivent aussi ce courant. La distinction classique du calcul différentiel et intégral est effacée, ainsi que, dans la Géométrie, la division en Géométrie plane et de l'espace.

Les très élégants *Éléments d'Analyse mathématique* de M. Appell, ouvrage récemment paru, le magistral *Traité d'Analyse* de M. Picard, par un chemin raccourci, répondent à la même pensée ; M. Picard fait la fusion des théories analytiques et géométriques, arrivant aux théories supérieures de Riemann, Gauss et Lamé, aux courbures des surfaces, à leur applicabilité, leur représentation conforme, à l'*Analysis situs,* aux groupes de transformations.

M. C. Jordan aussi rend au domaine de l'enseignement les théories de Cauchy et de Riemann que M. Hoüel avait déjà exposées dans son cours à la Faculté des Sciences de Bordeaux ; c'est ce que fait encore M. Laurent. Comme ses devanciers, M. Jordan montre l'affinité entre les singularités des courbes et des fonctions analytiques ; il fait aussi entrer dans le domaine de l'enseignement les applications géométriques des ensembles de M. Georges Cantor, comme M. Borel les a fait entrer dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions* ; nous ne pouvions non plus omettre les vues originales et de grande généralisation qui caractérisent les *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale* de M. Méray, et l'ensemble très simple et élégant que présente, en ce qui concerne toutes les branches de l'Analyse ou Algorithmie, M. Pascal, dans son dernier ouvrage publié sous le titre d'*Analisi.*

Nous terminerons cette revue en citant l'ouvrage *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géomé-*

triques de M. Petersen, et celui, plus récent, *Problèmes de géométrie élémentaire groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution*, du professeur au lycée de Rambov, M. I. Alexandroff.

Il faut, au lieu de vouloir pénétrer indéfiniment dans le fond des conséquences, dominer les principes qui les contiennent; au lieu de s'épuiser dans des efforts conduisant à des questions isolées, on doit chercher des méthodes pour en résoudre un grand nombre. Les enchaînements nombreux des vérités ont rendu la science moderne plus facile que la science ancienne, malgré son étendue plus considérable. Les lacunes étaient comblées par la force du génie, rarement par l'efficacité de la méthode qui en a facilité l'acquisition. La déduction prend de plus en plus fréquemment la place de la divination.

De tout ce que nous avons dit, résultent quelques indications sur l'enseignement; les divers degrés de celui-ci ne doivent pas être seulement la continuation des degrés antérieurs; chacun doit former un système complet en rapport avec la force intellectuelle de l'élève.

La science s'agrandit comme les objets regardés à travers une lentille.

Dès le premier degré, l'élève éveille graduellement ses aptitudes et développe son intelligence. A l'intuition sensible succédera l'intuition rationnelle, à la prépondérance de la mémoire et de l'imagination, celle de la raison; les procédés de l'enseignement doivent suivre cette progression.

Si de trois cas seulement possibles A, B, C découlent respectivement les trois cas distincts a, b, c, la relation univoque étant établie, la réciprocité sera démontrée. L'élève pourra ainsi arriver à la compréhension des idées de genres et d'espèces qui donnent l'enchaînement des démonstrations : cet esprit est contraire à celui de la routine qui domine trop souvent encore et qui ne fournit aucune explication claire des conclusions.

Il faudra aussi éveiller l'aptitude combinatoire, si prédominante dans l'ensemble de la Mathématique et habituellement si négligée; c'est l'effet de la préoccupation qui empêche d'arriver, tout de suite, à la déduction du binôme de Newton.

Nous rappellerons sur ce sujet quelques problèmes plaisants

et délectables de Bachet de Méziriac, très appropriés à cet objet, et l'orientation suivie par M. Georges Cantor dans sa théorie des ensembles, qui porte les vues combinatoires dans l'Arithmétique.

Les concepts de combinaison, de périodicité, de symétrie, doivent accompagner ceux d'égalité et d'inégalité, de contenance, de subordination et de supraordination.

L'Algèbre pourra affermir le développement de la faculté combinatoire et de celle de la raison, au moyen des méthodes qui, dans la Mathématique, se substituent au syllogisme de la logique; ce sera d'une part l'étude des algorithmes, et de l'autre la discussion des problèmes, la classification de ceux-ci, l'examen de leurs associations ou dissociations, les modifications qu'ils doivent éprouver afin que les résultats correspondent aux conditions de l'énoncé.

L'enseignement supérieur sera aussi un développement de l'enseignement secondaire, dans son ensemble, enrichi d'éléments nouveaux. Et, dans les cours successifs, l'élève sera soumis à cette amplification, et ses vues se développeront en conséquence sur l'Algèbre ordinaire, soumise à la combinatoire. On verra se développer le calcul symbolique et s'ébaucher, vers ses frontières, la théorie des fonctions, comme un prochain développement dans lequel on doit être entraîné.

La Géométrie trouvera, dans l'emploi de la relation anharmonique ou des formes harmoniques, une abréviation de l'emploi de la simple proportionnalité.

La Géométrie analytique cessera de se limiter à la seule étude des sections coniques, et devra renfermer dans son enceinte la diversité des méthodes qui ont leur origine dans l'algorithmie ; elle signalera, dans ses limites, quelques traits de la Géométrie infinitésimale et donnera un premier aperçu des correspondances supérieures dans les relations projectives des figures.

Le Calcul infinitésimal sera la synthèse qui enveloppera toutes les branches inférieures, agrandies par la puissance de l'algorithme infinitésimal ; son plus haut degré de généralité sera soumis à la théorie des groupes de substitutions, qui dans l'état actuel de la science, unifie tous les rapports de la quantité dans ses représentations algorithmique ou géométrique.

Les études critico-historiques devront rassembler, pour le professorat, toutes les connaissances mathématiques, d'après le développement chronologique accidentel et le développement nécessaire de la génération logique, qui régit l'organisme de la Mathématique.

Ayant exposé quelques-uns des traits principaux qui caractérisent les ouvrages mathématiques modernes, et exprimant le besoin de nouveaux procédés dans l'enseignement, nous terminerons en rappelant, une fois de plus, l'importance des idées fondamentales : le besoin de la culture générale, si bien suivie dans les Facultés de philosophie des universités allemandes.

La philosophie, dont l'esprit a dominé toutes les connaissances humaines, doit dominer dans la Mathématique, mais dans une certaine mesure, qui a été signalée à diverses reprises par nos mathématiciens philosophes.

La critique mathématique, comme philosophie de cette science, doit se constituer avec le caractère d'une branche supérieure qui domine la technique par sa généralité et son degré supérieur d'abstraction ; ainsi que la technique mathématique doit dominer ses innombrables applications.

Le siècle prochain sera celui des grandes applications mathématiques. La branche créée par l'illustre Cauchy, la Physique mathématique, est prochainement destinée à se joindre à la Chimie, d'après les travaux de M. Duhem.

Aux travaux de MM. Cournot, Walras, L. Marie, sur la science financière, nous pouvons ajouter le nouvel ouvrage de M. Moritz Cantor : *Politische Arithmetik ;* et tout cela montre combien il est nécessaire d'accomplir le travail de synthèse mathématique d'après un critère philosophique ; le but est d'arriver à une plus facile acquisition des vérités, grâce aux progrès des méthodes d'enseignement, et de rendre, dès maintenant, plus aisées les applications aux besoins matériels de la vie.

Z. G. de Galdeano (Saragosse).

SUR LA FUSION

DE LA

PLANIMÉTRIE ET DE LA STÉRÉOMÉTRIE

DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE EN ITALIE

Il y a maintenant quatorze ans que la question « *s'il est ou s'il n'est pas convenable d'enseigner la Géométrie élémentaire, en unissant la planimétrie à la stéréométrie* » a été agitée en Italie, où elle a déjà son histoire.

Ce fut le regretté M. de Paolis qui la souleva, en 1884, par la publication de ses excellents *Elementi di Geometria*, où la méthode de la fusion était adoptée systématiquement pour la première fois en Italie.

Les arguments semblables, tels que angles et dièdres, angoloïdes et polygones, cercles et sphères, sont traités ensemble, dans ce livre, et l'on s'y sert de propriétés stéréométriques pour démontrer les propriétés planimétriques, chaque fois que cela semble utile ou convenable. Les motifs pour lesquels l'auteur trouva bon et utile à la fois d'adopter cette méthode, ouvertement contraire aux programmes ainsi qu'aux traditions et aux coutumes, sont expliqués dans la préface du livre de la façon suivante :

« Il y a beaucoup d'analogie entre quelques figures du plan et
« d'autres de l'espace ; en les étudiant séparément, nous renon-
« çons à connaître tout ce que cette analogie nous apprend et
« nous tombons volontiers dans d'inutiles répétitions. En outre,
« comme on est obligé de chercher les propriétés d'une ligne ou
« d'une surface, sans pouvoir faire usage des éléments géométri-
« ques placés en dehors de cette même ligne ou surface, on
« limite les forces dont on peut disposer et l'on renonce volon-
« tairement à un matériel scientifique, à l'aide duquel on pourrait
« simplifier les constructions et les démonstrations. Comment
« pourrait-on, en effet construire le point milieu d'un segment
« donné sans sortir du segment lui-même ? En faisant usage des

« éléments géométriques contenus dans un plan, la construction « est connue et bien simple aussi. Comment peut-on construire « un triangle isoscèle, ayant chacun de ses deux angles égaux « deux fois plus grand que le troisième, sans sortir de son plan « et sans appliquer la théorie de l'équivalence ou celle des pro- « portions? On peut aisément et sans appliquer la théorie de « l'équivalence ou celle des proportions construire le triangle, « pourvu que l'on fasse usage des éléments géométriques placés « en dehors de son plan (p. 92). Je pourrais donner encore des « exemples pour montrer encore mieux combien on peut simpli- « fier les démonstrations et les constructions, en étudiant les « figures planes en même temps que les solides, et c'est vrai- « ment la faute de l'ancienne et constante division, s'il n'a pas « encore été possible de rencontrer plusieurs de ces exemples « dans la Géométrie élémentaire.

« Que l'on n'objecte point qu'il est plus facile, pour ceux qui « commencent, de concevoir un angle plutôt qu'un dièdre, ou un « triangle au lieu d'un trièdre ; c'est seulement parce que l'es- « prit des élèves a été obligé de n'imaginer et de ne dessiner « que des figures planes, pendant les premières années de leurs « études géométriques, que cela leur est plus tard difficile, « lorsqu'ils sont obligés d'imaginer et de dessiner des figures « solides. »

Des discussions très vives furent soulevées par une si audacieuse innovation, qui rencontra aussitôt des adversaires acharnés en même temps que de fervents apôtres. Ainsi qu'il arrive chaque fois qu'une nouveauté paraît à l'horizon, celle-ci eut à combattre non seulement contre l'habitude, mais encore contre plusieurs circonstances qui, toutes ensemble, rendaient on ne peut plus difficile l'adoption proposée par M. de Paolis ; je me bornerai à exposer les deux principales :

1° Les programmes des Lycées étaient limités au schéma suivant :

1re année. *Euclide*, livre Ier, IIe, IIIe, IVe.
2e « « « Ve, VIe.
3e « *Stéréométrie, à apprendre d'après un traité moderne.*

Ce n'est pas le cas de disserter ici sur l'évidente absurdité d'enseigner la Stéréométrie, pendant la 3ᵉ année, par une méthode tout à fait différente et parfois même en contradiction avec la méthode du grand géomètre d'Alexandrie, suivie pendant les deux premières années pour l'enseignement de la Planimétrie. Ce qu'il faut surtout observer ici, c'est tout simplement que la distribution de la matière dans chaque cours, selon les programmes officiels, rendait si difficile l'adoption du livre de M. de Paolis, que ses partisans les plus convaincus durent eux-mêmes se trouver découragés.

2° Le livre de M. de Paolis, étant le fruit de quatre années de méditation et de travail d'un esprit d'élite, qui jusqu'alors s'était toujours entièrement consacré aux études les plus élevées de la Géométrie supérieure, est un véritable ouvrage de maître dans sa substance ; mais il a un vice d'origine : il est éclos ainsi qu'une fleur de serre, dans le cabinet de travail d'un savant qui, ayant atteint tout jeune la chaire universitaire, n'a pas eu le temps de connaître les petites misères de l'enseignement secondaire, tandis qu'il est naturellement porté à croire que le niveau moyen de l'intelligence des jeunes gens est beaucoup plus élevé qu'il ne l'est en effet. Ce livre est donc un guide excellent pour les professeurs qui ont envie de l'étudier et de méditer la question, mais il renferme des difficultés souvent insurmontables pour les élèves. Ces circonstances et d'autres encore rendaient assez facile la tâche des adversaires, et ce fut pour cela que le livre de M. de Paolis, bien qu'accueilli avec tant d'enthousiasme par tous ceux qui aiment l'étude, ne put pénétrer dans les écoles.

Peu de temps après la publication de cet ouvrage, parut la Géométrie de M. le professeur Andriani, où la méthode de la fusion avait aussi été adoptée. Seulement M. Andriani voulut aller trop loin et trouver des analogies entre la Géométrie plane et la solide, là même où elles n'existaient pas du tout, de sorte qu'il fallait les créer violemment. M. Andriani, en publiant sa Géométrie, n'a pas réellement rendu un service aux fusionnistes, parce que son ouvrage donna lieu à de graves et injustes critiques.

En dépit de tant d'obstacles, quelques jeunes professeurs eurent l'audace d'adopter le livre de M. de Paolis dans quelques lycées, bravant les critiques ainsi que les difficultés.

Mais l'essai le plus important fut celui que fit, dans la R. Académie de Livourne, un des élèves de M. de Paolis. En 1886, M. le docteur Jules Lazzeri, ayant été nommé professeur dans cet important établissement, eut la chance de parvenir à convaincre le directeur des études de la valeur de la méthode de M. de Paolis, et il obtint la permission de l'adopter et de la faire adopter par ses collègues. Il put rédiger ainsi un cours de leçons que l'on lithographia en 1887 et plus tard en 1889. Ce manuel ayant subi depuis des améliorations et des perfectionnements dans l'exercice habituel de l'enseignement fut l'origine du livre : Lazzeri e Bassani, *Elementi di geometria*, qui parut en 1891. Par ce livre, l'idée fondamentale de M. de Paolis fut, si l'on peut s'exprimer ainsi, vulgarisée et expliquée ; la fusion des deux Géométries devint plus parfaite, et de nouveaux cas y furent indiqués, où, de quelques propriétés très simples des figures solides, on peut déduire des propriétés de figures planes.

La critique fit assez bon accueil à cet ouvrage, et le *Periodico di Matematica*, entre autres, dont M. le prof. Lugli était alors le directeur, publia un long article de M. le prof. Bettazzi, analysant, avec éloges, l'ouvrage et la méthode suivie par les auteurs. Ce livre fut adopté dans plusieurs lycées, si bien qu'il ne resta plus un exemplaire de la première édition ; la deuxième parut en 1898 [1], quoique, à cause de la transformation de l'Académie navale, les cours élémentaires y eussent été supprimés.

C'est là une preuve que l'apostolat continuel de ceux qui soutiennent depuis des années le mérite de la méthode de la fusion commence à donner des fruits, et qu'un changement s'est opéré, quoique lentement, dans l'opinion des professeurs. La méthode de la fusion a, en effet, été adoptée aussi, plus ou moins diffusément, dans deux autres traités ; celui de M. le prof. Veronese, fort remarquable pour d'autres innovations hardies et très discutées, lequel parut en 1897, et celui du prof. Reggio, publié en 1898.

Mais c'est depuis la fondation de l'Association *Mathesis*, qui, malgré sa jeunesse, a déjà montré une activité et une énergie peu communes, que l'on a eu les preuves les meilleures et les

---

[1] La deuxième édition a été analysée par M. L. Ripert dans le n° 1 de l'*Enseignement mathématique* (p. 62-65). (Note de la Direction.)

plus sûres du changement dont nous venons de parler. Cette association entre les professeurs de mathématiques des écoles secondaires eut, dès sa naissance, le noble but d'apporter des améliorations dans l'enseignement scientifique des écoles, en organisant des réunions, soit particlles, soit générales, et en ouvrant des discussions sur tout sujet ayant rapport à l'enseignement. Une des premières questions fut justement celle-ci : *Opportunité de la fusion de la Planimétrie avec la Stéréométrie dans l'enseignement.* M. le prof. Henri de Amicis, un fusionniste très ferme et très convaincu, fut le rapporteur de cette question ; il résuma les arguments allégués pour ou contre la fusion et il combattit chaleureusement ces derniers par un article plein de verve qu'il publia sous ce titre significatif : *Pro fusione.* Cet article parut dans le *Bollettino dell' Associazione Mathesis* (2e année, 1897-1898, n° 4, et dans le *Periodico di Matematica* (13e année, 1898, p. 49-72).

Il serait impossible d'en faire un abrégé ; aussi, nous bornerons-nous à en recommander la lecture complète à tous ceux pour lesquels cette importante question présente de l'intérêt.

On en discuta, en attendant, dans plusieurs assemblées de professeurs de mathématiques que l'Association « Mathesis » réunit à Sondrio (14 mars 1898), à Milan (8 avril 1898), à Bologne, (15 avril 1898), à Sassari (7 avril 1898), à Recanati (28 et 29 juin 1898), à Turin (21 et 22 septembre 1898).

Dans presque toutes ces réunions on se mit d'accord sur *l'opportunité de modifier les programmes afin que tout professeur soit libre de choisir, d'après sa propre conviction, la méthode de la fusion ou celle de la séparation*, et l'on fit dans ce but beaucoup de propositions concrètes. Ce ne fut que dans l'assemblée de Sondrio que l'on prit la résolution suivante : « Attendu que la « question ne peut pas être résolue, laissant la liberté la plus « entière aux *séparatistes*, on désire qu'il se fasse un vote parmi « les professeurs des écoles secondaires dans le but d'établir si « la plupart d'entre eux croient ou ne croient pas que la fusion « soit nécessaire. »

Et bien qu'il semble, d'après les procès-verbaux, qu'il n'y eût aucun vote d'une proposition concrète, il paraît que la plupart des

professeurs assemblés à Milan furent contraires à l'idée de la fusion, puisque le président, M. le prof. Retali, exprima ainsi sa pensée (Voir *Bollettino*, 2e année, n° 1) : « Envisageant la ques-
« tion du point de vue le plus élevé, le mémoire de M. Riemann :
« *Sur les hypothèses servant de base à la Géométrie*, a désormais
« rigoureusement prouvé que, pour étudier un espace de $n-1$
« dimensions, il est possible de faire abstraction de l'espace de n
« dimensions où il est contenu... Au contraire, il est impossible
« d'avancer d'un seul pas dans l'étude de la Géométrie sans
« avoir recours à des propriétés de l'espace d'un nombre moindre
« de dimensions... »

Quant à la proposition que l'on fit dans l'assemblée de Sondrio, il faut croire que l'on s'y trompa sur la véritable acception des deux mots *nécessaire* et *utile*. En effet, aucun des fusionnistes ne s'est jamais avisé de dire que la fusion est *nécessaire*, ni qu'il est impossible d'enseigner autrement la Géométrie, puisque *vingt siècles* d'expérience sont là pour les démentir ; mais ils se sont bornés à soutenir que la méthode dont il est question est plus *utile* et plus *commode* que celle de la séparation, dont on s'est généralement servi jusqu'à présent. Quant aux objections de M. le prof. Retali, il nous semble bon de nous en rapporter à l'article que M. le prof. Lazzeri a publié dans les Actes du Congrès de Turin. (*Periodico di Matematica*, 14e année, 1898-99.)

« Tout cela est parfaitement juste à un point de vue tout à fait
« scientifique, tant qu'il s'agit d'arrêter les postulats fondamen-
« taux des hyperespaces. L'intuition, qui nous aide énormément
« dans l'espace, nous est parfaitement inutile dans ceux-là. Ces
« hyperespaces n'ont pas de représentation immédiate, et c'est
« notre esprit qui les a créés d'une façon inductive ; voilà pour-
« quoi nous ne pouvons étudier les caractères fondamentaux d'un
« espace de n dimensions qu'à l'aide de quelques espaces d'un
« moindre nombre de dimensions. Mais cela ne prouve point
« que les propriétés fondamentales d'un hyperespace, une fois
« établies, il nous soit impossible de tirer d'une façon simple et
« courte, de ses propriétés les plus élémentaires, quelques autres
« propriétés des figures appartenant à des espaces d'un plus petit
« nombre de dimensions. Bien des exemples, tirés de la géomé-
« trie supérieure, sont là pour prouver que des propriétés d'un

« hyperespace on peut déduire immédiatement d'autres pro-
« priétés des espaces d'un moindre nombre de dimensions. Il
« me suffira de citer les représentations planes des surfaces,
« moyennant lesquelles des propriétés de lignes peuvent être
« tirées de celles des surfaces et vice versa ; la représentation
« des complexes de droites ou de sphères sur l'espace ordinaire ;
« l'étude de l'hexagone de Pascal, déduit de la figure de six
« complexes ou de six connexes, deux à deux en involution, et
« plusieurs autres.

« Mais sans s'éloigner de la Géométrie élémentaire, on s'aper-
« çoit aisément qu'il est utile, voire même nécessaire, ainsi
« que l'illustre professeur Veronese le dit au congrès, de re-
« monter des formes les plus simples jusqu'aux plus com-
« plexes afin d'établir plus rigoureusement les conceptions de
« ligne droite, du plan et de l'espace ; mais dès que ces con-
« ceptions ont été fixées, on peut obtenir, et l'on obtient, en
« effet, beaucoup d'avantages en tirant les propriétés des formes
« d'un moindre nombre de dimensions, d'autres d'un plus grand
« nombre.

« En effet, si l'on voulait faire l'application du principe que
« Riemann a prouvé, dans son extension tout entière, on devrait
« faire d'abord toute la Géométrie de la ligne droite avant de
« parler du plan. Mais en agissant ainsi, il nous serait impos-
« sible de résoudre les problèmes les plus élémentaires. Com-
« ment s'y prendre par exemple pour diviser un segment en
« deux ou n parties égales, et pour construire le quatrième
« harmonique de trois points, sans quitter la droite ? Comment
« peut-on diviser un angle, en ne se servant que du faisceau,
« auquel les deux côtés de l'angle appartiennent ? S'il est donc
« impossible d'étudier tout à fait la ligne droite sans avoir recours
« au plan, n'est-il pas naturel de penser, lors même que des
« preuves positives et directes nous manqueraient, que l'étude
« du plan pourrait, du moins, devenir plus facile, si l'on con-
« naissait l'espace ? »

La question fut enfin agitée à la première assemblée du Congrès des professeurs de mathématiques italiens, que la société

« Mathesis » tint à Turin en septembre 1898. Le rapporteur, M. le prof. Giudice, proposa à l'assemblée d'émettre successivement son opinion sur les trois questions suivantes, afin de résoudre la question principale d'abord et les questions particulières ensuite :

1° Répondre à cette demande : *Est-il convenable, pourvu que cela soit possible, de laisser le professeur libre de choisir entre la méthode fusionniste et la séparatiste ?*

2° Arrêter un programme en établissant exactement mais très brièvement la répartition entre les différents cours de l'enseignement de la Planimétrie et de la Stéreométrie.

3° Proposer la composition d'un progamme fort détaillé, qui soit le développement de celui déjà arrêté, et insister auprès du Ministre de l'Instruction publique, afin qu'il sollicite cette compilation.

Dès que la discussion fut ouverte sur la première question, l'ordre du jour suivant fut voté *à l'unanimité :*

Il convient d'apporter, s'il est possible, des modifications aux programmes, de sorte que le professeur soit libre de choisir entre la méthode séparatiste et la fusionniste.

Après quoi le Congrès aurait dû formuler d'abord un schéma de programme abrégé et ensuite un programme détaillé qui rendît possible la liberté du choix ; mais la discussion fut ajournée jusqu'après la discussion de la 4e question plus générale : « Répartition de l'enseignement des mathématiques entre les différentes classes des différentes sortes d'écoles secondaires. » Les propositions que le rapporteur, M. le prof. Bustelli, fit à ce sujet furent si nombreuses et si radicales, que personne ne s'avisa de les discuter à l'improviste, et la question fut, selon la proposition du professeur Candido, ajournée au prochain congrès. On ajourna de même l'examen de la question de la fusion (quoiqu'elle ait été résolue favorablement dans ses lignes générales). Maintenant, un ordre du jour avait été présenté par plusieurs professeurs, parmi lesquels se trouvaient des géomètres d'une grande valeur, tels que MM. Segre et Veronese, et dont le but était précisément de rendre possible la liberté du choix. Il était ainsi conçu :

Le congrès souhaite que la matière de l'enseignement géométrique actuel soit ainsi distribuée :

Aux Lycées : 1re année. Propriétés de position et d'égalité.
« 2e « *Equivalence, similitude.*
« 3e « *Mesure, Trigonométrie rectiligne.*
Aux Instituts techniques : 1re année. Propriétés de positions et d'égalité.
« « 2e « *Equivalence, similitude et mesure.*
« « 3e « *Trigonométrie et théories complémentaires.*

A propos de cet ordre du jour, M. le prof. Lazzeri fait, dans son article susmentionné, les justes observations que voici : « Personne ne peut manquer de saisir toute l'importance de ce « que les représentants des opinions les plus disparates au sujet « de la fusion aient trouvé moyen de se mettre d'accord sur une « proposition conciliante et propre à satisfaire toutes les tendances. Et il est naturel que cette proposition doive être « favorablement accueillie de l'homme illustre qui préside aux « destinées de l'Instruction publique, en hommage aux principes « de libéralité qu'il aime à introduire dans chaque branche de « l'enseignement public depuis le plus élémentaire jusqu'au plus « élevé. »

Et après avoir exposé le point que la discussion a maintenant atteint, il ajoute : « Voilà l'état actuel de choses dont ne peuvent « pas être mécontents tous ceux qui sont, comme moi, partisans « de la fusion, pourvu qu'ils reviennent un moment sur le passé. « En songeant aux obstacles de toute sorte que cette idée a rencontrés sur son chemin, et en comparant le passé au présent, « nous ne pouvions ne pas éprouver une satisfaction intime.

« Il y a quatorze ans, lorsque le regretté M. de Paolis publia « ses *Elementi*, la question de la fusion était ignorée de la plupart des professeurs ; on aurait pu compter les fusionnistes du « bout des doigts d'une seule main, et peu s'en fallut qu'on ne « les crût fous. Ils forment maintenant une vraie légion, tandis « que le nombre de leurs adversaires diminue chaque jour ; et « la question a tant marché que les professeurs de mathéma-

« tiques lui font l'honneur de s'occuper d'elle le premier jour « qu'ils se rassemblent en congrès ; ils reconnaissent la nécessité « de faire partout l'essai qui a déjà eu son succès à la R. Aca- « démie navale et dans plusieurs écoles secondaires ; et un « groupe de professeurs présente un projet pour rendre possible « cette expérience. »

Nous citons encore avec plaisir le passage suivant du même article :

« On sait que les principaux arguments en faveur de la fusion « peuvent être groupés ainsi :

« 1° Epargne de temps, que l'on obtient en enseignant à la « fois les arguments semblables de Planimétrie et de Stéréo- « métrie ;

« 2° Simplification de quelques considérations de Planimé- « trie, en les enseignant à l'aide de considérations stéréomé- « triques ;

« 3° Une meilleure harmonie entre l'étude des mathématiques « et celle des autres matières que l'on apprend au lycée ou à « l'institut technique. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

« Je crois nécessaire d'observer que l'argument le plus im- « portant est précisément le 2° qui peut-être n'a pas, jusqu'à « présent, été aussi apprécié qu'il le mérite. Que l'on me per- « mette donc d'y insister surtout, les deux autres pouvant « désormais être considérés comme à peu près en dehors de la « discussion. Il est maintenant presque généralement reconnu « que la Géométrie élémentaire doit être enseignée tout à fait « indépendamment de l'Algèbre, afin qu'elle puisse atteindre le « but élevé auquel elle tend dans l'éducation et être une école « de logique ; que les exercices d'Algèbre et de Géométrie, aux- « quels les jeunes gens prennent généralement de l'intérêt, doi- « vent être une application, non un moyen pour prouver les « vérités géométriques. La théorie des proportions est, à mon « avis, plus étroitement liée à la conception de nombre et de « mesure qu'on ne veut l'admettre, mais l'enseignement même « par la méthode d'Euclide s'unit dans l'esprit des écoliers aux

« proportions entre nombres, et c'est à cause de cela que, lors-
« qu'on se sert beaucoup des proportions, l'idée de nombre que
« l'on veut chasser par la porte, rentre par la fenêtre.

« Eh bien, dans le traité de M. de Paolis, le théorème : —
« Si deux triangles sont équiangles entre eux, le rectangle d'un
« côté de l'un et d'un côté non correspondant de l'autre équivaut
« au rectangle des côtés correspondants à ceux que l'on a con-
« sidérés — est démontré par quelques considérations stéréo-
« métriques fort simples. Moyennant ce théorème, toutes les
« propositions concernant la théorie de l'équivalence des surfaces
« planes, et qui, en suivant Euclide ne se prouvent que d'une
« façon difficile et fatigante, sont démontrées aussi simplement
« et élégamment que le fait Legendre, lorsqu'il se sert de la
« théorie des proportions et de la mesure.

« Après cela, l'étude même des surfaces et des volumes des
« corps ronds, cônes, cylindres, sphères et portions de sphères,
« que dans beaucoup de bons livres, on fait aussi en se servant
« de mesures ou du moins à l'aide de la théorie des proportions,
« peut au contraire se faire sans qu'on ait recours à des mesures
« ou à des proportions, en donnant aussi aux énoncés des formes
« qui répondent mieux à l'intuition géométrique. Bref, l'usage
« des considérations stéréométriques a beaucoup simplifié la
« théorie de l'équivalence et l'a rendue tout à fait indépendante
« de la théorie des proportions, de sorte qu'on peut la traiter
« avant celle-ci. On obtient encore des résultats remarquables en
« établissant la conception d'homothétie par quelques notions
« sur les lignes droites et les plans parallèles, et en en tirant
« ensuite la théorie de la similitude, ainsi que nous l'avons
« fait, M. Bassani et moi, dans nos *Elementi di Geometria*.

« Toutes les propriétés purement géométriques que l'on peut
« tirer de la considération de figures semblables, quoiqu'elles
« n'aient pas de rapport avec les proportions, peuvent de la sorte
« devenir tout à fait indépendantes de la théorie des proportions
« mêmes, ainsi que par exemple le théorème : « Si les droites
« d'un faisceau sont coupées par deux droites parallèles, deux
« segments égaux de la deuxième droite correspondent à deux
« segments égaux de la première. » Qu'il me soit enfin permis de
« faire observer que dans les *Elementi* susmentionnés, nous avons

« traité la question des axes et des plans radicaux à l'aide de « quelques propriétés bien élémentaires des cercles et des « sphères, sans nous servir des proportions ni des mesures. « Maints problèmes, tels que les constructions des cercles ou « sphères, qui passent par des points donnés et sont tangents à « des droites et à des cercles ou à des plans et des sphères donnés, « se résolvent de la sorte sans avoir recours aux proportions, « comme on le croyait d'abord nécessaire.

« Ce que je viens d'exposer concerne les simplifications qui « ont été introduites par les considérations stéréométriques dans « les théories tout entières, et qui nous ont donné le moyen « d'étudier chacune des parties essentielles de la Géométrie « élémentaire, c'est-à-dire : propriété de positions et d'égalité, « équivalence, similitude et mesure, de façon que nous pouvons « les exposer dans leur ordre logique et naturel sans avoir besoin « de recourir aux théories qui viennent après. »

Quoique partisan convaincu de la fusion, j'ai tâché d'exposer impartialement les faits ; et je crois pouvoir affirmer en finissant qu'il n'y a désormais en Italie que fort peu de professeurs qui ne se soient plus ou moins occupés de la question ; que l'antipathie avec laquelle, il y a quatorze ans, on accueillit la proposition est bien diminuée, et que le rêve de tous les esprits impartiaux est que le Ministère de l'Instruction publique résolve la question en faisant des programmes qui laissent tout le monde libre de choisir la méthode qu'il préfère.

Tout en souhaitant que cela arrive bientôt, je remercie la Direction de l'*Enseignement Mathématique* qui m'a donné le moyen de faire connaître, même à l'étranger, l'une des plus belles discussions qui aient eu lieu dans notre pays.

Dott. G. Candido (Pise).

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands.

La réunion annuelle des mathématiciens allemands aura lieu cette année à Munich, du 18 au 23 septembre, en même temps que le 71e congrès des naturalistes et médecins de l'Empire. Son organisation a été confiée à une commission comprenant le bureau de la section « Mathématiques et Astronomie » du congrès, et le comité de la *Deutsche Mathematiker-Vereinigung*.

Encouragée par les résultats obtenus depuis quelques années, la commission a décidé de continuer à grouper le plus possible les communications autour de deux questions spéciales, prises l'une dans le domaine des mathématiques pures, l'autre dans le domaine des mathématiques appliquées. Pour cette année figurent à l'ordre du jour, d'une part le *Calcul des variations*, de l'autre les *Problèmes cinétiques dans les sciences techniques*. La commission s'est assuré un rapport détaillé sur l'état actuel de chacune de ces branches.

A côté des sections d'ordre purement scientifique, le congrès comprend, comme par le passé, une section d'*Enseignement des sciences mathématiques et naturelles*. Il est à prévoir que le récent décret concernant les candidats à l'enseignement secondaire supérieur en Prusse donnera lieu à d'intéressantes communications.

Nous ne manquerons pas de fournir à nos lecteurs un compte rendu de cette importante réunion.

Association internationale pour la propagation de l'étude des quaternions et des méthodes qui s'y rattachent.

Nous avons déjà parlé de cette association si intéressante, et nous sommes heureux de pouvoir aujourd'hui faire connaître à nos lecteurs l'état d'avancement de l'organisation. Voici la composition du bureau pour les années 1899 et 1900.

Président : M. Robert S. Ball, professeur à l'Université de Cambridge : *Observatoire, Cambridge, Angleterre.*

Secrétaire général trésorier : M. Alexandre Macfarlane, professeur

à la Lehigh University, South Bethlehem, Pennsylvanie : *Gowrie Grove, Chatham, Ontario, Canada.*

Secrétaires nationaux :

Australie : M. Alexandre Mcaulay, professeur à l'Université de Tasmanie : *Hobart, Australie.*

France : M. Paul Genty, professeur, licencié ès sciences : *207, rue de Vaugirard, Paris.*

Allemagne : M. Victor Schlegel, professeur à l'École supérieure : *Hagen, Westphalie.*

Grande-Bretagne : M. Charles J. Joly, professeur à l'Université de Dublin : *Dunsink Observatory, Dublin, Irlande.*

Italie : M. G. Peano, professeur à l'Université royale : *Turin.*

Japon : M. S. Kimura : *47, Sakamachi, Yotsuya, Tokio.*

Russie : M. A. P. Kotelnikof, agrégé de l'Université : *Kasan.*

Suisse : M. Ferdinand Kraft, privat-docent : *38, Zweierstrasse, Zurich.*

États-Unis d'Amérique : M. Arthur S. Hathaway : professeur, Rose Polytechnic Institute : *2106 N. Tenth Street, Terre Haute, Ind.*

Programme de mathématiques élémentaires suivi par J. Steiner.

Nous empruntons à la brochure de M. Lange, intitulée *Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin* [1], le programme détaillé que s'est tracé l'illustre maître pour son enseignement des mathématiques élémentaires à l'École industrielle de Berlin, pendant l'année scolaire 1829-1830. Nous laissons à nos lecteurs le soin d'établir une comparaison entre ce programme et celui que l'on suit de nos jours dans nos établissements secondaires. Ils reconnaîtront aisément que des considérations géométriques très importantes introduites dans l'enseignement élémentaire par Steiner font encore défaut dans bien des Traités de Géométrie.

Troisième classe

Arithmétique, 4 heures. — 2 heures. Calcul pur afin d'obtenir une connaissance approfondie du système numérique et de sa structure, une intuition claire des fractions, de leurs transformations et de leurs opérations, soit en vue du calcul écrit, soit en vue du calcul de tête. Prendre en considération tout particulièrement les fractions décimales.

---

[1] Voir ci-après (p. 230) le compte rendu de cette brochure.

Calcul à l'aide de lettres, formation des puissances et extraction des racines, en particulier racine carrée et applications. — 2 heures. Applications commerciales, c'est-à-dire application du nombre aux valeurs ou monnaies, aux poids, au temps, à l'espace ou aux mesures, au travail, etc. Etude des rapports ; déterminer une quantité qui avec trois quantités données forme deux couples de valeurs de même rapport ; règles de trois simple et composée, règles de société, de mélange, de change, règle conjointe, etc. Montrer par examen approfondi du problème comment on passe des grandeurs données à la solution, et une fois le jugement bien exercé, introduire, pour la commodité du calcul, un principe de résolution ou une règle mécanique. — Classes A et B, Steiner.

Géométrie, 3 heures. — Cours synthétique détaillé. Considérer les positions respectives des droites qui dans le plan forment des figures déterminées, principalement en vue de l'étude des angles. Déterminer la grandeur et la direction des droites dans une figure donnée. Examiner les conditions d'après lesquelles toutes les parties d'une figure sont déterminées, et baser là-dessus les propositions relatives à l'égalité des figures. Forme des figures, conditions qui les déterminent ; en déduire les théorèmes relatifs à la similitude ; assemblage des figures ; application à l'arpentage et à l'usage des instruments ; aire d'une figure polygonale, équivalence et rapport des aires. Transformation et partage des figures d'après leur aire. L'exposé est présenté selon la méthode intuitive ; il doit être développé par les élèves. — Classe A : Klöden ; classe B : Steiner.

Deuxième classe

Calcul, 2 heures. Bledow.

Algèbre, 2 heures. — 1 heure. Calcul effectué sur des grandeurs littérales. Les sept opérations fondamentales, leurs relations ; interversion de l'ordre d'après lequel les opérations peuvent être effectuées sans modifier le résultat final ; développement systématique rigoureux des principes de l'Arithmétique générale. Les systèmes logarithmiques, en particulier celui de Briggs ; usage des tables, applications. — 1 heure. Résolution de problèmes qui dans le calcul écrit conduisent à des équations du premier ou du second degré. Toutefois ces problèmes doivent aussi être résolus dans le calcul oral, afin de faire bien pénétrer les relations entre les quantités connues et les inconnues ; ils permettent ainsi de développer d'une manière très avantageuse la puissance du raisonnement. Faire alterner les équations du premier et du second degré à une ou à plusieurs inconnues ; applications pratiques. — Steiner.

Géométrie, 3 heures. — Revision détaillée de la transformation et du partage des figures, et de l'étude des figures semblables. Application au calcul de problèmes géométriques. Etude du cercle ; sécantes et tangentes ; polygones inscrits et circonscrits ; proportions. Contact et intersection de cercles ; de la similitude dans le cercle ; de la puissance

relative aux cercles. Court aperçu de la Trigonométrie d'après un plan d'étude personnel au maître. — Steiner.

PREMIÈRE CLASSE

Calcul, 1 heure. Bledow.

Algèbre, 2 heures. — Revision détaillée des équations du premier et du second degré à une et à plusieurs inconnues ; applications. Equations du troisième degré, et applications. Progressions géométriques et applications à l'aide des logarithmes. Progressions arithmétiques des divers ordres ; leur somme. Analyse combinatoire. Binôme et polynôme pour des puissances entières. Théorie des coefficients indéterminés. — Steiner.

Géométrie, 3 heures en été, 2 heures en hiver. — Trigonométrie plane ; étude détaillée et applications. — Points et axes de moyenne distance, considération qui permet de démontrer aisément un grand nombre de vérités géométriques. — Lieux géométriques plans, étudiés au moyen des coordonnées, à savoir : équations du premier degré ou étude des droites ; équations du second degré ou étude des coniques ; étude synthétique de celles-ci. Stéréométrie. — Steiner.

C'est, comme on le voit, le plan d'études d'un enseignement très rationnel basé sur la méthode intuitive que Steiner a développée d'après les principes de Pestalozzi. On sait qu'en effet Steiner fut un disciple de l'Ecole d'Yverdon, où il séjourna de 1814 à 1818, d'abord comme élève, puis comme maître. Grâce à cette heureuse influence, il a su éviter l'écueil d'un enseignement dogmatique qui convient si peu à l'initiation aux premiers éléments, mais qui n'est encore que trop répandue de nos jours.

Congrès international des mathématiciens de 1900.

Dans le premier numéro de notre revue (p. 57), nous avons dit quelques mots de l'organisation de ce congrès, et nous avons annoncé qu'une circulaire avait été adressée à un grand nombre de mathématiciens. On y demandait aux destinataires, non pas un engagement formel, impossible à prendre aussi longtemps d'avance, mais une indication sur les intentions de chacun et sur les probabilités de participation au Congrès. Une simple carte postale, portant ces deux mentions :

Il est probable que j'assisterai au Congrès de Paris,

ou

Il n'est pas probable que j'assiste au Congrès de Paris,

rendait très pratique et très facile le mode de réponse.

On peut considérer aujourd'hui les réponses comme toutes parvenues au Comité d'organisation : et d'après ce que nous apprenons, elles sont de nature à donner l'assurance que le Congrès sera un véritable succès.

Plus de 1 600 réponses sont en effet parvenues, et parmi elles 960 (en chiffres ronds) sont affirmatives ; 430 de ces adhérents annoncent en même temps la présence probable de membres de leurs familles, s'élevant à plus de 670.

Au point de vue des nationalités, la France figure, parmi les 960 adhérents, pour 260 ; l'Italie pour 210 ; l'Allemagne pour 130 ; la Grande-Bretagne pour 80 ; les Etats-Unis pour 60.

Nous ne manquerons pas de suivre toute la préparation et l'organisation de ce Congrès, qui sera un gros événement scientifique, et de tenir nos lecteurs au courant des résolutions qui seront prises. Dès à présent, il est un point, essentiellement pratique, sur lequel nous pouvons donner une indication utile. Il est impossible aux organisateurs de s'occuper de l'installation matérielle des Congressistes pendant leur séjour à Paris, surtout avec les complications résultant de l'affluence produite par l'Exposition. Mais nous sommes informés que l'agence de voyages Lubin se montre disposée à aider dans toute la mesure du possible les membres du Congrès, au point de vue dont nous parlons.

Dès maintenant, ceux d'entre eux qui se préoccupent de leur future installation pendant leur séjour à Paris peuvent écrire, pour exposer leurs désirs et solliciter des renseignements, à *M. Lubin, 36, boulevard Haussmann, Paris*, lequel se fera un plaisir de leur fournir les premières indications nécessaires.

Quant à la préparation scientifique du Congrès, elle se trouvait, dans une certaine mesure, subordonnée à la préparation administrative. Au point où en sont aujourd'hui les choses, il est probable que le Comité d'organisation va maintenant s'en occuper d'une façon toute particulière.

Rappelons enfin, pour terminer :

1° Que la date du Congrès est : 6-12 août 1900 ;

2° Que le prix de la carte de membre est de 30 francs ;

3° Que les cartes de famille seront fixées à un prix très réduit (non encore fixé définitivement) ;

4° Que le siège du Comité d'organisation est celui de la *Société mathématique de France*, 7, rue des Grands-Augustins, Paris.

Prix proposé par l'Académie de Toulouse.

L'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse a proposé pour le prix de Mathématiques (année 1901) le sujet suivant :

Recherche et étude des familles de surfaces possédant cette propriété que

toutes leurs trajectoires orthogonales soient des courbes planes, en se plaçant particulièrement à l'un des points de vue suivants :

1° Pour que toutes les surfaces définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation : $\varphi = f(x, y, z)$, où φ est un paramètre variant d'une surface de la famille à l'autre, admettant des trajectoires orthogonales planes, il faut que f vérifie une équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont on propose l'étude.

2° On pourra utiliser aussi la méthode périmorphique en s'inspirant du « Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes (1) *» de Ribaucour et en particulier du chapitre XIII, intitulé : « Recherches des trajectoires orthogonales planes des surfaces ».*

La valeur du prix est de 500 francs. Les Mémoires doivent être écrits en français ou en latin et adressés, avant le 1er janvier 1901, au Secrétariat de l'Académie. Ils doivent porter sur la première page une sentence ou devise qui sera répétée sur un billet séparé et cacheté, renfermant le nom de l'auteur.

Les thèses de doctorat.

Nous avons décidé d'introduire régulièrement dans notre publication un relevé exact et complet des thèses soutenues devant la Faculté des sciences de Paris. Nous le commencerons dans le numéro de juillet, et il partira du 1er janvier 1899. Dès maintenant, nous pouvons mentionner de M. René Baire, professeur au lycée de Bar-le-Duc, une thèse récente *Sur les fonctions de variables réelles*.

Les facultés des départements font, croyons-nous, bien peu de docteurs. Si le fait se produisait exceptionnellement, nous serions heureux de le signaler, à condition que nos correspondants veuillent bien le porter à notre connaissance.

Nous adressons un appel analogue à nos lecteurs des divers pays, en ce qui concerne les thèses ou dissertations mathématiques correspondant au doctorat.

Enfin, les auteurs eux-mêmes étant particulièrement intéressés à ce que leurs découvertes soit répandues et connues, nous leur rappelons que chaque thèse dont nous aurons reçu un exemplaire sera mentionnée au *Bulletin bibliographique*, et que celles dont on nous adressera deux exemplaires feront l'objet d'un compte rendu publié dans notre *Bibliographie*.

(1) *Journal de mathématiques pures et appliquées.*

CORRESPONDANCE

Palaiseau, 21 mars 1899.

J'ai l'honneur de vous adresser un certain nombre de questions, ou plus exactement de sujets d'étude : je crois qu'on pourrait en faire l'objet, en tout ou en partie, d'une thèse de doctorat, par exemple.

I. — Déterminer pour $u \geq 4$, $N \leq 100$: 1° les groupes 2 fois transitifs à 3 degrés de classe $N-u$ et de degré N ; 2° les groupes k fois transitifs à $k+1$ degrés de classe $N-u$ et de degré $N+k-2$.

II. — Déterminer pour $N \leq 100$, $u \geq 3$ les groupes primitifs de classe $N-u$ et de degré N à au moins 3 degrés, soit quel que soit N, soit pour des formes particulières de N.

III. — Déterminer les groupes de classes $N-3$ et $N-4$ et de degré N premier pour $N \leq 100$.

IV. — Déterminer pour $kp+1 \leq 100$ ou pour $p \leq 100$ les groupes de degré premier renfermant $2p+1$, $3p+1$,..... ou $kp+1$ sous-groupes d'ordre p.

V. — Démontrer, si cela est vrai, que pour $N \leq 100$ un groupe de degré N est au plus 5 fois transitif. Sinon, trouver les valeurs de N exceptionnelles et montrer que ce sont bien des exceptions.

VI. — Nomenclature complète des groupes de classes $N-3$, $N-2$, $N-1$.

Pour les cinq premiers sujets, on pourrait parfaitement se borner à trouver les valeurs de N pour lesquelles on peut affirmer l'existence d'un groupe jouissant des propriétés indiquées, et celles pour lesquelles on peut affirmer le contraire.

La limite supérieure 100 indiquée dans quelques-unes de ces questions pourrait d'ailleurs parfaitement être remplacée par une limite inférieure, 50 par exemple.

Pour les renseignements bibliographiques ou des indications plus complètes, je me tiens à la disposition [1] de ceux qui voudraient étudier quelqu'une de ces questions, lesquelles pourraient probablement faire l'objet d'une thèse de doctorat, en tout ou en partie.

Veuillez agréer, etc.

Edmond MAILLET,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

[1] L'adresse de M. Ed. Maillet est à Palaiseau (S.-et-O.), boulevard de la Grande-Ceinture.

Paris, 30 avril 1899.

..... A mon avis, les mathématiques ne jouent pas encore, dans l'éducation générale de l'esprit, un rôle suffisant ; si j'allais jusqu'au bout de ma pensée, je dirais même que leur rôle est à peu près nul (il s'agit de l'enseignement secondaire, naturellement). A quoi cela tient-il ? Vous le savez aussi bien que moi, et l'on peut affirmer que cela tient pour beaucoup à ce que les débuts sont trop pénibles. On enseigne trop de choses, trop tôt et trop vite : ainsi, en quatrième, il faut que des enfants de treize ans apprennent le premier et le deuxième livres de Géométrie, et à raison de deux heures par semaine ! Et puis, en général, les ouvrages ne sont pas assez clairs, ce qui ne veut pas dire qu'ils soient mal faits ; mais ils supposent des élèves tous très intelligents, ou doués d'aptitudes spéciales. Or, chacun sait que, si l'on rencontre de temps en temps de pareils élèves, les classes sont loin d'être composées exclusivement par eux ; ils y sont toujours en très petit nombre, et cependant, notre enseignement et nos programmes s'adressent à une élite. On dit « mais le professeur est là pour suppléer à l'insuffisance du livre ». Allons donc ! le professeur ne voit ses élèves que quelques heures par semaine... « Mais qu'il fasse un cours ! » Et le temps ? Alors il n'y aura plus ni interrogations ni exercices en classe, mais seulement une dictée monotone et ennuyeuse à laquelle l'esprit ne prendra aucune part.

Et cependant, outre le bénéfice immense que retirerait l'esprit d'un enseignement bien dirigé, quelles recrues on ferait pour le plus grand avantage des mathématiques ! Car, quoi qu'on dise, il y a peu de gens complètement *inaptes ;* il y a au contraire beaucoup de *bons esprits* qui ne profitent nullement de cet enseignement et qui devraient en profiter.

Non, en mathématiques surtout, on ne fera jamais assez clair. Il faut être compris facilement ; et quel professeur peut affirmer, après une démonstration, que ses élèves ont saisi ? Et puis les ouvrages qu'on met entre leurs mains : Arithmétique, Algèbre, Géométrie..... n'ont entre eux aucun lien. — Et cependant, comme vous le dites si bien, la Mathématique est *une*. — Ne devrait-il pas exister au moins un traité unique, divisé comme on voudra, embrassant une étendue suffisante de la science et tel qu'un esprit moyen puisse le *lire* d'un bout à l'autre ? Au lieu de cela, des morceaux séparés, exquis, sans doute ; mais ce ne sont que des morceaux. Le jeune homme qui a des aptitudes arrivera à en faire un tout ; mais justement ce n'est pas de celui-là qu'il faut s'inquiéter, il n'a pas besoin de professeur.

Enfin, dans l'enseignement, en général, on ne laisse pas assez à l'intuition.

Excusez-moi, monsieur, pour une lettre si longue et cependant incomplète, mais c'est un sujet qui me tient au cœur.

Veuillez, agréer, etc. G. Budelot.

BIBLIOGRAPHIE

B. Niewenglowski, inspecteur de l'Académie de Paris, docteur ès sciences, et L. Gérard, professeur au lycée Charlemagne, docteur ès sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire**, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales, des candidats aux écoles du gouvernement, des candidats à l'agrégation, de l'enseignement moderne et des classes de lettres. — Paris, Georges Carré et C. Naud, 1898.

I. Géométrie plane (*mathématiques élémentaires; enseignement classique*) : 1 vol. in-8° de XX-362 pages, avec 290 figures, cartonné à l'anglaise; prix : 5 francs. — II. Géométrie plane (*enseignement moderne*) : 1 vol. in-8°, de XX-252 pages, avec 226 figures, cartonné à l'anglaise : prix : 3 fr. 50. — III. Géométrie plane (*classes de lettres*), 1 vol. in-8° de XVI-164 pages, avec 182 figures, cartonné à l'anglaise : prix : 3 fr. 50.

Les trois cours de MM. Niewenglowski et Gérard comprendront chacun deux volumes. Les volumes concernant la Géométrie de l'espace sont sous presse ou en préparation. Dans les trois volumes parus, relatifs à la Géométrie plane, les auteurs ont adopté la division traditionnelle en quatre livres, en apportant quelques changements à l'ordre des matières et introduisant d'importantes innovations dont nous allons examiner les principales. Nous nous occuperons plus spécialement du Cours complet pour l'enseignement classique : les volumes destinés à l'enseignement moderne et aux classes de lettres en sont des extraits : les auteurs ont supprimé, dans ces cours réduits, les théories complémentaires qui ne figurent pas dans les programmes, en apportant d'ailleurs le plus grand soin à conserver tout ce qui est essentiel et à maintenir chaque volume à la portée des lecteurs auxquels il s'adresse.

L'introduction et le premier livre sont sensiblement les mêmes dans les trois volumes. Une innovation capitale apparaît dès l'introduction. Les auteurs y ont placé, indépendamment des définitions et des préliminaires ordinaires, et immédiatement après les premières notions sur la ligne droite, des premières notions sur le *cercle*, qui, dans la plupart des Traités de Géométrie, ne sont indiquées qu'au second livre. Cela constitue un véritable progrès : tout enfant, avant d'avoir la moindre notion de Géométrie, connaît la règle, qui lui sert à tracer ses cahiers, et le compas, avec lequel il s'est amusé à faire des ronds. En mettant à profit et régularisant ces données déjà familières, on donne à la Géométrie sa base naturelle. On peut alors montrer immédiatement la relation intime qui existe entre les angles et les arcs, définir aisément la rotation, faire comprendre la graduation de la circonférence (ou mieux, du *cercle*)[1] et toutes ses conséquences, y compris la

[1] Les auteurs ont dit très justement (*Introd.*, p. VIII) : « Nous emploierons le

notion du rapporteur. La possibilité de décrire des cercles ou arcs de cercle facilite beaucoup la plupart des démonstrations du premier livre. D'autres simplifications pourront en résulter, par exemple, dans la démonstration du troisième cas d'égalité des triangles.

Pour tirer tout le parti possible de cette réelle amélioration, il nous paraît indispensable de transporter dans le livre premier les premières constructions élémentaires que donne le chapitre v du livre II. Les tracés de parallèles, de perpendiculaires, de bissectrices, sont des corollaires immédiats des définitions et propriétés de ces lignes et de l'égalité des triangles. La notion de cercle a conduit directement à celle de rapporteur : les notions de parallèles et de perpendiculaires conduisent de même à la définition de l'équerre et à l'indication de son emploi. L'*existence* du milieu d'un arc et de la bissectrice d'un angle, laissée en suspens à la page 30, prouvée seulement à la page 98, pourrait être affirmée, grâce au rapporteur, à la fin de la page 8, du chapitre premier du livre premier : etc.

Une autre nouveauté d'un grand intérêt est l'introduction, au livre II, des principes de *Géométrographie*, dus à M. E. Lemoine. La Géométrographie est une science que Steiner a appelée de tous ses vœux [1], à laquelle M. Lemoine a su donner du premier coup un caractère surprenant de simplicité, qui est déjà cultivée et même enseignée dans plusieurs pays étrangers, et dont l'utilité et l'importance ne sont plus à démontrer. Mais, pour mettre les élèves réellement en possession de ce précieux instrument d'évaluation de la simplicité des constructions, il est nécessaire d'en développer davantage l'application et de ne pas la borner à quatre tracés de perpendiculaires et de parallèles. Quand, ainsi que nous le demandons ci-dessus, les constructions élémentaires auront été exposées au livre premier d'une manière indépendante, on pourra consacrer entièrement le chapitre v du livre II à la Géométrographie, et, après avoir repris à ce point de vue les premières constructions, montrer son application à des problèmes déjà plus difficiles, tels que ceux de construction de triangles et de tangentes que contient bien le chapitre v actuel, mais sans emploi de la Géométrographie. Cette extension est indispensable pour que les élèves puissent se rendre compte de résultats simplement énoncés tels que celui de la page 204 et pour les mettre en goût de chercher celui non indiqué (p. 237) concernant la méthode de M. Fouché, qui, mieux qu'un autre, leur fera voir que la construction la plus simple *théoriquement* peut être fort compliquée *pratiquement*.

Le livre III, sur lequel sont venues se greffer les théories de la Géométrie moderne, a acquis une ampleur telle qu'il faudra bien, un jour ou l'autre, se résoudre à le subdiviser. Les auteurs s'attachent à préciser ces théories en introduisant systématiquement la notion de *sens*, qu'ils ont déjà fait entrevoir dès le début pour les angles. Le chapitre premier de ce livre est consacré aux *vecteurs*, notion très importante, qui conduit immédiatement à celles

---

mot *cercle*, au lieu de *circonférence de cercle*, pour désigner la courbe elle-même. » On peut donc leur demander de se conformer, un peu plus qu'ils ne l'ont fait, à l'excellente décision prise par eux dès le début. Voir *Enseignement mathématique*, n° 1, p. 24.)

(1) On trouvera l'opinion motivée de Steiner dans la préface du Cours de l'enseignement moderne ; cette citation, justification lumineuse de la nécessité de la Géométrographie, serait également bien placée dans le Cours de l'enseignement classique.

de la division harmonique et de l'équipollence, et qui pourrait conduire à beaucoup d'autres. Viennent ensuite (ch. II, III, et IV) les *lignes proportionnelles*, l'*homothétie* et la *similitude*, d'après cette définition logique : « Deux figures F, F' sont semblables quand l'une d'elles est égale à une homothétique de l'autre. » Dans le chapitre V (*Relations métriques*), il est fait une large place, selon le vœu de Charles, au théorème de Stewart ; les auteurs ont aussi généralisé l'emploi des anti-parallèles, qui simplifie l'écriture et rend les raisonnements plus intuitifs. Le chapitre VI expose les théories des *transversales*, du *rapport anharmonique*, des *polaires*, de l'*inversion*, etc. ; les chapitres VII et VIII étudient les *polygones réguliers* et la *longueur de la circonférence* (ou du cercle).

Ce livre III, comme on le voit par cette énumération d'ailleurs très incomplète, aborde un nombre considérable de sujets. Il y manque cependant des notions très importantes, celles relatives aux divisions homographiques, à l'involution, aux triangles homologiques. Elles sont ici d'autant plus nécessaires que le cours n'est pas seulement destiné aux élèves de mathématiques élémentaires, mais aux étudiants de tous les degrés, jusques et y compris les candidats à l'agrégation.

Pour la théorie des *aires* (livre IV), les auteurs ont suivi, dans le texte, la méthode classique. Dans une note finale (Note 3), ils ont exposé une méthode, due à M. L. Gérard, affranchie de tout postulatum, et où ils montrent que deux polygones quelconques sont comparables et que le résultat de la comparaison est indépendant du procédé suivi.

Deux autres notes (1 et 2) sont consacrées à la mesure des grandeurs, aux transformations du plan et à l'étude des groupes les plus simples. Ces notes sont certainement fort intéressantes ; mais elles nous semblent trop abstraites. Il serait utile de développer les applications, à peine indiquées pour la note 1 et qui manquent presque totalement dans la note 2.

Chaque chapitre est suivi d'exercices gradués ; pour tous ceux qui offrent des difficultés sérieuses, les auteurs ont ajouté des indications sur la solution.

En résumé, les cours de MM. Niewenglowski et Gérard contiennent d'excellentes innovations et nous paraissent appelés à rendre de grands services à l'enseignement. Nous n'y demandons aucune suppression ; mais, dans le cours de l'enseignement classique, diverses additions sont indispensables : 400 et même 450 pages, au lieu de 360, n'ont rien d'excessif pour un cours destiné aux candidats à l'agrégation. Les auteurs ont pris d'heureuses initiatives, mais ils les ont prises un peu timidement. Ainsi, la Géométrographie a été maintenue par eux dans le cours de l'enseignement moderne seulement ; c'est une demi-mesure ; il s'agit ici d'une science si utile et si élémentaire que son introduction, même dans l'enseignement des classes de lettres, s'imposera certainement dans un avenir prochain.

L. Ripert (Paris).

M. Nassò.—**Algebra elementare** ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici ; 1 vol. 426 pages ; prix 3 L. 1/2 ; Turin, libreria Salesiana, 1898.

Ce petit volume, destiné aux élèves, est rédigé avec une extrême conscience et une grande clarté. L'exécution matérielle en est excellente. Il se

divise en deux parties, la seconde comprenant uniquement des exercices énoncés, au nombre de plus de 2000.

L'auteur n'a pas évidemment la prétention d'innover. Il suit fidèlement l'ordre classique qu'on a suivi avant lui. C'est ainsi, par exemple, qu'on trouve dans le Livre III, après les logarithmes, la théorie des proportions qui devrait prendre place au début des éléments, dans un enseignement rationnel. On peut regretter aussi de ne pas trouver quelques premières indications sur la théorie des imaginaires. Enfin, il est permis de se demander si la profusion des exercices, dont plusieurs s'appliquent souvent à un même sujet, est bien un réel avantage, même pour des élèves.

Il est juste d'ajouter que ces défauts ou ces lacunes sont probablement imputables, non pas à l'auteur, mais aux programmes étroits dans lesquels il se trouvait emprisonné, et qui exercent leurs ravages en Italie..... et ailleurs.

En dépit de ces critiques de détail, le livre de M. Nassò est fort intéressant et recommandable, et pourra servir aux élèves comme guide très utile, s'il ne contribue pas à perfectionner l'enseignement.

C. A. L.

J. Richard. — **Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne ;** 1 vol. in-8° : prix : 5 francs ; Paris, Société d'éditions scientifiques, 1898.

Extrait de l'avertissement. — Ces leçons de géométrie moderne contiennent des matières généralement enseignées comme de simples dépendances de la géométrie analytique.

Elles contiennent en outre l'application de ces théories aux lignes et surfaces du troisième ordre. On verra combien une telle méthode l'emporte en simplicité sur la géométrie analytique.

Voulant que ces leçons puissent être comprises même des meilleurs élèves de mathématiques élémentaires, je n'ai nulle part supposé connues ni la théorie des déterminants, ni celle des dérivées. Comme il était nécessaire d'employer le calcul des imaginaires, j'en ai fait l'objet d'une leçon.

Pensant qu'un aperçu sur la géométrie non euclidienne était de nature à intéresser le lecteur, j'ai, à la fin, ajouté une leçon sur ce sujet, en la faisant précéder de deux autres, nécessaires à son exposition.

Les matières de ces leçons sont généralement étudiées dans les cours de mathématiques spéciales, autant que le permet un programme chargé. Leur place naturelle serait, semble-t-il, dans le cours *Elémentaire supérieur*, qui existe seulement dans certains lycées.

Alexandroff (Ivan), professeur de mathématiques au lycée de Tambov (Russie). — **Problèmes de Géométrie élémentaire,** *groupés d'après les méthodes à employer pour leur résolution,* traduit du russe sur la 6e édition, par P. Aitoff, 1 vol. in-8°. Prix : 5 fr. Paris, Hermann, 1899.

Ce petit livre qui a eu, en peu de temps, six éditions en Russie, semble appelé, par l'esprit dans lequel il est conçu, par la clarté de son exposition, par le nombre et le choix des exercices résolus ou proposés, à rendre de grands services à l'enseignement de la Géométrie élémentaire,

On peut classer les problèmes de Géométrie de deux manières. La première consiste à les ranger dans l'ordre des matières d'un cours ou d'un traité (ligne droite, cercle, figures semblables, aires, etc.); c'est celle qui, jusqu'à ces dernières années, a été exclusivement adoptée et que commandent d'ailleurs les nécessités de l'enseignement classique. Mais elle a l'inconvénient d'exiger pour chaque problème une solution spéciale, isolée, qui ne représente qu'une difficulté surmontée sans mettre en relief *la méthode*, les motifs de son emploi et sa possibilité d'application à beaucoup d'autres cas.

La seconde manière consiste à classer les problèmes d'après les méthodes à employer pour leur résolution, à établir une théorie de chaque méthode et à montrer ensuite l'application des principes sur lesquels elle repose aux problèmes de diverses natures, quels que soient les éléments de figures qui entrent dans leur énoncé. Cette marche, récemment et brillamment inaugurée par un ouvrage de M. J. Petersen (*Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*) est la seule qui permette, le premier enseignement donné, d'apprendre aux élèves à résoudre méthodiquement les problèmes, et qui puisse être féconde en résultats.

C'est de ces principes que s'inspire le livre de M. Alexandroff, qui en développe l'application. Chaque chapitre ou subdivision de chapitre débute par l'exposé de la méthode à employer. L'auteur donne ensuite, *pour chaque méthode*, un grand nombre de problèmes-types, complètement résolus et discutés, qu'il fait suivre des énoncés d'un plus grand nombre encore d'exercices auxquels la même méthode s'applique.

L'ouvrage, divisé en quatre chapitres, ne contient pas moins de 900 exercices, dont 150 environ accompagnés d'une solution détaillée. Il est plus spécialement consacré à la Géométrie plane; on trouvera cependant, au chapitre III, un certain nombre d'exercices sur la Géométrie dans l'espace.

L. Ripert (Paris).

H. Poincaré. — **La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes**; 1 vol. in-8° écu, 80 pages (collection *Scientia*); prix 2 fr.: Carré et Naud, Paris, 1899.

S'il ne fallait aux mathématiciens que des ouvrages où pullulent les formules compliquées, on devrait d'emblée éliminer du compte rendu bibliographique d'une revue mathématique l'ouvrage dont nous avons le plaisir de dire quelques mots.

Mais précisément parce qu'il est écrit dans une langue élégante et simple, cet opuscule sera doublement utile: aux physiciens, qui désirent se mettre au courant des théories de Maxwell avant d'en aborder l'étude mathématique: et aux mathématiciens, qu'il initiera au côté physique et expérimental de ces questions.

Mais avant de parler de l'ouvrage même, disons quelques mots de cette nouvelle encyclopédie *Scientia* qui s'annonce si bien.

A notre époque où il est nécessaire d'être rapidement au courant des questions scientifiques actuelles et où il importe de les voir sous un petit volume, dégagées en partie des nombreux tâtonnements expérimentaux et théoriques qui les ont engendrées, la collection *Scientia* est appelée à rendre de nombreux services, surtout si elle continue de s'adjoindre des collabora-

teurs aussi distingués que ceux dont nous avons les noms sous les yeux. *Simplifier sans dénaturer*, telle nous semble devoir être sa devise.

A ce point de vue, il faut reconnaître que cette publication débute par un coup de maître. L'opuscule de M. H. Poincaré est un véritable chef-d'œuvre de clarté et de concision. Le nom de son auteur en était d'ailleurs la garantie.

Sans aucune formule, par des comparaisons ingénieuses et suggestives, il a su mettre à la portée de tous ceux qui possèdent les notions élémentaires d'électricité un des sujets réputés les plus abstraits et les plus délicats, et cela sans aucune de ces atteintes à la vérité qui déprécient tant d'ouvrages dits de vulgarisation, où la simplicité n'est obtenue qu'en sacrifiant la réalité.

C'est certainement là ce qui fait la valeur réelle et dans une certaine mesure durable de cet ouvrage.

Quant au contenu même de l'ouvrage, le lecteur trouvera exposés dans les douze chapitres qui le composent tous les traits les plus essentiels de la théorie de Maxwell. Chacun d'eux constitue en quelque sorte un résumé qu'il serait impossible de vouloir résumer davantage.

Après avoir initié le lecteur aux principes fondamentaux de la théorie de Maxwell, et cela sous leur forme la plus tangible, l'auteur consacre quelques pages à l'analyse des expériences qui ont précédé la découverte de Hertz. L'étude des décharges oscillantes des bouteilles de Leyde et la question du double amortissement de ces décharges par la résistance ohmique et par rayonnement de l'énergie dans l'espace environnant y sont particulièrement mises en relief.

Les chapitres suivants (VI et V), sont consacrés à l'étude des oscillations beaucoup plus rapides obtenues par Hertz, oscillations qui, les premières, ont permis de donner un appui expérimental aux idées de Maxwell. Ces chapitres traitent du fonctionnement de l'excitateur, de ses diverses formes, des perfectionnements qui y ont été apportés, ainsi que des moyens peu nombreux d'investigation dont dispose l'expérimentateur dans ces délicates recherches. Ces quelques pages mettent bien en évidence combien sont difficiles et souvent peu concluantes les expériences de cette nature : la rapidité même des oscillations rendant, le plus souvent, illusoires les indications des instruments généralement en usage dans les recherches d'électricité. Sous ce rapport, la distinction entre les procédés basés sur l'observation de l'étincelle et ceux basés sur une action thermique ou mécanique facilitera à plus d'un lecteur ou expérimentateur l'interprétation correcte des résultats.

Vient ensuite la question fondamentale de la propagation des perturbations électromagnétiques. L'auteur en donne une rapide et claire analyse dans les chapitres VI, VII et VIII, en faisant bien ressortir ce qui, dans ces recherches, pouvait valider ou infirmer le théorie de Maxwell : les points les plus essentiels y sont passés en revue : vitesse de propagation de l'onde électromagnétique le long d'un fil, diffusion, ondes stationnaires, phénomènes de résonance multiple et d'amortissement, pour arriver à l'*experimentum crucis*, les expériences de Karlsruhe et de Genève qui ont tranché définitivement la question de l'égalité de la vitesse de propagation de l'onde dans le fil et dans l'air.

Dès ce moment la théorie de Maxwell est, non pas définitivement assise, (puisque aucune théorie ne peut être considérée comme définitive et qu'elle peut toujours être remplacée par une autre, comme le fait d'ailleurs remar-

quer l'auteur au début de l'ouvrage), mais assurée de la suprématie sur les théories anciennes et particulièrement sur celle des actions à distance.

Les quatre derniers chapitres de l'ouvrage viennent enfin compléter l'exposé de la théorie de Maxwell, en montrant plus particulièrement les analogies et les différences entre les oscillations hertziennes et les vibrations lumineuses. On y trouve : la question de la propagation dans les diélectriques, les relations plus ou moins bien vérifiées entre l'indice de réfraction et la constante diélectrique ; la production des vibrations très rapides ; l'imitation souvent répétée des phénomènes de l'optique tels que : réfraction, dispersion, polarisation, etc., et enfin d'intéressantes considérations sur la synthèse théoriquement possible de la lumière à l'aide de vibrations électriques extrêmement rapides.

D'un bout à l'autre de cet exposé, l'enchaînement est d'une logique parfaite, et la simplicité de la forme se trouve réunie à une grande hauteur de vue. Indépendamment des considérations théoriques et des discussions qu'elles entraînent, une juste part est faite à la description des dispositifs expérimentaux et des moyens d'observation qui ont permis de trancher les divers points controversés.

La lecture de l'ouvrage en est rendue tout à fait aisée, et il en résulte pour le lecteur une impression d'ensemble très nette bien qu'abrégée, de la genèse de ces théories, de leur développement et de leur état actuel,

De telles qualités, jointes au nom de l'auteur, suffisent à assurer à cet ouvrage un succès complet.

C.-E. Guye (Zurich).

Julius Lange. — **Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin** (1821-1863). nach seinen Personalakten dargestellt ; nebst einem Bildnis von J. Steiner, 1 broch. in-4°, 70 p. Berlin, Gaertner, 1899.

En célébrant son 75e anniversaire de fondation, l'École réale supérieure (à l'origine École industrielle) de Berlin n'a pas oublié de rendre en même temps un digne hommage à la mémoire de l'un de ses plus illustres maîtres, le géomètre suisse Jacob Steiner (1796-1863). La brochure que vient de rédiger à cette occasion M. le professeur Dr Lange nous donne d'intéressants renseignements sur la vie de Steiner à Berlin, où il était venu se fixer après avoir fait ses études à l'école de Pestalozzi à Yverdon et à l'université de Heidelberg.

Dans un exposé très documenté, l'auteur nous montre successivement Steiner dans l'enseignement privé et maître auxiliaire au Gymnase Werder (1821-1825), maître auxiliaire (1825-1829), puis maître principal (1829-1835) à l'École industrielle, et enfin professeur à l'Université (1835-1863).

C'est précisément pendant les années passées à l'École industrielle que Steiner publia la plus grande partie de ses célèbres mémoires sur la Géométrie, et c'est pendant cette même période que lui furent conférés les titres de docteur *honoris causa*, de professeur royal et de membre de l'Académie des sciences.

Au point de vue de l'enseignement, cette publication offre un grand intérêt ; elle donne une idée très nette de la méthode suivie par le savant géomètre dans ses leçons de mathématiques élémentaires. Nous avons reproduit plus

hant (voir p. 217) son plan d'études qui, encore aujourd'hui, mériterait d'être pris en considération dans bien des établissements.

Cette notice contient un grand nombre d'extraits de lettres inédites et d'actes officiels relatifs aux différentes fonctions occupées par Steiner. M. Lange a eu le privilège de puiser ses renseignements aux sources les plus sûres : il a eu à sa disposition les diverses archives de Berlin, depuis celles du gymnase Werder jusqu'aux archives du ministère et de l'Académie des sciences. On se trouve donc en présence d'une étude historique très documentée, renfermant des détails précieux sur divers points qui, forcément, avaient échappé aux deux biographes de Steiner, M. C. F. Geiser (1), son neveu, et M. J. H. Graf (2).

H. Fehr.

E. Fourrey. — **Récréations arithmétiques**; 1 vol. in-8°, 261 p., 106 fig. : Paris, Nony, 1899.

Après les *Récréations mathématiques* de Lucas, après l'intéressant ouvrage de Rouse Ball, récemment traduit en français, l'auteur a pensé qu'il y avait place encore pour un exposé de Récréations, concernant exclusivement l'Arithmétique. On ne peut que l'en féliciter; son volume ne fait pas double emploi avec ceux de ses prédécesseurs. Rien n'est plus propre que ce genre de recueils à faciliter l'initiation mathématique : entre des mains habiles ce peuvent être de précieux instruments pédagogiques.

M. Fourrey s'occupe successivement des *nombres abstraits*, des *applications* et des *carrés magiques*. C'est avec plaisir que nous avons trouvé, dans cette dernière partie, la notion vraiment géniale des lignes arithmétiques et des carrés hypermagiques de M. Gabriel Arnoux, qui mérite d'être plus connue et appliquée qu'elle ne l'a été jusqu'ici.

En résumé, le livre de M. E. Fourrey est intéressant et amusant pour tout lecteur aimant l'Arithmétique. Il sera utile entre les mains de tout éducateur de l'enfance ayant conscience de sa mission.

---

(1) *Zur Erinnerung an Jacob Steiner*. Schaffhausen, 1874.

(2) *Der Mathematiker Jacob Steiner von Utzensdorf*. Bern, 1897.— *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli*. Bern, 1896.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXXVIII, Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 10 (6 mars). — W. Steckloff : Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. — E. Goursat : Sur le prolongement analytique. — C. Stephanos : Sur une extension du calcul des substitutions linéaires. — E. Borel : Sur la nature arithmétique du nombre *e*. — C. Guichard : Sur les réseaux conjugués dont les courbes d'un système sont des géodésiques. — Tzitzéica : Sur certains systèmes d'équations de Laplace. — Cuessin : Sur les théorèmes de Greene et de Cauchy.

N° 11 (13 mars). — H. Poincaré : Sur les nombres de Betti. — E. Vallier : Sur l'interprétation d'un nombre restreint d'observations.

N° 12 (20 mars). — E. Blutel : Sur les lignes de courbure de certaines surfaces. — C. Guichard : Sur quelques applications de la loi de parallélisme des réseaux et des congruences. — P. Stæckel : Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques.

N° 13 (27 mars). — G. Darboux : Sur la déformation des surfaces du second degré. — J. Boussinesq : De l'effet produit sur le mouvement d'inclinaison d'une bicyclette en marche, par les déplacements latéraux que s'imprime le cavalier. — L. Leau : Sur les fonctions définies par un développement de Taylor. — P. Stæckel : Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. — W. Steckloff : Sur l'existence des fonctions fondamentales. — H. Lebesgue : Sur les fonctions de plusieurs variables.

N° 14 (4 avril). — G. Darboux : Sur la déformation des surfaces du second degré. — J. Boussinesq : Calcul, dans une hypothèse simple, du déplacement latéral que doit s'imprimer le cavalier, sur une bicyclette en marche, pour porter le centre de gravité du système à une petite distance horizontale voulue de la base de la bicyclette. — L.-E. Dickson : Plusieurs groupes linéaires isomorphes au groupe simple 25920.

N° 15 (10 avril). — Hatt : Sur l'interprétation d'un nombre restreint d'observations. — A. Liapounoff : Sur une équation différentielle linéaire du second ordre. — Ch. Méray : Interprétation nouvelle de la condition requise pour qu'une intégrale double, prise sur une plaque de surface, ne dépende que du bord de celle-ci. — Andrade : Sur l'homographie de la théorie des poutres. — E. Wallsch : Sur les surfaces à lignes de courbure planes ou sphériques. — N.-J. Hatzidakis : Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace.

N° 16 (17 avril). — G. Darboux : Sur les transformations des surfaces à courbure totale constante. — Levi-Civita : Sur les intégrales périodiques des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. — M. Petrowitch : Extension du théorème de la moyenne aux équations

différentielles du premier ordre. — W. Steckloff : Sur la théorie des fonctions fondamentales.

N° 17 (24 avril). — G. Darboux : Sur les surfaces à courbure constante positive.

N° 18 (1er mai). — H. Poincaré : Sur les groupes continus. — L.-E. Dickson : Sur une généralisation du théorème de Fermat. — A. Liapounoff : Sur une équation transcendante et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques. — S. Zaremba : Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 296, série 5a, vol. VIII, 1899 ; Rendiconti : Rome, tip. della R. acc. dei Lincei.

Fasc. 4 (19 février). — Bianchi : Sulla teoria della deformazione delle superficie di rivoluzione. — Pincherle : Di un' equazione funzionale simbolica e di alcune sue conseguenze. — Ciappi : Contributo alla geometria delle masse.

Fasc. 5 (5 mars). — Bianchi : Sopra le superficie a curvatura costante positiva. — Pincherle : Sulle singolorita di una funzione che dipende da due funzioni date. — Levi-Civita : Sulle congruenze di curve. — Fubini : Sulle deformazioni infinitesime delle superficie negli spazi a curvatura costante.

Fasc. 6 (19 mars). — Fano : Osservazioni sopra alcune equazioni differenziali lineari — Medolaghi : Contributo alla determinazione dei gruppi continui in uno spazio ad *n* dimensioni. — Levi-Civita : Sulle equazioni a coppie di integrali ortogonali.

Fasc. 7 (9 avril). — Klein : Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado.

Revue scientifique, paraissant le samedi, fondée en 1863 ; 4e série, t. II, 1899, 1er semestre ; prix d'abonnement annuel : Union postale, 35 fr., Paris, 19, rue des Saints-Pères.

N° 11 (18 mars). — E. Marluse : L heure décimale et la loi votée par la Chambre.

N° 12 (25 mars). — A signaler deux articles qui intéressent spécialement l'enseignement mathématique.

L'un est la reproduction d'une conférence intitulée *l'Enseignement des mathématiques*, faite par M. E. Duclaux, de l Institut, à l Association philotechnique. Il s'agit ici de l'enseignement élémentaire tel que celui qui correspond aux programmes des écoles primaires supérieures. L'auteur insiste tout particulièrement sur l'importance d un enseignement rationnel de la Géométrie et parle en faveur d une méthode mieux appropriée à l'étude des premiers éléments que ne l est la méthode euclidienne.

Le second article, intitulé l *Initiation mathématique*, est la reproduction d'une conférence faite par M. C.-A. Laisant à l'Institut psycho-physiologique. C'est l'exposé de ce qui doit être la première initiation donnée à l'être humain dès son enfance. Il s'agit des premières notions empruntées au monde extérieur, et qui précèdent l'éducation mathématique. A cet effet, M. Laisant montre par quelques exemples ce que l on peut faire faire *sous forme de jeu*, soit dans le domaine de l'Arithmétique, soit dans celui de la Géométrie.

Giornale di matematiche di Battaglini, continué par A. Capelli : vol. XXXVII, 1899 : prix d'abonnement annuel : Union postale, 18 L.

Janvier-février. — G. Gallucci : Studio sui tetraedri biomologici con applicazioni armoniche ed alla configurazione di Klein. — I. Massarini : Intorno alle coniche rispetto alle quali due altre sono tra loro polari reciproche. — G. Gattorno : Sulle due curve luoghi dei centri di curvatura geodesica e di curvatura normale di una linea tracciata su una superficie. — E. Ciani : Sopra la configurazione di Kummer.

Jornal de Sciencias mathematicas e Astronomicas, publi cado pelo Dr F. Gomes-Teixeira, vol. XIII, nos 1-5, 1897-1898, Coïmbra, Imprensa da Universidade.

Zeitsch. f. math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann ; 30e année, 1899. Teubner, Leipzig.

No 2 (mars). — A. Schülke (Osterode) : Neuere Bestrebungen beim Logarithmenrechnen. — W. Heymann (Chemnitz) : Lehrsatz über Tetraeder-Transversalen.

No 3 (avril). — G. Leonhardt (Dessau) : Zur Ableitung des Binomiums. — P. Meutzner (Annaberg) : Die Reihen für cos x und sin x.

Zeitsch. f. Mathematik und Physik, herausgegeben von Dr R. Mehmke u. Dr M. Cantor ; t. 44, 1er fascicule (janvier 1899), Teubner, Leipzig.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. L. Gegenbauer ; 10e année, 1899. Eisenstein et Cie, Vienne.

No 2 (avril). — C. Wendt : Note über die Kreisfunctionen. — B. Igel : Zur Theorie der Formen vierter Ordnung. — K. Bobek : Ueber die Flächen dritter Ordnung. — Ed. Janisch : Neue Krümmungsmittelpunkt-constructionen für Kegelschnitte. — L. Gegenbauer : Notiz über die Bessel'schen Functionen erster Art.

Zeitsch. f. d. Realschulwesen, herausgegeben von E. Czuber u. M. Gloeser ; 24e année, no 3 et 4, 1899. Hölder, Vienne.

Unterrichtsblætter für Math. u. Naturw., herausgegeben von Prof. Dr B. Schwalbe und Prof. Fr. Pietzker ; 5e année, nos 1 et 2, 1899. O. Salle, Berlin.

Pædagogisches Archiv. herausgegeben von Prof. C. Dahn, 41e année, no 3 et 4, 1899. Dürr, Leipzig.

Nyt Tidsskrift for matematik, 10e année, série A, nos 1-4, série B, no 1 ; 1899. Kobenhavn.

Publications de la section des sciences mathématiques et naturelles de l'Université d'Upsall, mémoires de MM. J. Fredholm, Br. Holmqvist, A.-E.-O. Andersson, E. Holmgren, A. Brussün, H. Grönwall, A. Ekström.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville; 5e série, publiée par C. Jordan; t. V, prix d'abonnement annuel : Paris, 30 fr.; Départements et union postale, 35 fr. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Fasc. 1. — E. Picard : Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. — De Séguier : Sur certaines sommes arithmétiques. — J. Boussinesq : Aperçu sur la théorie de la bicyclette.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier : 9e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr.; Etranger, 9 fr. Paris, Nony.

N° 5 (février 1899). — J. Paoli : Note sur un complexe du second ordre. — H. Rousseau : Démonstration géométrique de deux propositions relatives aux sections coniques.

N° 6 (mars 1899). — A. Lagrange : Leçons sur la génération des cubiques. — G. Lapointe : Note sur une propriété des cubiques gauches. — P. Prouhet : Note sur une formule qui renferme comme cas particulier la formule des accroissements finis.

N° 7 (avril 1899). — Chalaux : Invariants d'un polynome entier en x relatifs à la transformation linéaire $x = x' + h$.

N° 8 (mai 1899). — A. Etevé : Note sur le tracé continu des coniques à centre.

Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XIII, 1899.

Fasc. 1, 2 (janvier, février, mars, avril). — De Franchis : Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2. — Daniele : Sull'equilibrio delle reti. — Vivanti : Sugli aggregati perfetti. — Pizzetti : Nuova dimostrazione di taluni teoremi relativi alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del prof. Paci. — Gegenbauer : Generalizzazione di alcuni teoremi intorno alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del prof. Paci. — Enriques : Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare. — Alagna : Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numero primo, ovvero il doppio d'un numero primo.

Nouvelles annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, dirigé par C.-A. Laisant et X. Antomari; 3e série, t. XVIII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 15 fr.; départements et union postale, 17 fr.; autres pays, 20 fr.; Gauthier-Villars.

Février. — P. Stæckel (trad. par L. Laugel) : Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. — A. Pleskot : Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré. — G. Fontené : Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet. — F.-J. Vais : Solution graphique de n équations linéaires avec n variables.

Mars. — L. Ripert : Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan. — O. Böklen : Sur les normales de l'ellipsoïde.

— Mariantoni et Palatini : Sur le problème de la polysection de l'angle. — H. Piccioli : Un théorème de géométrie à n dimensions.

Avril. — G. Tarry : Les lignes arithmétiques. — G. Tarry : Curiosité mathématique. — Godefroy : Démonstration nouvelle de la règle de convergence de Gauss. — Lecornu : Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale constante. — G. Candido : Sur un théorème connu. — Tikhomandritzky : Sur le second théorème de la moyenne.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg; 2e série, t. IX, 1899. Prix d'abonnement annuel : Belgique, 7 fr. 50; étranger, 9 fr., Gand, A. Hoste; Paris, Gauthier-Villars.

Janvier. — de Tilly : Démonstration générale du second théorème de Legendre. — C.-E. Wasteels : Sur les figures cylindriques. — V. Jerabek : Sur une quartique.

Février. — Steyvaert : Problèmes de construction. — G. de Rocquigny d'Adanson : Questions d'arithmologie. — Godefroy : Sur la formule du binôme.

Mars. — E. Barbarin : Constructions sphériques à la règle et au compas. V. Jerabek : Sur la trisectrice de Maclaurin.

J. d'Azevedo Albuquerque. — **Arithmetica et Geometria** para o ensino des Lyceus. 1ª classe, 1 vol. 183 p., 3e édition, 1898; pr. 520 reis; 2ª classe, 1 vol. 176 p., 3e édition, 1898; pr. 520 reis; 5ª classe, 1 vol. 223 p., pr. 1000 reis; Porto, Livraria nacional e estrangeira, 1897.

M. Haberland. — **Weitere Sætze über die Apollonische Kreise des Dreiecks**; Neustrelitz, 1893.

F. de Heusch. — **Cours d'analyse**; calcul différentiel : 1 vol. in-8°, 278 p.; prix : 6 fr. 50; Bruxelles, A. Castaigne, 1898.

F. Panizza. — **Aritmetica pratica**; 1 vol. in-18, 188 p.; prix : 1 L., 50; Milan, Hoepli, 1899.

M.-A. Rossotti. — **Formulario scolastico di Matematica elementari** (Aritmetica-Algebria-Geometria-Trigonometria : 1 vol. in-18, 191 p.; prix : 1 L., 50; Milan, Hoepli, 1899.

R. Gerlach. — **Die metrik in projectivischen Koordinaten**; Inaugural-Dissertation; 1 vol. 114 p.; Zurich, Zurcher et Furrer, 1899.

P. Barbarin. — **Notions complémentaires sur les courbes usuelles**; 1 vol. in-8°, 55 p.; Paris, Nony, 1899.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LA MÉCANIQUE RATIONNELLE

ET LA MÉCANIQUE APPLIQUÉE [1]

Au point où vous en êtes arrivés, dans l'étude de la Mécanique, il ne vous a pas échappé, aussi bien dans les questions d'équilibre que dans les questions de mouvement, qu'une différence fondamentale, je pourrais dire un abîme, sépare la théorie pure de l'application. Il est vrai cependant que des applications pratiques vous ont été indiquées, chaque fois que l'occasion s'en présentait ; mais avec d'indispensables précautions, et des réserves ayant pour objet de vous mettre en garde contre des illusions dangereuses.

La raison de la différence dont il s'agit est toute naturelle. Pour pouvoir développer les théories mécaniques qui vous sont enseignées, pour raisonner en se servant du secours de l'Analyse ou de la Géométrie, il est obligatoire de soumettre à ces raisonnements, absolus par leur nature même, des êtres créés par l'imagination de l'homme, mais qui ne présentent pas d'identité avec ceux du monde réel. Cela arrive déjà en Géométrie ; vous savez à merveille que les droites, les cercles, les figures géométriques en général n'existent qu'à l'état d'êtres de raison. Cela arrive, à un plus haut degré peut-être, en Mécanique.

La définition des solides invariables, en particulier, est parfaite au point de vue géométrique, mais irréalisable dans la nature, où tous les corps que nous appelons des solides sont essentiellement déformables. Si par exemple une table repose par quatre pieds sur un plan horizontal, il est incontestable à priori que sous chacun des pieds se produit une pression ; cependant le raisonnement nous montre que la table et le plan d'appui étant considérés comme des solides parfaits, ces pressions sont indéterminées. C'est par une hypothèse qu'on lève l'indétermination, en

[1] Conférence faite le 30 mars 1899 à l'Ecole polytechnique de Paris (élèves de deuxième année).

admettant que le plan horizontal subit des déformations sous l'action des pressions qu'il supporte. Une question analogue se présente dans le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

En hydrostatique, en hydrodynamique ainsi que vous le verrez bientôt, c'est sur des liquides théoriques, c'est sur des gaz parfaits que l'on établit raisonnements et calculs. Or, ces conceptions n'existent que dans notre esprit, à la faveur de définitions créées par nous-mêmes ; aussi, dès que nous voulons nous approcher d'un peu plus près de la réalité, sommes-nous obligés d'ajouter des définitions nouvelles, de compléter nos notions premières par d'autres, le plus souvent d'ordre hypothétique, bien qu'empruntées à l'expérience d'une manière indirecte.

C'est par centaines, c'est d'un bout à l'autre de l'enseignement de la Mécanique que pourraient être présentées des remarques pareilles ; et certainement elles ont dû par avance s'offrir à vos esprits. Il est donc bien superflu d'insister davantage, et j'aime mieux aborder maintenant un nouvel ordre de considérations.

Ce ne sont pas seulement les êtres, ce sont les conditions des phénomènes, qui séparent profondément la science pure des applications. Alors que dans un problème de Mécanique rationnelle, même difficile et compliqué, le nombre des paramètres est limité, ce nombre devient considérable, on pourrait même dire infini, dans le plus simple des phénomènes de mouvement ou d'équilibre dont la nature puisse nous offrir le spectacle. C'est par de perpétuelles abstractions, par la suppression préméditée de toutes les circonstances parasites, que nous simplifions la question au point de la rendre accessible au calcul ou à la Géométrie. Il s'ensuit que le problème que nous pouvons traiter, et quelquefois résoudre, n'est qu'une image (irréalisable) de celui que nous présentait la nature.

En un mot, le calcul et en général les raisonnements mathématiques ne peuvent rien créer ; ce sont de purs agents de transformation ; ils ne rendent jamais que ce qu'on leur a confié. Or, comme dans toute question de mouvement on ne confie à la science pure que des objets n'existant pas dans la nature et placés dans des conditions irréalisables, il s'ensuit que *jamais* la solution obtenue ne pourra convenir à une application.

Sous une autre forme, nous pouvons dire que toute solution

d'une question de Mécanique appliquée, traitée par le secours de la Mécanique rationnelle, est fatalement fausse.

Est-ce à dire que la Mécanique rationnelle ne soit qu'une science vaine, pouvant procurer sans doute des satisfactions à l'esprit de l'homme, mais qui se limite à une sorte de virtuosité mathématique et reste sans utilité pratique ?

C'est précisément le contraire que je voudrais essayer d'établir à vos yeux, avec une entière clarté, après vous avoir exposé aussi franchement que possible les éléments de cette contradiction apparente.

Il importe en effet de reconnaître que, même dans ce milieu de l'École polytechnique, le nombre de ceux qui sont destinés à devenir des mathématiciens, à vivre dans la science pure, est des plus restreints ; tandis que chacun de vous, du jour au lendemain, peut être appelé à résoudre pratiquement des questions pratiques. Et c'est justement en me plaçant sur ce terrain que je crois pouvoir vous montrer quels immenses services pourra vous rendre, au cours de votre carrière, l'enseignement de la Mécanique que vous recevez ici.

A quelques conditions toutefois : c'est de savoir l'interpréter et en profiter ; c'est d'en posséder les éléments d'une façon assez complète pour n'éprouver ni hésitation, ni embarras dans l'emploi que vous en pourrez faire ; c'est enfin de connaître assez bien cette science pour ne pas lui demander ce qu'elle ne saurait vous fournir, et pour exiger d'elle ce qu'elle peut vous donner.

Qu'il s'agisse d'un problème d'application quelconque dont la solution concerne des choses mesurables, jamais une solution exacte (dans l'acception mathématique du mot) n'est, ni possible, ni désirable. Ce qu'il nous faut, ce sont des solutions approchées, dans des limites connues de nous à l'avance, procurées par l'expérience ou par la pratique antérieure. Dès lors, si, en substituant les êtres de raison dont je vous parlais tout à l'heure à ceux qui existent, mais qui se refusent à notre analyse, si en négligeant de nombreux paramètres, et même une infinité de paramètres, nous avons l'assurance que le résultat obtenu ne différera pas du résultat réel au delà des limites d'approximation imposées, ce résultat nous sera extrêmement précieux ; théoriquement faux, il sera pratiquement juste. Et s'il arrive que la solution ainsi obtenue n'ait pu l'être, même au point de vue purement mathé-

matique, que par des procédés d'approximation, elle n'en devra pas être considérée pour cela comme inférieure, bien au contraire. Il suit de là que bien souvent l'impossibilité des intégrations rigoureuses dans les questions de Mécanique n'est pas un obstacle véritable, si l'on peut disposer de méthodes d'approximation. Il en résulte aussi qu'une solution approchée, mais obtenue par des moyens simples, peut être préférable à une autre très rigoureuse qui donnerait beaucoup plus de peine. Il y a plus : c'est qu'entre deux solutions d'un problème de Mécanique, l'une rigoureuse au point de vue mathématique, et l'autre seulement approchée, il y a des cas où cette dernière, à difficultés égales, présente une incontestable supériorité. Cela arrive notamment si l'on se trouve contraint, pour obtenir la première, à supprimer des paramètres qu'on peut faire entrer dans la seconde, et qui rapprochent davantage de la réalité.

On peut aller jusqu'à dire qu'en Mécanique appliquée, ce sont toujours des équations approchées que vous avez à traiter, jamais des équations exactes. Et cependant, les mathématiques pures nous rendent sur ce terrain le plus éminent des services, car elles nous fournissent le moyen de ne pas perdre le bénéfice de nos approximations antérieures. Il est, par exemple, une règle invariable sur laquelle M. Léauté n'a pas manqué d'appeler votre attention, et dont l'importance est si considérable que je tiens à y revenir ici; c'est celle qu'on peut formuler en ces termes : « On intègre une équation approchée ; on ne la différentie pas. »

Pour vous en faire comprendre l'esprit, je prends le plus simple des exemples, celui d'une fonction $F(t)$ d'une seule variable ; si $f(t)$ est une fonction approchée de $F(t)$ nous pouvons écrire $F(t) = f(t) + \varphi(t)$, et nous savons, tout au moins dans un certain domaine de variation de t, que $\varphi(t)$ conservera des valeurs petites, que nous pouvons négliger, et qui restent en tout cas inférieures, en valeur absolue, à une limite θ connue de nous.

Si, dans un intervalle donné, compris dans le domaine où $\varphi(t)$ reste ainsi inférieur à θ, nous venons à intégrer $F(t)\,dt$, nous aurons

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,dt.$$

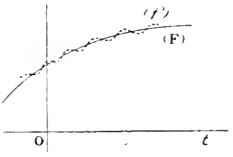
La seconde intégrale conservera une valeur positive ou négative, dont le module sera inférieur à $(t_1 - t_0)\eta$. Si donc nous prenons $\int f(t)\,dt$ à la place du premier membre, nous aurons, par défaut ou par excès, une erreur inférieure à $(t_1 - t_0)\eta$, du même ordre de grandeur que η.

Si au contraire, nous avions écrit

$$F'(t) = f'(t) + \varphi'(t),$$

nous ne pourrions rien affirmer sur la grandeur de $\varphi'(t)$ et la substitution de f' à F' nous conduirait aux plus grossières erreurs.

Une représentation graphique rend du reste intuitive la constatation que nous venons de faire.



Si deux courbes F et f sont rapprochées l'une de l'autre, et si nous prenons, entre deux ordonnées M_0P_0, M_1P_1, les aires de ces deux courbes, elles différeront peu ; l'une des deux sera une valeur approchée de l'autre. C'est l'intégration.

La différentiation consisterait à prendre les coefficients angulaires des tangentes, pour des points de même abscisse, et l'on voit quelles différences considérables les directions de ces tangentes peuvent présenter, bien que la différence des ordonnées $\varphi(t)$ reste très petite

Ces considérations nous montrent que l'esprit mathématique et la possession des méthodes mathématiques sont indispensables pour l'étude de la Mécanique ; mais elles ne suffisent pas. Il faut en outre y apporter des qualités de jugement et de logique générale qui jouent parfois un rôle prépondérant dans les problèmes d'application. En résumé, sans mathématiques, pas de Mécanique rationnelle, et par conséquent pas de Mécanique appliquée ; mais avec les mathématiques seules, pas d'étude

approfondie de la Mécanique. Et il s'exposerait à de cruels mécomptes, celui qui ne verrait dans la Mécanique qu'un prétexte à développements analytiques plus ou moins brillants.

D'ailleurs, pour nous en tenir à la Mécanique rationnelle, il est intéressant de remarquer la position particulière qui lui est assignée dans l'échelle des sciences par sa nature même. Placée aux limites de la science mathématique pure et sur les frontières de la Physique, elle emprunte ses vérités premières, ses principes généraux au monde extérieur. Ce ne sont plus, comme en Géométrie ou dans le calcul, des axiomes réputés évidents : ce sont des vérités d'expérience, constatées sur les mouvements des corps naturels, découvertes par la puissance d'observation et de pénétration de génies exceptionnels, transportées par eux des corps naturels aux êtres idéaux sur lesquels on est contraint de raisonner, et vérifiées par les innombrables conséquences qu'on en déduit et qui jamais ne se sont trouvées en défaut. Ce caractère spécial fait participer la Mécanique aux sciences mathématiques d'une part, aux sciences physiques de l'autre, et lui donne ainsi un rang tout spécial dans l'échelle des connaissances humaines.

Lorsque nous en venons aux applications, ainsi que je vous l'ai signalé déjà, nous sommes conduits à serrer de plus en plus près les phénomènes par une sorte de série d'approximations successives. Il nous faut pour cela faire entrer dans les questions de nouveaux paramètres, primitivement considérés comme négligeables. Comment s'opérera cette introduction ? Vous avez pu le constater déjà : par des hypothèses. Dans la théorie de l'énergie, vous avez remarqué au passage les hypothèses sur la constitution des corps naturels, sur leur organisation moléculaire, sur la chaleur ; en Hydrostatique, vous savez que ce sont des hypothèses qui vous permettent de définir les fluides ; vous verrez bientôt des hypothèses nouvelles apparaître dans la théorie de l'élasticité, dans celle de la lumière, qui s'y rattache étroitement ; la théorie des machines à vapeur et des machines thermiques en général exige l'intervention de la Thermodynamique, assujettie elle-même à des hypothèses ; et plus généralement encore, nous pouvons dire que la Physique mathématique tout entière se résout en fin de compte en problèmes de Mécanique, mais grâce

à l'appoint des hypothèses fournies par la Physique, et obtenues par l'expérience et l'observation.

De là un lien de plus entre la Mécanique et les sciences physiques. Seulement, les méthodes de la Mécanique conservent toujours leur immuable impeccabilité, alors que les hypothèses de la Physique, ou même les lois physiques sont essentiellement revisables. Mais comme une hypothèse reste bonne tant qu'elle suffit à expliquer tous les phénomènes connus, les paramètres que cette hypothèse permettra d'introduire dans le calcul s'y trouveront utilement introduits et permettront d'arriver, dans les applications, à une approximation plus satisfaisante.

Il est prudent, toutefois, même après cette approximation obtenue, de rester un peu en méfiance contre soi-même, de contrôler les résultats par tous les moyens dont on dispose, de ne mépriser ni l'esprit pratique, appuyé sur le bon sens, ni l'observation, ni l'expérience. Quand on réfléchit par exemple, aux erreurs d'interprétation qui ont persisté chez les esprits les plus éminents sur l'application du théorème des aires, jusqu'à une époque toute récente, et cela d'une façon tout à fait générale, on se sent pris d'un salutaire scepticisme, et l'on se garde d'une outrecuidance exagérée.

Puisque je viens de citer cet exemple du théorème des aires, permettez-moi de vous rappeler rapidement à quelle occasion la question a été soulevée et élucidée, il y a fort peu de temps. On soutenait, en vertu du théorème des aires (mal appliqué), qu'un animal tombant librement ne saurait se retourner pendant sa chute. L'expérience du chat retombant sur ses pattes semblait bien montrer le contraire, mais cette expérience ne présentait pas un caractère scientifique : on la renouvela, grâce aux remarquables procédés de photographie instantanée de M. Marey, et on put reconnaître que le retournement s'effectuait parfaitement au cours de la chute. L'Académie des sciences fut à cette occasion, dans le public superficiel, l'objet de plaisanteries aussi faciles qu'innocentes. Et cependant elle a ainsi contribué à faire la lumière sur un point délicat de la science du mouvement, à dissiper une erreur générale, et à ouvrir des voies nouvelles à l'esprit humain.

Peu après les expériences dont je parle, en effet, MM. Fouché,

anciens élèves de l'École polytechnique, montraient, dans une substantielle étude communiquée à l'Académie, qu'il dépendrait de la volonté de l'homme de changer l'axe de la rotation de la terre. C'est un résultat qui n'est assurément pas d'une application pratique, mais dont personne ne saurait méconnaître la haute portée au point de vue de la philosophie naturelle. Sans l'étude expérimentale de la chute du chat, qui pourtant semblait enfantine, on n'aurait sans doute pas songé à aborder un semblable problème, et le théorème des aires aurait continué à recevoir une interprétation aussi fausse qu'incontestée.

Ne vous fiez donc pas sans réserve à l'esprit mathématique qui a dominé votre éducation scientifique préparatoire. La science mathématique est infaillible, mais nous ne le sommes pas; et nous pouvons arriver à des conséquences fausses, en croyant raisonner juste. Mais en même temps, dites-vous bien que cette instruction mathématique est un instrument indispensable.

Ceci me conduit, au point de vue des applications des sciences, et surtout de la science du mouvement, à vous parler d'un paradoxe, que je regarde comme profondément pernicieux. Quelques-uns d'entre vous peut-être ont eu l'occasion de l'entendre énoncer; tous, vous le rencontrerez sur votre chemin un jour ou l'autre. De soi-disant praticiens et, chose plus triste à constater, parfois des ingénieurs ayant la même origine que vous, viendront vous dire : « j'ai oublié toutes les notions mathématiques que « j'ai dû apprendre jadis; ce bagage ne nous est pratiquement « d'aucune utilité; tout au plus peut-être a-t-il contribué pour « sa part à la formation de notre cerveau, et à nous donner l'ha- « bitude du travail et un certain esprit de méthode. Mais d'une « façon directe, cela ne nous sert à rien. Nous avons un sens « pratique personnel, développé par l'expérience, avec les « années; et, quant aux résultats que nous sommes conduits à « calculer ou à déterminer, ils nous sont fournis par des formules « empiriques, par des tables toutes faites, par des procédés « d'un usage courant, et qui ne nous obligent pas à remettre en « équations nos problèmes, ce que nous ne saurions plus faire « au bout de tant d'années. »

A peine un pareil langage serait-il raisonnable si les questions se présentaient toujours, dans la pratique, sous des formes

identiques, ou même simplement comparables: mais qu'il s'agisse de construire un pont métallique, d'établir une voûte, un barrage, un mur de soutènement, de faire le projet d'une bouche à feu ou celui d'une machine à vapeur, chaque fois on verra se révéler dans la question des conditions particulières méritant une étude particulière aussi. Les formules toutes faites et les tables sont de précieux auxiliaires ; elles vous prouvent que des gens ont eu la patience de se livrer préalablement à un travail qui allégera matériellement votre peine et vous fera gagner du temps. Mais celui qui ne s'en rapporterait qu'aux résultats empiriques et à son sens pratique personnel ne serait qu'un manœuvre, fort habile peut-être, mais non par un ingénieur. A peine admettrait-on qu'un charpentier ou un appareilleur, sachant merveilleusement tracer l'épure d'un escalier ou d'une voûte compliquée, vint déclarer que la Géométrie descriptive est d'une utilité nulle ; cela lui serait permis peut-être s'il ne l'avait jamais sue. Mais quand il s'agit des mouvements, des effets que produisent les forces, des problèmes qui s'imposent à l'ingénieur d'une façon chaque jour plus impérieuse, je ne crois pas exagérer en déclarant que cet appel absolu au sens pratique et cet ostracisme prononcé contre la science sont de véritables blasphèmes.

Quant aux conséquences effectives d'une pareille façon de procéder, c'est précisément le bon sens qui nous montre ce qu'elles peuvent être. Si, faute d'une analyse suffisante, vous vous êtes trompé, l'expérience viendra rectifier votre erreur par l'écroulement de la construction, l'explosion du canon ou l'impossibilité de mettre en marche la machine. C'est peut-être un peu tard. Et mieux vaudrait, en se gardant bien entendu, d'écarter les leçons de l'expérience antérieure, avoir pris le soin d'approfondir préalablement le problème, en usant de toutes les ressources mises à notre disposition.

Parmi ces ressources, celles qui résident dans la connaissance de la Mécanique rationnelle sont particulièrement précieuses et utiles. Gardez donc avec soin vos notes d'élèves et les feuilles de vos cours de Mécanique. Certes, vous ne conserverez pas constamment dans la mémoire le détail de toutes les démonstrations et les finesses de calcul ; mais les théories essentielles,

mais les grandes idées directrices vous resteront. Et plus d'une fois, à l'occasion de questions pratiques se présentant à vous au cours de votre carrière, vous verrez grand profit à consulter ces anciens documents, à vous remettre en mémoire ce que vous savez aujourd'hui, à faire quelques équations, à reprendre certains problèmes de Mécanique rationnelle.

Et, d'un autre côté, la Physique, avec ses perfectionnements, arrivant de plus à plus à pénétrer dans le domaine de la Mécanique, ainsi que je vous l'ai fait comprendre tout à l'heure, et l'immense majorité des questions pratiques que vous aurez à résoudre relevant de la Mécanique directement, ou bien de la Physique, je crois pouvoir avancer la proposition suivante, qui résume la pensée maîtresse de cette conférence :

Pour l'ingénieur, la Mécanique appliquée, c'est le but ; la Mécanique rationnelle, c'est le moyen.

C.-A. Laisant.

SUR L'ÉGALITÉ, ET SUR L'INTRODUCTION

DES ÉLÉMENTS DÉRIVÉS DANS LA SCIENCE

1. Lorsqu'on dit dans le langage ordinaire : *l'objet x est égal à l'objet y*, on entend dire que *toute propriété de x est aussi une propriété de y ;* mais le mot tout n'a pas, en général, la signification absolue de *totalité*, car, bien souvent, on considère un groupe spécial de propriétés, et il reste sous-entendu que le mot tout se réfère seulement à ce groupe.

Cela se présente, non seulement dans le langage ordinaire mais aussi dans le langage scientifique. Dans plusieurs traités de Géométrie, même parmi les plus récents, on dit, suivant Euclide : *la figure* x *est égale à la figure* y, pour exprimer que x *est superposable à* y, faisant de telle sorte abstraction de toute propriété de position des figures géométriques. Euclide exprime par la phrase : *la figure* x *est égale à la figure* y, ce qui aujourd'hui reste exprimé par la phrase : x *est équivalent à* y. Les deux membres

d'une formule de chimie représentent deux corps qui ont des propriétés bien différentes, en général, et l'égalité se réfère seulement aux poids atomiques.

Si nous écrivons $x \alpha y$ pour exprimer que l'objet x est dans la relation α avec y, alors les relations exprimées par les phrases ordinaires *est superposable*, *est équivalent*, appartiennent à la catégorie des relations α qui jouissent des propriétés :

(1) $\left\{\begin{array}{l} \textit{réflexive}, \text{ c'est-à-dire } x \alpha x, \\ \textit{symétrique}, \text{ c'est-à-dire si } x \alpha y, \text{ alors } y \alpha x, \\ \textit{transitive}, \text{ c'est-à-dire si } x \alpha y \text{ et si } y \alpha z, \text{ alors } x \alpha z. \end{array}\right.$

et à la même catégorie appartiennent les relations, *est semblable*, *est parallèle* [1]. Alors si on trouve correct d'écrire $x = y$, ou bien de dire *x est égal à y*, au lieu de *x est superposable à y*, on doit estimer pouvoir écrire aussi $x = y$ au lieu de *x est équivalent, semblable, parallèle à y*, car, si dans le premier cas l'égalité se réfère seulement aux propriétés métriques des figures, dans les autres cas elle se réfère seulement, et respectivement, aux propriétés d'*extension*, de *forme*, de *direction* ou d'*orientation*.

Il restera donc à démontrer que le signe = est employé habituellement pour exprimer la superposabilité et non les autres relations, car la superposabilité a des propriétés qui ne sont pas communes aux autres relations que nous venons de considérer. Nous ne connaissons pas ces propriétés, mais, en revanche, nous pouvons faire observer qu'en mathématique le signe = est employé pour exprimer une relation qui a toutes les propriétés de la superposabilité (les propriétés (1)) et une autre encore que la superposabilité ne possède pas. Il en est ainsi, par exemple, en Analyse [2] où pour les nombres x et y la relation $x = y$ est réflexive, symétrique, transitive et, de plus, est telle que toute propriété analytique de x [3] est aussi une propriété analytique de y. Or en Géométrie si la figure x est superposable à la

(1) Dans les plus récents traités on admet, par définition, qu'une droite est parallèle à elle-même.

(2) Sans parler de la Physique, où on a la même propriété pour la *température*, la *masse*, ...

(3) x est un nombre *positif, negatif, complexe d'ordre n*; x est une fonction *continue, integrabe, limitee*.

figure y, toutes les propriétés géométriques de x ne sont pas, en général, propriétés de y (les propriétés de position).

Nous pouvons observer, sous une forme plus générale, qu'en plusieurs cas, lorsque nous disons que $x = y$, *nous admettons aussi que, u étant une classe contenant* x, *u contient aussi* y : or, ce fait n'a pas lieu pour toutes les relations qui satisfont aux conditions (1); car, par exemple, si x est équivalent à y, x étant un triangle, cela n'entraîne point nécessairement que y soit un triangle. Sous cette dernière forme le signe $=$ a la signification qu'on donne d'habitude à la phrase *est identique;* et il est bon d'observer que pour toute relation (1) on obtient l'identité pour des éléments qui sont fonctions des éléments considérés ; par exemple, la figure x est *équivalente* à y exprime que l'*extension* (*longueur, aire, volume*) de x est *identique* à l'extension de y; x est *semblable* à y exprime que la *forme* de x est *identique* à la forme de y; la droite x est *parallèle* à la droite y exprime que la *direction* de x est *identique* à la direction de y.

2. De ce que nous venons de dire il résulte qu'il convient de donner au signe $=$ et à la dénomination *est égal à* une signification scientifique fixe et absolue, et d'exprimer toute autre relation (1) par des signes de forme différente du symbole $=$.

Dans le *Formulaire de Mathématiques* (t. II, § 1, prop. 80) l'égalité (ou identité) est définie de la manière suivante :

Définition. — *Pour que l'objet* x *soit égal à l'objet* y, *il faut et il suffit que toute classe qui contient l'objet* x *contienne aussi l'objet* y.

Dans ce qui va suivre nous admettons établie, une fois pour toutes, cette définition, dont la signification exacte dépend des propriétés qui dans le *Formulaire de Mathématiques* (t. II, § 1) sont attribuées au mot *classe* et aux éléments fondamentaux de la logique générale. Nous ne rappelerons pas ces propriétés : le lecteur les trouvera au *Formulaire* cité [1].

Les traités ordinaires de mathématiques élémentaires donnent la définition de l'égalité en disant que $x = y$ *lorsque* x *peut être substitué à* y *en tous les cas*. Cette définition est une transfor-

[1] Pour les différentes significations que les logiciens donnent au mot *classe*, voir *Revue de Mathematiques*, dernier fascicule de 1898.

mation de celle de LEIBNIZ, *Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate*, laquelle, comme d'ordinaire, n'explique pas la signification exacte du mot *substitui*. La définition du *Formulaire*, que nous venons de rappeler, peut être, si l'on veut, considérée comme la traduction en termes dont les lois logiques sont fixées, de la définition de Leibniz. Elle se réduit à la forme suivante : $x = y$ *lorsque toute propriété de* x *est une propriété de* y, si à la relation x *est un élément de la classe* u on donne la signification : x *jouit d'une propriété exprimée par la classe* u [1].

De la définition générale de l'égalité résultent les propriétés suivantes [2] :

$x = x$ (propriété *réflexive* de l'égalité).

Si $x = y$ *alors* $y = x$ (propriété *symétrique* de l'égalité).

Si $x = y$ *et si* $y = z$ *alors* $x = z$ (propriété *transitive* de l'égalité).

Si u, v *sont des classes et* $u = v$ *alors tout* u *est* v *et tout* v *est* u [3].

En toute correspondance univoque entre les éléments de la classe u *et les éléments de la classe* v *à des objets égaux de* u *correspondent des objets égaux de* v.

La condition nécessaire et suffisante d'égalité entre le couple (x, y) *et le couple* (a, b) *est* $x = a$ *et* $y = b$.

Nous donnons la démonstration complète des propriétés suivantes (non encore énoncées par d'autres).

3. Nous avons fait observer, dans le n° 1, que si x, y sont des nombres et si $x = y$, alors toute propriété analytique de x est aussi une propriété analytique de y. Mais la définition générale

---

(1) Par exemple la phrase : le nombre x a la propriété d'être plus petit que 1, signifie « x est un des éléments de la classe des nombres plus petits que 1 » ; la phrase « la figure géométrique x a la propriété d'être un triangle », signifie « x est un triangle » et le mot triangle est un nom commun, est une classe de figures géométriques.

(2) *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 1, propositions 81, 82, 83, 84, 85, 503, 86.

(3) L'inverse de cette propriété est vrai ou faux selon qu'une classe est considérée comme dépendant seulement de ses éléments, ou est considérée comme dépendant aussi de la *position*, de l'*ordre*.... de ses éléments. Pour donner au mot classe la première signification, il faut poser comme *proposition primitive : Si tout* u *est* v *et si tout* v *est* u, *alors* $u = v$. Dans le *Formulaire* on donne pour définition la signification de $u = v$. (T. II, § 1, prop. 16 et p. 39.)

d'égalité, que nous venons d'établir, ne se limite pas aux propriétés analytiques et comprend un champ plus grand de propriétés. De même, x, y étant deux points, pour établir que $x = y$, est-il suffisant de prouver que toute figure (classe de points) qui contient x contient aussi y, ou bien devons-nous recourir à *toute* classe u pour lesquels nous ne connaissons pas la signification de la phrase *le point* x *est un élément de* u ? Le théorème suivant va résoudre la question.

Théorème I. — *Si* u *est une classe et si* x, y *sont éléments de* u, *alors la condition nécessaire et suffisante d'égalité pour* x *et* y (x = y) *est que : toute classe formée avec les* u *et contenant* x *contienne aussi* y.

La condition est *nécessaire*; cela résulte immédiatement de la définition d'égalité. Si la condition est vérifiée et si a est une classe contenant x, alors la classe commune à u et a est une classe formée par les u et par suite elle contient y ; mais si la classe commune à u et a contient y, a contient aussi y. Par conséquent si la condition est vérifiée, toute classe qui contient x contient aussi y et, par la définition d'égalité, $x = y$, c'est-à-dire que la condition est *suffisante*.

Donc pour vérifier la condition $x = y$, quand, par exemple, x, y sont des points, il faut et il suffit de vérifier que toute figure (classe de points) qui contient x contient aussi y ; et par les propriétés géométriques ordinaires on aura aussi $x = y$ lorsque toute droite ou tout plan qui passe par x passe aussi par y. En conséquence la relation $x = y$ signifie : *x coïncide avec y* comme on dit dans le langage géométrique ordinaire.

4. De la définition générale d'égalité résulte la condition d'égalité pour deux correspondances, dont nous donnerons d'importantes applications au n° 6. — Mais avant d'aborder cette question il est nécessaire d'établir exactement certaines propriétés de correspondances univoques.

Si x étant un élément quelconque d'une classe u, nous indiquons par la notation fx, — où f est un signe fixe (comme *sin*, *log*...), — un élément bien déterminé d'une classe v, alors f indique une *loi* en vertu de laquelle, étant donné un élément quelconque de u, il en résulte pour v un élément et un seul. Cette

loi, c'est-à-dire son signe f, est dite *correspondance univoque entre les u et les v :* on dit encore que *les éléments fx sont des v fonctions des u.* On pose quelquefois le signe f à la droite de la lettre variable comme, par exemple, pour le signe !, et pour les signes composés $+a$, $\times a$, où a est un nombre, qui, placés à la droite d'un nombre quelconque b, produisent les nombres, bien déterminés $b+a$, $b\times a$.

Si f est une correspondance univoque entre les u et les v, et si w est une classe formée avec les u, alors f est aussi une correspondance entre les w et les v, car x étant un élément quelconque de w, x est un élément de u et par conséquent fx est un élément bien déterminé de v [1].

Cela posé, nous avons le

THÉORÈME II. — *Si* f, h *sont des correspondances, alors pour que* f = h, *il faut et il suffit que : quel que soit l'élément* x, *tel que la notation* fx *ait reçu une signification, on* ait fx = hx.

La condition est *nécessaire*; cela résulte immédiatement de la définition d'égalité. — Si la condition est vérifiée et si u est une classe de correspondances et f un élément de u, alors f est une correspondance entre les éléments d'une classe u et les éléments d'une classe v; mais ayant $fx = hx$, h est aussi une correspondance entre les u et les v, c'est-à-dire que h est un élément de u. Donc toute classe u de correspondances qui contient f contient aussi h, et d'après le théorème I la condition est *suffisante*.

5. La fonction *sin* qui est une correspondance, par exemple, entre les nombres de $-\pi$ à π et les nombres de -1 à 1, est aussi une correspondance entre les nombres de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et les nombres de -1 à 1 ; mais dans le premier intervalle la fonction *sin* n'est pas toujours croissante ou décroissante et dans le deuxième intervalle elle est toujours croissante. Une fonction analytique quelconque peut ne point être ou continue, ou limitée, ou intégrable dans un intervalle donné, et être continue, limitée, intégrable dans un intervalle contenu dans le précédent.

En général, f étant une correspondance entre les u et les v, le signe f n'indique pas, à lui seul, toutes les propriétés de la cor-

[1] *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 1, prop. 300, 301, 303.

respondance, car celles qui dépendent de la partie de la classe u à laquelle nous entendons appliquer la loi f restent exceptées. Le signe composé f_u nous indiquera dans ce qui va suivre, *la loi* f *appliquée à tous les éléments de* u. Si w est une classe formée avec les u, la notation f_w vient de recevoir signification, car f est une correspondance entre les w et les v, et par conséquent f_w indique la loi f appliquée à tous les éléments de w.

Les fonctions f_u, f_w peuvent avoir des propriétés bien différentes entre elles ; mais si x est un élément quelconque de w, le correspondant de x en vertu de la loi f_u ou de la loi f_w est toujours fx, et si nous indiquons par $f_w x$, $f_u x$, le correspondant de x en vertu des lois f_u et f_w, nous entendons avoir pour ces lois

$$f_u x = f_w x = fx$$

quel que soit l'élément x de w.

Cela posé, nous pouvons démontrer le

Théorème III. — *Si* f, h *sont des correspondances entre les* u *et les* v, *alors la condition nécessaire et suffisante pour avoir* $f_u = h_u$ *est que : quel que soit l'élément* x *de* u, *on ait* fx = hx (*ou si l'on veut* $f_u x = h_u x$).

Quel que soit l'élément x de u, h_u est une des correspondances $\underset{\cdot}{\varphi}_u$ entre les u et les v telles que $\underset{\cdot}{\varphi} x = hx$; alors si $f_u = h_u$, d'après la définition d'égalité nous savons que f_u est aussi l'une des correspondances $\underset{\cdot}{\varphi}_u$ entre les u et les v telles que $\underset{\cdot}{\varphi} x = hx$, c'est-à-dire $fx = hx$. La condition est donc *nécessaire*. Si la condition est vérifiée et si f_u appartient à une classe quelconque de correspondances entre les u et les v (1), alors h_u appartient à la même classe, car, quel que soit l'x de u, $fx = hx$. Donc par le théorème I la condition est *suffisante*.

L'égalité de deux correspondances f, h peut subsister pour un intervalle et non pour un autre. Par exemple : x étant un nombre réel, écrivons, suivant Legendre, Ex au lieu de *partie entière de* x; x étant un objet quelconque posons $\omega x = x$, c'est-à-dire

(1) Dire que $\underset{\cdot}{\psi}$ est une classe de correspondances entre les u et les v signifie que les correspondances de cette classe appliquées à un élément quelconque x de la classe u produisent une classe déterminée de v ; cela revient à dire que $\underset{\cdot}{\psi}$ est une correspondance entre les u et cette classe de v.

indiquons par ω la correspondance qu'on peut appeler *identité* ; écrivons n au lieu de *nombre entier* et q au lieu de *nombre réel* ; on a d'après le théorème III

$$E_n = \omega_n , \qquad F_q \neq \omega_q$$

et d'après le théorème II $E \neq \omega$, car si x est un nombre entier $Ex = \omega x$, mais, par exemple, $E\sqrt{2} \neq \omega\sqrt{2}$. Cela justifie l'emploi de la notation f_u à laquelle il serait nécessaire de recourir, dans la pratique, toutes les fois que nous avons besoin de considérer des propriétés de la loi f qui dépendent de la classe u [1].

Il faut bien remarquer que le signe composé f_u n'est pas le couple formé par les deux éléments f et u. En effet, par ce que nous venons de dire au n° 2 si f_u est le couple (f, u) l'égalité $f_u = h_u$ entraîne l'égalité $f = h$: or pour les deux signes E, ω nous avons $E_u = \omega_u$ et $E \neq \omega$.

6. Maintenant, nous allons appliquer le théorème III à l'introduction dans l'analyse des nombres rationnels et irrationnels.

Supposons connue la théorie des nombres entiers et des grandeurs [2].

---

[1] Par exemple lorsque de la relation $\sin x = y$ nous déduisons la relation $x = arc\sin y$ ou $x = \sin^{-1} y$, ou $x = \overline{\sin}\, y$, nous sous-entendons faire varier x de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, car dans le cas contraire $arc\sin y$ n'est pas un nombre, mais une classe de nombres qui dépend toujours de l'intervalle de variation de x.

[2] Pour les nombres entiers voir le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 2, et pour les grandeurs le même *Formulaire*, t. I, partie IV. Je crois utile de rappeler ici les propositions fondamentales de la théorie des grandeurs.

Nous disons que u est une *classe homogène de grandeurs*, lorsque u étant une classe et a, b étant deux éléments quelconques de u, on peut définir une opération dont le résultat indiqué par $a + b$, est tel que $a + b$ est un élément bien déterminé de u. Les grandeurs géométriques *longueurs*, *aires*, *volumes*, sont des classes homogènes des grandeurs. Les longueurs des côtés d'un polygone forment un classe de grandeurs, mais pas une classe homogène, car la somme de deux côtés peut ne point être un côté du même polygone.

Soient a, b, c..... des éléments d'une classe homogène de grandeurs. Nous disons que $a > b$ quand a est la somme de b avec une grandeur, et nous disons que $a < b$ lorsque $b > a$. Indiquons par la notation $0a$ la classe formée avec les grandeurs plus petites que a ; m étant un nombre entier non nul, posons $1a = a$ et $(m+1)a = ma + a$, c'est-à-dire indiquons par $(m+1)a$ la somme de $m+1$ grandeurs égales à a.

Les propriétés fondamentales de la classe u *suffisantes* pour déduire les propriétés ordinaires, par exemple, des grandeurs géométriques, sont les suivantes :

I. $a + b = b + a$ (propriété *commutative* de la somme, employée par EUCLIDE, par exemple dans la démonstration de la prop. XIII du Livre I).

II. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (propriété *associative* de la somme).

Nombres rationnels. — Soient m, n, p, q des nombres entiers (1) non nuls et soit a un élément quelconque d'une classe homogène g de grandeurs. En suivant l'usage commun, nous indiquons par la notation $\frac{m}{n}a$ la grandeur de g, bien déterminée, qu'on obtient en multipliant par m la grandeur x telle que $nx = a$. D'après le troisième théorème, la correspondance $\left(\frac{m}{n}\right)_g$ est univoquement déterminée, c'est-à-dire que $\left(\frac{m}{n}\right)_g$ *est égal à l'unique correspondance* f *parmi les* g *et les* g *telles que, quel que soit l'élément* a de g, $n(fa) = ma$.

Du même théorème on déduit que la condition $\left(\frac{m}{n}\right)_g = \left(\frac{p}{q}\right)_g$ équivaut à la condition $\frac{m}{n}a = \frac{p}{q}a$, quel que soit l'élément a de g; mais il est bien aisé de reconnaître par la théorie des grandeurs que cette dernière condition équivaut à $mq = np$.

III. a n'est pas la somme de a avec un élément de u (Euclide. Axiome IX, livre I) (reste par conséquent exclue la grandeur nulle).

IV. On a $a = b$ ou $a > b$ ou $a < b$. (Euclide dans la démonstration, par exemple, de la prop. VI, livre I.)

V. Quel que soit l'élément a de u, la classe $0a$ n'est pas nulle (c'est-à-dire qu'il existe des grandeurs plus petites que a).

VI. Si c est une classe formée avec les u, qui contient des éléments, et s'il existe des u qui n'appartiennent point à $0c$, alors il existe un élément x de u, tel que $0x = 0c$. (Dedekind, *Postulat de la continuité.*)

De ces propositions on déduit :

VI_1. Il existe un multiple de a plus grand que b (postulat d'Archimède).

VI_2. n étant un nombre entier non nul il existe un élément x de u tel que $nx = a$ (élément qu'on indique habituellement par la notation $\frac{1}{n}a$).

Par l'*indépendance* des propositions I-VI nous avons les suivants :

Si a, b sont des points et si $a + b$ est le milieu du segment $a\ b$, alors la prop. I est vérifiée et la prop. II n'est point vérifiée.

Si u est la classe des nombres le zéro compris, alors la prop. III n'est pas vérifiée, et les prop. I, II sont vérifiées.

Si u est la classe des nombres plus grands que 10, alors la prop. IV n'est pas vraie et les prop. I, II, III sont vérifiées.

Si u est la classe des nombres entiers (positifs), le zéro exclu, la prop. V n'est pas vérifiée et les prop. I, II, III, IV sont vérifiées.

Si u est la classe des nombres rationnels, les propositions I, II, III, IV, V sont vérifiées, mais la prop. VI n'est pas vérifiée.

On en déduit qu'une quelconque des propositions II-VI n'est point la conséquence des propositions qui la précèdent. Il serait fort important de démontrer que chacune des propositions I-VI n'est pas une conséquence de toutes les autres, c'est-à-dire que les propositions I-VI sont *nécessaires*.

(1) Des nombres sans *signe*, comme sont considérés ceux de l'Arithmétique et pas des nombres avec le signe + ou — (positifs ou négatifs) comme sont considérés ceux de l'Algèbre. (Pour ces derniers nombres, voir la remarque de ce numéro.)

Nous pouvons dire que $\left(\frac{m}{n}\right)_q$ est un *nombre rationnel ;* c'est précisément l'élément qui, dans l'usage commun, est indiqué, tout simplement, par la notation $\frac{m}{n}$ [1]. Si nous écrivons $\frac{m}{n}$ au lieu de $\left(\frac{m}{n}\right)_q$ la condition $\left(\frac{m}{n}\right)_q = \left(\frac{p}{q}\right)_q$ reste exprimée par $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ et alors, en vertu des théorèmes deuxième et troisième, nous convenons implicitement de faire toujours usage du signe composé $\frac{m}{n}$ de manière que, quelle que soit la classe u aux éléments de laquelle nous l'appliquons, la condition $\left(\frac{m}{n}\right)_u = \left(\frac{p}{q}\right)_u$ soit équivalente à la condition $mq = np$: cela est fort utile à faire pour la *conservation des propriétés formales*. D'une autre manière nous pouvons convenir d'écrire $\frac{m}{n}$ au lieu de $\left(\frac{m}{n}\right)_q$ en *sous-entendant simplement l'indice* g : nous faisons réellement cela dans le langage commun où, par exemple, le mot exprimé par la notation $\frac{2}{3}$ ne paraît jamais isolé, mais *précède toujours* une grandeur qui est explicitement énoncée ou sous-entendue [2].

Nombres irrationnels. — Soient u, v deux classes de rationnels qui contiennent effectivement des éléments, ces éléments étant plus petits qu'un rationnel donné. Par la notation uu nous indiquons la classe dont les éléments sont les produits de la grandeur u pour les éléments de u. Pour le postulat de la continuité il existe une grandeur x telle que la classe des grandeurs plus petites que x soit égale à la classe des grandeurs qui sont plus petites que quelques-uns des éléments de uu : nous pouvons exprimer ceci en écrivant $\mathfrak{h}x = \mathfrak{h}(uu)$ où $\mathfrak{h}$ signifie *plus petit que*. La grandeur x que nous venons de considérer est univoquement déterminée : nous l'appelons *limite supérieure des* uu et nous l'indiquons par la notation $l'(uu)$.

---

[1] L'idée d'introduire les rationnels comme des opérations (comme on fait dans le langage commun) est expliquée exactement pour la première fois dans le *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 2, où la condition d'égalité est donnée par définition.

[2] D'après le Théorème III on a $\left(\frac{m}{1}\right)_g = (m)_g$ et par conséquence les nombres entiers qui en résultent sont compris dans les nombres rationnels.

Si nous posons, par définition

$$(l'u)a = l'ua$$

il s'ensuit que le signe composé $l'u$, qu'on peut lire *limite supérieure des* u, est une correspondance entre les g et les g, et il résulte du troisième théorème que : $(l'u)_g$ *est égal à l'unique correspondance* $\mathfrak{f}_g$ *parmi les* g *et les* g, *telle que, quel que soit l'élément a de* g, $fa = l'(ua)$. Pour certaines classes u (comme par exemple pour la classe dont les éléments sont $\frac{2}{10}, \frac{22}{100}, \frac{222}{1000}, \ldots$) la correspondance $(l'u)_g$ est une rationnelle, et pour d'autres classes elle est un élément nouveau que, en suivant l'usage commun, nous pouvons appeler *nombre irrationnel* (par exemple u étant les nombres rationnels dont le carré est plus petit que 2).

Par le troisième théorème on déduit que la condition $(l'u)_g = (l'v)_g$ équivaut, quelle que ce soit la grandeur a, à la condition $l'(ua) = l'(va)$, condition qui équivaut à $\mathfrak{g}u = \mathfrak{g}v$. Donc, en répétant les précédentes considérations pour écrire $l'u$ au lieu de $(l'u)_g$ nous voyons que :

La condition $\mathrm{l}'\mathrm{u} = \mathrm{l}'\mathrm{v}$ *équivaut à la condition* $\mathfrak{g}\mathrm{u} = \mathfrak{g}\mathrm{v}$. Et si m est un rationnel :

La condition $\mathrm{m} = l'\mathrm{u}$ *équivaut à la condition* $\mathfrak{g}\mathrm{m} = \mathfrak{g}\mathrm{u}$ [1].

Remarque. — Les nombres rationnels et irrationnels étant définis comme nous venons de le faire, les propriétés

$$\frac{m}{n}\,a \pm \frac{p}{n}\,a = \frac{m \pm p}{n}\,a, \qquad \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}\,a\right) = \frac{mp}{nq}\,a$$

$$l'(ua) + l'(va) = l'((u+v)a) \qquad l'(u(va)) = l'((u \times v)a)$$

donnent aisément les définitions de sommes et de produits de deux nombres réels, entiers, rationnels, irrationnels quelconques.

Les nombres *positifs* et *négatifs* de l'Algèbre peuvent être introduits bien aisément.

Si a est un nombre, $+\,a$ est un signe qui placé après un nombre produit un nombre, et $-\,a$ est un signe qui placé après

(1) Voir Genocchi-Peano, *Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung* (Leipzig, 1898), où les conditions que nous venons de démontrer sont données par définition.

un nombre égal ou plus grand que a, produit un nombre. En répétant les considérations précédentes, $+a$ et $-a$ sont des correspondances par lesquelles on démontre que :

La condition $+a = +b$ équivaut à la condition $a = b$.

La condition $-a = -b$ équivaut à la condition $a = b$.

7. — Dans les numéros précédents, nous avons défini le nombre rationnel ou irrationnel, ou positif ou négatif x en posant x égal (identique) à un groupement connu a de signes connus ; c'est-à-dire que nous avons *défini nominalement* l'élément x. Par exemple on définit nominalement pour tout le monde le *triangle*, la *sphère*, les *nombres premiers*..... Mais la possibilité de définir nominalement l'élément x dépend de celle d'avoir à notre disposition des éléments déjà connus avec lesquels on puisse former le groupement a que nous posons identique au nouvel élément x ; par exemple sans les éléments *correspondance* et *grandeurs* nous ne savons pas, à présent, définir nominalement les nombres irrationnels.

Si pour l'élément x, il n'est pas possible de donner une définition nominale, alors, selon la signification usuelle du mot définir, l'élément x sera défini (sera introduit dans la science) lorsque *nous donnerons une ou plusieurs relations, entre* x *et des éléments déjà connus, tels que par elles on puisse savoir si l'objet donné y est ou non égal (identique) à* x. Cette méthode est applicable en vertu de la définition générale d'égalité, et des propriétés déduites par elle, aux éléments *nombres cardinaux* et *ordinaux* de M. G. Cantor, *directions*, *orientations*, *longueurs*, *aires*, *volumes*, *masse*, *température*...

Voici comme on peut procéder.

Lorsque nous disons, par exemple, que x est une longueur, nous entendons dire que x est un *élément simple* [1]) qui est fonction (par exemple) d'un segment, et cette fonction est commune à tous les segments superposables entre eux. Si a est un segment, la fonction considérée de a est indiquée par la phrase *longueur de* a. Donc, tandis que le mot *longueur* est un NOM COMMUN, une CLASSE, le mot *longueur de* est une CORRESPONDANCE entre les

[1]) C'est-à-dire est un élément tel que la phrase *y est un x* n'a pas de signification, comme si x est un nombre, un signe de fonction.

segments et la classe *longueur*. De même, *nombre cardinal* indique une classe, *nombre cardinal des* indique une correspondance entre les *classes* et des éléments simples qui sont les éléments de la classe *nombre cardinal*.

En général, a étant une classe connue, nous considérons une classe u dont les éléments sont fonctions des éléments de a et nous obtenons le signe de cette fonction en faisant suivre du mot *de* ou *des* le nom de la classe a. Si nous indiquons par a' ce signe de fonction, la classe u reste définie nominalement en disant : *dire que* x *appartient à la classe* u *équivaut à dire qu'il existe un élément* y *de* a *tel que* x *est identique à* $u'y$ [1]. Il en résulte que si la fonction a' est définie, alors la classe u est introduite dans la science, car nous pouvons affirmer ou nier la relation $z = a'y$.

Considérons, par exemple, les *nombres cardinaux* de M. G. Cantor [2] pour lesquels il est bien connu que :

(*a*) *Si* u, v *sont des classes, pour que le nombre cardinal des* u *soit égal au nombre cardinal des* v, *il faut et il suffit que la classe* u *soit semblable à la classe* v (*c'est-à-dire que* u *peut être mis en correspondance univoque et réciproque avec* v).

Cela posé, nous pouvons introduire dans la science la correspondance *nombre cardinal des* en posant la définition suivante.

Définition. — Nombre cardinal des *est une des correspondances* f *entre des classes et des éléments simples, telles que, quelle que soit la classe* u, *les classes* v *pour lesquelles* fv = fu, *sont toutes les classes semblables à* u *et les seules.*

Le théorème (*a*) résulte immédiatement de cette définition, et par conséquent nous pouvons toujours établir si l'élément y est égal ou non au nombre cardinal des a.

D'une façon analogue on introduit les éléments *direction*, *longueur*..., que nous venons de citer [3].

---

[1] Voir à ce propos l'Introduction au *Formulaire de Mathématiques* et les tomes I et II du *Formulaire de Mathématiques*.

[2] *Beitrage zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Ann. B 47, Rivista di matematica a 1895.

[3] Pour les nombres cardinaux et ordinaux voir C. Burali-Forti, *Le Classi finite*, *Sopra un teorema del Sig. G. Cantor* (Atti Acc. Torino, 1896), *Una questione sui numeri transfiniti* (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo, 1897). Dans ces mémoires les éléments abstraits sont introduits en définissant pour eux l'égalité, en

REMARQUE. — M. Cantor définit le *nombre cardinal des* u en disant : *Nous appelons puissance, ou nombre cardinal, des* u *l'idée générale que, au moyen de notre active faculté de penser, on déduit de la classe* u *en faisant abstraction de la nature et de l'ordre des éléments de* u. Le *faire abstraction* paraît ici comme une opération logique ; mais quelles sont les lois auxquelles elle satisfait? Dans le cas particulier que nous considérons, les lois dont nous venons de parler sont fixées par notre définition.

En général la forme de définition que nous proposons, fixe, au moyen du mot égal, la signification de la phrase *élément abstrait fonction (abstraite) d'un élément connu*, qui par plusieurs auteurs et en plusieurs circonstances est employée sans la définir (1).

Dans notre définition de nombre cardinal, nous avons dit que *nombre cardinal des* est UNE DES CORRESPONDANCES *f*..... : pouvons-nous dire que *nombre cardinal des* est LA CORRESPONDANCE *f*.....? c'est-à-dire pouvons-nous admettre que la classe des correspondances *f* considérées contienne un seul élément? Non, car sans faire varier les conditions pour *f* nous pouvons faire varier l'élément simple qui correspond à *u*. Par exemple en vertu des conventions ordinaires pour les nombres positifs et négatifs nous savons que + et — sont des correspondances *f* entre les nombres réels et des éléments simples, tels que, quel que soit le nombre *x*, les nombres réels *y* pour lesquels $fy = fx$ sont tous et seulement les nombres réels égaux à *x* ; or si *a* est un nombre réel non nul $+a$ n'est pas égal à $-a$.

Les deux formes de définition que nous venons d'exposer aux

---

suivant la méthode employée par EUCLIDE pour introduire les *rapports* (liv. V, Def. V) et qu'on trouve analysée logiquement dans l'*Introduction au Formulaire de Mathématiques*. Je préfère la méthode que je viens de suivre dans cet ouvrage parce qu'il n'est plus nécessaire de définir l'égalité de deux des éléments abstraits considérés. Je supprime aussi le mot *abstrait*, car je ne connais pas encore une distinction logique bien établie entre *element abstrait* et *element concret*.

(1) Dans le *Formulaire de Mathématiques* les éléments abstraits *x*, *y*,.... d'une classe sont introduits en définissant nominalement l'égalité $x = y$ (par ex. t. II, § 2, propositions 0.3.0.1, 0.6.1.1, 2.1.0.1,.....). — De plus, en général, dans le *Formulaire* l'égalité est définie pour tous les éléments primitifs ou dérivés. Il faut bien observer que cela n'est point en contradiction avec la définition générale d'égalité donnée aux prop. 80 du t. II, § 1, car le *Formulaire* est en même temps un recueil de formules et de toutes les théories ; or il est aussi logique de définir en tous les cas l'égalité que de la définir une fois pour toutes, et de déduire les conditions d'égalité dans les divers cas particuliers.

n^os 6 et 7 sont suffisantes pour introduire dans la science tous les éléments x qui peuvent être mis en relation avec des éléments déjà connus a, b,... c'est-à-dire les éléments dérivés. Mais on arrivera toujours à des éléments que nous ne savons point mettre en relation avec des éléments déjà connus et pour ces éléments (éléments primitifs) la méthode qui les introduit dans la science est celle des *postulats*, méthode qui est bien connue [1] et au sujet de laquelle nous n'avons pas d'observations à faire. La méthode des postulats reflète l'origine tout à fait expérimentale de la Mathématique [2] qui, jusque dans ses principes a emprunté à l'expérience un minimum de propriétés (postulats) desquelles toutes les autres peuvent être déduites logiquement [3]. A présent la Mathématique tend toujours plus à se délivrer des liens avec le monde extérieur, et à former de chacune de ses parties un système logique déductif complet, dont les postulats expriment des propriétés susceptibles de plusieurs interprétations, vérifiées ou non par l'expérience. De cette tendance résulte un réel progrès logique d'organisation et d'exposition, à condition que la didactique n'oublie pas de rappeler que les théories les plus importantes de la Mathématique sont dues à la résolution des

---

[1] DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen?* 1888.

PASCH, *Vorlesungen über neure Geometrie.*

G. PEANO, *Arithmetices principia nova methodo exposita*, Torino, Bocca, 1889. — *Principi di geometria logicamente esposti*, 1889. *Formulaire de Mathematiques*, t. II, §§ 1, 2.

MARIO PIERI, *I principi della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo*, Mem. Acc. Torino, 1898.

C. BURALI FORTI, *Teoria delle grandezze*, Formulaire de Mathématiques, t. I, part. IV. *Les postulats pour la Geometrie d'Euclide et de Lobatschewsky*, Mathematiker-Kongress, Zurich, 1898.

[2] Comme fort justement l'observe M. Laisant (*La Mathematique*, Paris, G. Carré et C. Naud, 1898).

[3] L'idée de *temps* introduite aussi par NEWTON comme primitive peut être définie nominalement. Le *mouvement géométrique* peut être défini comme une correspondance spéciale entre points et points (voir la note précédente) ; une classe m de mouvements géométriques appliqués à un point a produit une classe de points ma : par les postulats géométriques on déduira si les éléments ma sont, suivant Grassmann, les positions d'un point P fonction continue d'une ou de deux ou de trois variables numériques ; une classe m de mouvements géométriques satisfaisant à la première condition est le *mouvement de la Mecanique* : un cas particulier de ce mouvement peut être pris comme *mouvement unitaire*, c'est-à-dire comme *temps*, qui reste ainsi introduit géométriquement sans avoir recours à des points fixes d'une manière absolue.

questions de Géométrie, de Mécanique et de Physique et non à des abstractions qui n'ont rien à faire avec le monde extérieur et l'expérience répétée. C. Burali-Forti (Turin).

SUR L'ÉCONOMIE DE LA PENSÉE

DANS LES MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (1)

Je n'aborderai pas ici ce problème, d'une grande actualité, qui consiste à examiner dans quelle mesure l'abstraction d'une part, et l'intuition d'autre part, doivent trouver place à l'université dans l'enseignement des éléments d'analyse. Je me bornerai à observer qu'on parviendra aux résultats les plus favorables si, dans certaines limites, chaque professeur a la liberté de suivre sa propre initiative.

Par contre, je suis persuadé que — sauf dans des cas exceptionnels où l'on se trouve en présence d'élèves particulièrement doués — l'enseignement universitaire ne peut offrir les garanties d'un succès certain et continu, que s'il est accompagné d'une revision systématique des mathématiques élémentaires. Cette revision doit porter principalement sur l'arithmétique, l'algèbre et la trigonométrie. Il suffirait, à la rigueur, d'y consacrer une heure par semaine. Ces leçons rendraient certainement de grands services. Ainsi, il est rare que, parmi les jeunes gens venant d'accomplir leurs études secondaires, il s'en trouve un qui ait une idée nette de la relation $a^0 = 1$, à laquelle on peut attribuer deux significations entièrement différentes, l'une se rattachant simplement à la notation, l'autre provenant du cas limite envisagé dans la théorie des puissances.

D'un autre côté les calculateurs, tels que les astronomes, se plaignent de l'incapacité des jeunes étudiants pour tout ce qui

---

(1) Cette note forme une suite toute naturelle à l'article que nous avons publié *sur l'enseignement de la Trigonométrie* (n° 1, p. 15). Elle a été présentée au Congrès de Düsseldorf en septembre 1898 et publiée dans le tome VII du *Jahresbericht der D. M. V.* M. Fr. Meyer a bien voulu nous adresser son mémoire pour les lecteurs de *l'Enseignement mathématique*. La Direction.

concerne les calculs, même dans les problèmes trigonométriques les plus simples.

Voici encore un autre fait dont on doit tenir compte. Pendant le cours des quatre années d'études, l'étudiant en mathématiques parvient à se familiariser avec les domaines les plus difficiles et les plus délicats des sciences exactes, et cela développe chez lui un certain sentiment d'orgueil. Mais, une fois placé dans l'enseignement comme maître, il éprouve souvent une profonde répugnance à rassembler les premiers éléments qu'il a oubliés depuis bien des années ; le temps qui lui reste pour la préparation de son enseignement ne lui permet pas toujours d'approfondir le sujet : aussi le jeune maître se bornera-t-il à suivre aveuglément un manuel quelconque.

Cependant *par des revisions fréquentes des éléments on parvient non seulement à réaliser d'importantes économies dans la pensée et dans les calculs, mais encore à rattacher le sujet de plus en plus étroitement à des considérations plus élevées* [1]. C'est ce que nous nous proposons de montrer ici en nous bornant, pour le moment, à l'exemple concret de la *trigonométrie plane*. Je suppose l'élève en possession des premiers éléments de géométrie plane et d'algèbre.

Le *premier cycle* doit avoir un but essentiellement pratique afin de *conduire le plus rapidement possible aux applications*, c'est-à-dire à la résolution des triangles. On introduira le sinus, le cosinus, la tang et la cotg à l'aide du triangle rectangle. La résolution des triangles rectangles n'est qu'une simple conséquence de la définition des rapports trigonométriques et du théorème de Pythagore ; pour les calculs on admettra l'existence des log sin, log cos, ... On passera ensuite aux triangles quelconques. Leur étude trigonométrique est basée sur l'examen des triangles rectangles déterminés par les hauteurs du triangle ; elle conduit aux relations :

$$S_a \equiv b \sin\gamma - c \sin\beta = 0 \qquad \text{(principe des sinus)}, \qquad (1)$$

$$C_a \equiv b^2 + c^2 - a^2 - 2bc\cos\alpha = 0 \qquad \text{(principe des cosinus)}. \qquad (2)$$

$$P_a \equiv a - b\cos\gamma - c\cos\beta = 0 \qquad \text{(principe des projections)}. \qquad (3)$$

---

[1] Je m'appuie ici sur le principe généralement adopté, — bien qu'il ne soit pas toujours appliqué — que pour lui-même le maître doit se placer à un point de vue plus élevé que celui qu'il est obligé d'adopter vis-à-vis des élèves.

Ces trois groupes de formules suffisent déjà pour procéder à une première étude de la résolution des triangles quelconques. On montrera ensuite comment l'usage du demi-angle peut apporter certaines simplifications.

En appliquant (2), ou même (3), au triangle isocèle on se trouve immédiatement conduit aux relations entre le sinus et le cosinus de $\frac{\alpha}{2}$ et α. Si dans un triangle quelconque on veut introduire le demi-angle $\frac{\alpha}{2}$, on y parviendra le plus simplement possible en construisant les segments $b + c$ et $b - c$. La relation (1) appliquée aux triangles ainsi obtenus fournit immédiatement les formules de Mollweide et par conséquent celles de Neper. L'introduction de $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ dans (2) conduit à des relations bien connues et à l'expression de l'aire du triangle. On s'assurera que les formules obtenues conviennent encore au cas où le triangle renferme un angle obtus, en établissant que l'on a $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

Ces premiers éléments mettront l'élève en possession d'une méthode simple pour la résolution des triangles, et le premier cycle dans l'enseignement de la trigonométrie présentera ainsi un ensemble bien déterminé. Ce résultat peut être atteint en consacrant à cette branche quelques heures par semaine.

Pendant le *second cycle* on étudiera les relations entre les différentes formules du triangle. Il sera aisé d'opérer le passage d'un groupe à un autre en utilisant des éliminations très simples et en faisant intervenir la valeur de la somme des angles d'un triangle. *La comparaison des résultats permettra déjà de s'élever au-dessus de la trigonométrie du triangle.* Par exemple on peut obtenir la propriété exprimée par les formules de Mollweide par deux voies analogues, en combinant par addition ou soustraction d'abord deux quelconques des formules du groupe (1), puis deux des formules du groupe (2). En identifiant les résultats on obtiendra les expressions relatives à la somme et à la différence de deux sinus ou cosinus exprimées en fonction du produit de sinus et de cosinus de la demi-somme ou demi-différence des angles; un calcul simple conduira ensuite aux quatre formules du théorème

d'addition. En opérant de la sorte les deux angles qui interviennent dans ces formules doivent satisfaire uniquement à la condition que leur somme ne dépasse pas deux angles droits; pour s'affranchir de cette restriction il suffira d'établir les relations

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Les formules d'addition peuvent encore être établies d'une manière plus directe; nous utiliserons à cet effet le langage de la géométrie analytique. On considère un triangle dont l'un des sommets A coïncide avec l'origine d'un système d'axes rectangulaires choisi de manière que les abscisses ou les ordonnées des deux autres sommets B et C aient des valeurs égales ou égales et opposées. L'évaluation de l'aire du triangle peut être obtenue aisément quelle que soit la position des sommets B et C; on déterminera d'abord l'aire par la méthode planimétrique, puis on établira son expression à l'aide de formules trigonométriques. Si l'on tient compte ensuite de la relation entre les coordonnées rectangulaires et les coordonnées polaires, on obtiendra une expression générale pour $\sin(\alpha - \beta)$, dont on déduira facilement les trois formules correspondantes.

Dans le *troisième cycle* on se placera au point de vue de l'*inversion*. On examinera les formules (2) et (3) pour des longueurs et des angles quelconques. Si les relations (2), ou encore de groupe (3), subsistent pour trois longueurs quelconque a, b, c, et trois angles quelconques α, β, γ et si l'on fait abstraction des triangles impropres et non réels, on reconnaît qu'en effet on se trouve en présence d'un triangle unique défini par les éléments $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Aux formules (2) on doit toutefois joindre la condition $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, qui peut être écrite sous la forme trigonométrique

$$\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha = 0. \tag{4}$$

On peut donc s'attendre à ce que, d'un pareil *groupe caractéristique* pour l'existence d'un triangle, on puisse déduire tous les autres groupes de formules en se servant uniquement de transformations algébriques et sans avoir recours à la Géométrie. Ce problème peut être résolu de différentes manières; je me con

tenterai de montrer ici comment de la relation (3) on peut déduire les formules (1), (2) et (4). Élevons au carré les formules (1) et (3) afin de pouvoir les comparer plus facilement avec (2). On a :

$$\Sigma_a \equiv b^2 \sin^2\gamma - c^2 \sin^2\beta = 0, \tag{1'}$$

(a, b, c, doivent être pris dans l'ordre cyclique),

$$\pi_{bc} \equiv (a - b\cos\gamma)^2 - (c\cos\beta)^2 = 0, \tag{3'}$$

si l'on écarte le cas des triangles impropres, ces formules sont équivalentes aux groupes (1) et (3). A la formule (4) joignons le facteur $2bc$, c'est-à-dire posons

$$R_a \equiv 2bc[\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha] = 0. \tag{4'}$$

Entre les expressions π, Σ, C, P, renfermant les éléments *quelconques* a, b, c, α, β, γ, on a les relations identiques :

$$\pi_{bc} + \pi_{ca} \equiv C_b + C_c, \tag{5}$$

$$2C_a \equiv \pi_{ac} + \pi_{ba} + \pi_{ab} + \pi_{ba} - \pi_{bb} - \pi_{cc}, \tag{6}$$

$$2\Sigma_a \equiv \pi_{ac} + \pi_{ab} - \pi_{ab} - \pi_{ba} - \pi_{bb} + \pi_{cc}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} C_a + \Sigma_a &\equiv \pi_{ac} + \pi_{ca} - \pi_{bc}, \\ C_a - \Sigma_a &\equiv \pi_{ab} + \pi_{ba} - \pi_{cc}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\pi_{ab} \equiv C_c - \Sigma_c. \tag{8^a}$$

La formule (8^a) représente l'ensemble des formules (5) à (8), car celles-ci se déduisent immédiatement de (8^a). La signification est très claire ; elle montre que les pensées géométriques qui conduisent aux expressions (1), (2), (3) sont soumises à une relation et elle donne cette relation ; autrement dit elle fait voir que deux de ces pensées ne peuvent être ramenées l'une à l'autre qu'en ayant recours à la troisième.

Quant à R_a, son expression (4) la plus simple s'obtient en conservant P_a et S_a ; on a

$$R_a \equiv P^2_a + S^2_a - C_a - C_b - C_c. \tag{9}$$

---

(1) Si dans (9) on veut éviter b et c, on trouve, en tenant compte de $C_b + C_c = 2cP_a$, la forme plus compliquée :

$$(C_a + C_b)(C_a + C_c)\,R_a = 2P_b P_c\,(P^2_a + S^2_a - C_a - C_b - C_c). \tag{9}$$

Les considérations qui interviennent dans ce troisième cycle s'étendent de nouveau à toute la Trigonométrie. Mais, comme le calcul explicite des résultats présente quelques difficultés, je me bornerai à un exemple simple. Supposons qu'il s'agisse des différentes formes trigonométriques de la condition qui exprime que la somme de deux angles α, β (mod. 4 droits) est égale à deux droits.

La plupart de ces formes ne représentent pas uniquement la condition proposée ; d'autre part on doit tenir compte que dans bien des applications les conditions auxiliaires ne peuvent être satisfaites. Voici les formes les plus connues :

$$\left.\begin{array}{ll} P \equiv 1 - \sin(\alpha+\beta) = 0, & \cos(\alpha+\beta) = 0, \\ A \equiv \sin\alpha - \cos\beta = 0 & B \equiv \sin\beta - \cos\alpha = 0, \\ S \equiv \sin 2\alpha - \sin 2\beta \equiv 0, & \\ C \equiv \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 1 \equiv \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = 0. & \end{array}\right\} \quad (10)$$

Envisageons α, β comme des angles quelconques et déterminons les relations numériques (syzygies) entre les premiers membres des relations (10).

Entre les deux expressions de la première ligne on a nécessairement la syzygie

$$P^2 + \cos^2(\alpha+\beta) \equiv 2P. \quad (11)$$

On peut donc écarter $\cos(\alpha+\beta)$, et chercher les syzygies entre les cinq expressions

$$P, A, B, S, C. \quad (12)$$

Les déterminants fonctionnels permettent de reconnaître qu'entre deux quelconques des expressions (12) il n'existe pas de syzygie. D'autre part l'élimination de α, β entre trois quelconques de ces expressions montre qu'il existe une syzygie (non identiquement nulle) entre ces trois expressions ; en vertu de la proposition précédente on voit qu'il n'en existe qu'une sorte et qu'elle est irréductible. Ces dix syzygies peuvent toutes être obtenues à l'aide des moyens ordinaires de l'algèbre élémentaire ;

nous indiquerons seulement celles dont on peut déduire facilement les autres :

$$A^2 + B^2 = 2P,$$

$$(B^2 - A^2)^2 (A^2 + B^2 - 1) + 4S^2 (A^2 + B^2) = 0$$

$$A^2B^2 (A^2 + B^2 - 4) + C^2 (A^2 + B^2) = 0$$

$$[S^2B^2 + \tfrac{1}{4} C^2 + B^2 (B^2 - 2)^2] (S^2 + 4C^2) = 4B^2S^2.$$

Ces syzygies sont d'une signification simple ; *elles embrassent l'ensemble des relations réciproques entre les expressions* (12).

Mais on peut faire encore un pas de plus et sortir entièrement du domaine trigonométrique. Les formules (10) renferment quatre variables $\sin \alpha = x_1$, $\sin \beta = x_2$, $\cos \alpha = y_1$, $\cos \beta = y_2$ soumises aux relations

$$P_1 = x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \qquad P_2 = x_2^2 + y_2^2 - 1 = 0 ; \tag{14}$$

tandis que $\sin (\alpha \pm \beta)$, $\cos (\alpha \pm \beta)$, sont définis par

$$\sin (\alpha \pm \beta) = x_1y_2 \pm x_2y_1, \qquad \cos (\alpha \pm \beta) = y_1y_2 \mp x_1x_2. \tag{15}$$

Si maintenant on combine P_1, P_2 avec trois quelconques des expressions (12), on aura des systèmes de valeurs (x_1, x_2, y_1, y_2) pour lesquels les cinq expressions disparaissent ; leur résultant doit par conséquent être identiquement nul.

Si donc on forme le résultant (irréductible) de :

$$P_1 = x_1^2 - y_1^2 + 1, \qquad P_2 = x_2^2 - y_2^2 + 1, \tag{14'}$$

et de trois des expressions :

$$P = (1 - x_1y_2 - x_2y_1), \tag{12'}$$

$$A = x_1 + y_2, \qquad B = x_2 + y_1,$$

$$S = 2x_1y_1 - 2x_2y_2, \qquad C = y_1^2 - y_2^2 + 1,$$

on obtiendra la syzygie cherchée entre P_1, P_2 et trois quelconques des expressions (12).

Ici encore les calculs [1] n'offrent aucune difficulté ; nous

[1] Le lecteur effectuera sans peine un calcul analogue pour les relations (5) à (9).

donnons, à titre d'exemples, les relations suivantes :

$$A^2 + B^2 - P_1 - P_2 = 2P,$$

$$S^2(A^2 + B^2) + [SAB(P_1 - P_2) + (A^2 - B^2)^2][(A^2 + B^2 - 1 - 2(P_1 + P_2) + (A^2 + B^2)(P_1 - P_2)^2] = 0,$$

$$C^2(A^2 + B^2)(A^2 - B^2)^2 + 2C[2(P_1 - P_2)(B^2 - A^2) - (B^2 + A^2)(B^2 - A^2)(B^2P_1 - A^2P_2) + A^2B^2(A^2 - B^2)^2\}(A^2 + B^2 - 1 - 2(P_1 + P_2)\} + A^2B^2(A^2 + B^2)(P_1 - P_2)^2 + (A^2 + B^2)(A^2P_2 - B^2P_1)^2 + 1](P_1 - P_2)(A^2P_2 - B^2P_1) = 0.$$

On objectera que précisément dans cette voie — de même que dans l'arithmétisation des irrationnelles d'après Kronecker — des relations très simples entre les irrationalités trigonométriques se présentent dans une longue suite de relations numériques entre des fonctions entières dont l'ensemble est difficile à embrasser (1). Il est vrai que cette difficulté n'est souvent qu'apparente et qu'elle provient des calculs effectués explicitement : tandis que nous pouvons appuyer nos considérations en rappelant que l'algèbre possède maintenant des méthodes systématiques permettant de former de pareils résultants de fonctions entières. Mais cette étude n'a pas encore été faite pour la trigonométrie élémentaire.

Le cycle suivant aurait pour but d'introduire les notions d'invariants, des syzygies et de leurs systèmes complets.

W. Franz Meyer (Königsberg i. Pr.)

(1) Quelque chose d'analogue se présente dans les équations modulaires.

DE LA NUMÉRATION PARLÉE

AU POINT DE VUE INTERNATIONAL

Tous les mathématiciens savent-ils que les expressions

billion, trillion, quatrillion, quintillion, décillion,

signifient chez les peuples du Nord l'unité suivie respectivement

de **12**, **18**, **24**, **30**, **60** zéros

tandis que chez les peuples du Midi c'est l'unité suivie

de **9**, **12**, **15**, **18**, **33** zéros ?

Cette divergence de sens pour des mots écrits absolument de la même façon n'est-elle pas déplorable, et ne serait-il pas urgent d'y remédier ? La réforme serait d'autant plus facile que les mots incriminés ne sont pas employés par le peuple : pour les usages de la vie il suffit de calculer jusqu'aux millions, et le mot milliard a partout le même sens. Au besoin on pourrait encore dire : mille milliards forment une milliasse ; alors avec ces cinq mots : un, mille, million, milliard, milliasse, on pourrait exprimer des nombres bien au delà des besoins populaires, en se servant, comme les peuples latins de tranches de trois chiffres. La manière de nombrer des peuples latins est plus souple et plus simple, et comme telle convient parfaitement pour l'usage populaire.

Mais dans les hautes sciences on peut être amené à exprimer des nombres beaucoup plus grands que dans l'usage commun. Or la nomenclature germanique l'emporte sous ce rapport sur la nomenclature latine. Elle l'emporte encore pour être plus rationnelle, car trillion par exemple signifie million à la troisième puissance ; tandis que chez les latins c'est mille à la $(3+1)^e$ puissance. Il s'agit ici d'opérer une réforme qui puisse être

adoptée par tout le monde, en ne blessant l'amour-propre de personne. Voici ce qu'il me semble qu'on pourrait faire :

1. Supprimer absolument les expressions à double sens billion, trillion, etc.

2. Faire une convention générale pour chacun des mots suivants : dix, cent, mille, myriade (1), million, milliard, milliasse, et admettre qu'en les faisant précéder d'un des préfixes

bi tri quatri quinti déci

on élève respectivement à la

2^{me} 3^{me} 4^{me} 5^{me} 10^{me}

puissance le nombre qu'ils expriment.

Avec cette convention chacun des peuples en désaccord pourrait continuer de nombrer à sa manière ; seulement les Allemands au lieu de dire billion, trillion, etc., diraient pour éviter toute amphibologie bimillion, trimillion, etc.

Les Français de leur côté au lieu de million, billion, trillion, diraient bimille, trimille, quatrimille.

Mais tous trouveront probablement plus simple de se servir des mots de million, milliard, milliasse, et d'affecter de préfixes un des deux derniers mots. On aurait des tranches de 9 ou de 12 chiffres, subdivisés en tranches de trois, mais on pourrait exprimer des nombres bien supérieurs à ceux de l'Arénaire d'Archimède. On incorporerait le préfixe comme on l'avait incorporé autrefois au mot million, en évitant toutefois les jeux de mots ; ainsi on dirait bimilliard, et non billiard, mais on pourra dire billiasse : trilliard, trilliasse ; quatrilliard, quatrilliasse, etc. Le décilliard serait l'unité suivie de 90 zéros ; la décilliasse l'unité suivie de 120 zéros.

Si les Grecs sont restés fidèles au calcul par myriades de leurs ancêtres (?), ils pourront nombrer par tranches de quatre chiffres.

Voici un tableau comparatif et synonymique d'un certain

(1) Je mets ce mot pour le cas où les Grecs modernes seraient restés fidèles à la nomenclature de leurs ancêtres.

nombre des diverses expressions résultant des conventions ci-dessus :

NOMENCLATURES				
PLANIMÉTRIQUES Tranches de :		STÉRÉOMÉTRIQUES Tranches de :		
2 chiffres.	4 chiffres (hellénique).	3 chiffres (latine).	6 chiffres (germanique).	9 chiffres (nouvelle).
Un.	**Un.**	**Un.**	**Un.**	**Un.**
Dix.	Dix.	Dix.	Dix.	Dix.
Cent.	Cent.	Cent.	Cent.	Cent.
. . . . .	Mille.	**Mille.**	*Mille.*	*Mille.*
Bicent.	**Myriade.**	. . . . .	Dix Mille.	Dix Mille.
. . . . .	. . . . .	. . . . .	Cent Mille.	Cent Mille.
Tricent.	. . . . .	**Bimille.**	**Million.**	*Million.*
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	Dix Millions.
Quatricent.	**Bimyriade.**	. . . . .	. . . . .	Cent Millions.
. . . . .	. . . . .	**Trimille.**	. . . . .	**Milliard.**
Quinticent.	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
Sexticent.	**Trimyriade.**	**Quatrimille.**	**Bimillion.**	Mille milliards.

A propos de la seconde colonne de ce tableau, rappelons qu'*Archimède*, dans son fameux Arénaire, a employé une numération qui, écrite, serait à tranches de 8 chiffres, et qui est fondée sur la bimyriade, dixième partie du milliard qui nécessite des tranches de 9 chiffres. Les nomenclatures des deux premières colonnes répondent à la progression familière aux géomètres-arpenteurs : mètres carrés, ares, hectares, myriares, voilà pourquoi je les nomme planimétriques.

Maintenant résumons-nous, surtout au point de vue de l'enseignement. Il me semble qu'il y aurait lieu de convenir internationalement que les Arithmétiques ne parleraient plus des billions, trillions, etc., que pour dire que l'usage en est aboli et pour indiquer chacun des deux sens que ces mots avaient autrefois. On enseignerait la numération au moyen de la progression ayant pour raison mille et des noms : un, mille, million, milliard, (milliasse). On indiquerait, pour ceux qui pourraient en avoir besoin, la manière générale ci-dessus mentionnée de dénommer les puissances des unités décimales, et on applique-

rait la méthode, suivant l'avis d'un congrès international de mathématiciens, soit au milliard, soit à la milliasse pour avoir un système généralement adopté et partout connu, à l'usage des savants qui peuvent avoir besoin de nombres excessivement grands.

Pour ceux que la trop nombreuse synonymie pourrait effrayer, rappelons que chez les Germains la coexistence de milliard et de mille millions n'a eu aucun résultat fâcheux, pas plus que chez les Latins la coexistence de milliard et de billion, mais ce qui est vraiment fâcheux, au point de vue international, c'est le double sens [1]) dont est affligé ce dernier mot avec tous ses congénères.

Ch. Berdellé (Rioz, Haute-Saône).

SUR LES SIGNES DES DISTANCES

EN GÉOMÉTRIE

1. J'écris d'abord le tableau suivant, où la lettre G veut dire *Géométrie*, et où les lettres A, α, a, désignent respectivement un point, une droite, un plan.

G. linéaire.	G. plani-conique.	G. axiale.
A_1^1	α_1^1	a_1^1
G. plane.	G. conique.	
A_1^2, α_2^1	α_1^2, a_2^1	
G. générale.		
A_1^3, α_2^2, a_3^1		

La Géométrie linéaire est l'étude des points d'une droite τ considérée comme rayon ; la Géométrie plani-conique est l'étude des droites menées dans un plan s par un point S ; la Géométrie

[1]) Ce double sens a laissé des traces dans les articles billion, trillion, etc., du *Dictionnaire de mathématiques de l'Encyclopedie*.

axiale est l'étude des plans qui passent par une droite s considérée comme axe.

La Géométrie plane est l'étude des points et des droites dans un plan s; la Géométrie conique est l'étude des droites et des plans qui passent par un point S.

La Géométrie générale est l'étude des points, des droites, des plans de l'espace.

2. La notation α_2^2 signifie qu'une droite dans l'espace est déterminée par deux points (indice inférieur), par deux plans (indice supérieur) ; les notations A_1^3 et a_3^1 ont un sens analogue. La notation A_1^2 signifie que, en Géométrie plane, un point est déterminé par un point ou par deux droites, etc. Dans chaque Géométrie, la somme des deux indices surpasse d'une unité le nombre des paramètres dont dépend l'*élément décrivant* dans cette Géométrie, ou l'*élément enveloppant* dans cette Géométrie : ainsi, dans l'espace, la somme des deux indices est 4, alors qu'un point ou un plan dépend de trois paramètres. Le produit des deux indices fait connaître le nombre des paramètres dont dépend l'élément : ainsi une droite α_2^2 dépend de quatre paramètres. Dans un espace analytique à $n-1$ dimensions, on aurait en Géométrie générale les éléments

$$M_1^{n-1},\quad M_2^{n-2},\ldots,\ M_p^q,\ldots,\ M_{q}^{p},\ldots,\ M_{n-2}^{2},\quad M_{n-1}^{1},$$

dont le premier est le point, le dernier, qui peut être appelé *trope*, est le rayon, l'avant-dernier peut être appelé le second axe ; on peut dire que les deux éléments M_p^q et M_q^p sont *associables*, et ils sont associés s'ils ont un point commun et par suite un trope commun.

3. Deux éléments associables M_p^q et M_q^p ont un *moment*. Dans l'espace réel, avec l'hypothèse euclidienne, ces moments sont pour les diverses Géométries :

(A,B)	$\sin(\alpha,\beta)$	$\sin(a,b)$
(A,β)	$\sin(\alpha,b$	
(A,b) (α,β)		

c'est-à-dire : 1° la distance de deux points, le sinus de l'angle de deux droites associées, le sinus d'un dièdre ; 2° la distance d'un point à une droite, le sinus de l'angle d'une droite et d'un plan ; 3° la distance d'un point à un plan, le moment de deux droites quelconques. L'hypothèse euclidienne influe sur les cases à gauche du tableau.

4. Dans un ouvrage publié en 1892, l'*Hyperespace*, j'ai montré que, si l'on désigne par (M_p^q, M_q^p) le moment de deux éléments associables pris dans un certain ordre, on a, avec des conventions presque nécessaires,

$$(1) \qquad (M_p^q)\ (M_q^p) = (-1)^{pq} \times (M_q^p,\ M_p^q),$$

les éléments étant dirigés, l'espace analytique étant orienté ; le moment ne change de signe que si p et q sont impairs tous deux. Je me propose de légitimer cette règle pour l'espace réel ; les seuls moments qui changent de signe quand on change l'ordre des deux éléments sont : la distance de deux points, le sinus de l'angle de deux droites dans un plan, le sinus du dièdre de deux plans, et la distance d'un point et d'un plan.

Les droites sont dirigées, les plans sont orientés par des flèches circulaires, l'espace est orienté comme il suit : on considère une droite et un plan perpendiculaires, on dirige la droite par une flèche f, on oriente le plan par une flèche circulaire φ, et le système (f, φ), que l'on peut tourner à volonté, est dit orienter l'espace ; on pourrait encore employer une flèche hélicoïdale.

5. Il n'y a pas lieu d'insister pour la Géométrie linéaire, ni pour la Géométrie plani-conique ; pour la Géométrie axiale, quand on considère un dièdre (a, b), les plans sont orientés, l'arête est dirigée, et un observateur représenté par la flèche de l'arête suit des yeux le mouvement du plan a quand ce plan *orienté* vient coïncider avec le plan *orienté* b : l'espace étant orienté, le dièdre est connu en grandeur et en signe à $2k\pi$ près. Dans ces trois cas, la règle (1) se vérifie.

6. Je vais montrer que, *avec une définition convenable, nullement arbitraire*, on a par exemple dans l'espace pour la distance des éléments point et plan, c'est-à-dire A_1^3 et A_3^1,

$$(A, b) = -(b, A).$$

le plan étant orienté. Soit (A, b). Partons de A, et prenons un point B dans le plan b ; soit α la droite AB que l'on dirige à volonté : menons par B une droite β dans le plan b, et dirigeons-la à volonté ; soit a le plan des deux droites α et β, plan que l'on oriente à volonté ; nous écrirons par définition

$$(A,b) = \overline{AB} \times \sin(\alpha,\beta) \times \sin(a,b),$$

le second membre étant indépendant de B et de β, et de la façon dont on dirige ou oriente les éléments introduits. Nous écrirons de même, par définition,

$$(b,A) = \sin(b,a) \times \sin(\beta,\alpha) \times \overline{BA},$$

en partant de b, et en introduisant successivement le plan a et la droite α. Le nombre des facteurs étant impair, on a bien la relation écrite au début de ce numéro.

On aurait de même en Géométrie plane ou en Géométrie conique, avec deux facteurs au lieu de trois,

$$(A,\beta) = (\beta,A), \qquad \sin(\alpha,b) = \sin(b,\alpha),$$

ce qui est conforme à la règle (1).

7. Pour le moment de deux droites, α_2^3 et β_2^3, on doit avoir $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$. Or, de quelque façon que l'on veuille définir le signe de ce moment, cela aura lieu en vertu de la remarque suivante : si AB est la perpendiculaire commune aux deux droites, si l'on considère les deux demi-plans qui passent par AB et par les régions positives α et β à partir de A et B, si l'on mène le plan bissecteur, et si, dans ce plan, par le milieu O de AB, on mène Oz perpendiculaire sur AB, cette droite est un axe de symétrie pour les droites *dirigées* α et β, de sorte que le système (α, β) peut être amené en coïncidence avec le système (β, α).

Quant à la définition du signe du moment de deux droites, on peut la déduire, d'une manière analogue à ce qu'on a fait au n° 6, de la formule

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,B) \times \sin(a,\beta),$$

dans laquelle B est un point de β, et a est le plan déterminé par B et α, plan que l'on oriente à volonté. Cette formule, utile pour l'expression du volume d'un tétraèdre en fonction de deux arêtes

opposées..., est un cas particulier du *théorème des quatre éléments* donné dans l'ouvrage cité plus haut.

La définition du moment de deux droites se rattache à des idées générales qui sont exposées au chapitre VII du même ouvrage ; l'hypothèse euclidienne influe d'ailleurs sur cette définition ; on peut dire que l'on multiplie la distance minimum de deux points pris sur les deux droites par le sinus maximum de l'angle de deux plans passant par les deux droites.

8. Avec un tétraèdre de référence ABCD, dont les arêtes α, β, γ, α', β', γ' sont dirigées, dont les plans a, b, c, d des faces sont orientés, on a, pour un point M et un plan orienté m,

$$(\mathrm{M},m) = \frac{(\mathrm{A},m)\times(\mathrm{M},a)}{(\mathrm{A},a)} + \ldots + \ldots + \ldots,$$

et pour deux droites

$$(\alpha,\nu) = \frac{(\alpha',\nu)\times(\nu,\alpha)}{(\alpha',\alpha)} + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots;$$

les idées barycentriques donnent la première formule ; on a la seconde en considérant une force F dirigée suivant α, force que l'on décompose suivant les directions des arêtes du tétraèdre, et en prenant les moments par rapport à ν : les composantes de la force F se déterminent d'ailleurs par le théorème des moments. Si l'on pose

$$\begin{cases} (\mathrm{M},a) = x, \\ (\mathrm{M},b) = y, \\ (\mathrm{M},c) = z, \\ (\mathrm{M},d) = t, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mathrm{A},m) = u, \\ (\mathrm{B},m) = v, \\ (\mathrm{C},m) = w, \\ (\mathrm{D},m) = r, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\mathrm{A},a) = h, \\ (\mathrm{B},b) = h', \\ (\mathrm{C},c) = h'', \\ \mathrm{D},d) = h''', \end{cases}$$

on a

$$(\mathrm{M},m) = \frac{ux}{h} + \frac{vy}{h'} + \frac{wz}{h''} + \frac{rt}{h'''};$$

pour m, M) on doit changer le signe du second membre. Pour des droites, on pose, en se réglant sur D,

$$\begin{cases} (\alpha,\alpha) = \lambda, \\ (\alpha,\beta) = \mu, \\ (\alpha,\gamma) = \nu, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha,\alpha') = \rho, \\ (\alpha,\beta') = \sigma, \\ (\alpha,\gamma') = \tau, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha,\alpha') = r_1, \\ (\beta,\beta') = r_1', \\ (\gamma,\gamma') = r_1'', \end{cases}$$

et l'on a

$$(\alpha,\alpha') = \frac{\lambda\rho'}{r_1} + \frac{\mu\sigma'}{r_1'} + \frac{\nu\tau'}{r_1''} + \frac{\rho\lambda'}{r_1} + \ldots + \ldots$$

L'équation normale d'une droite, $x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0$, et l'équation normale d'un plan, donneraient lieu à des remarques que je laisse de côté.

9. Formons le tableau

Segment.	Angle.	Dièdre.
	Triangle.	Trièdre.
		Tétraèdre.

La première ligne donne les quantités déjà considérées $\overline{AB}$, $\sin\overline{\alpha,\beta}$, $\sin(a,b)$. Pour un triangle, comprenant trois points et trois droites, on a les deux quantités corrélatives $2S$ et $\frac{S}{R}$, S étant la surface et R le rayon du cercle circonscrit; le signe de R est défini par les formules

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\beta,\gamma)} = \ldots = \ldots = 2R = \frac{2S}{\left(\frac{S}{R}\right)}.$$

Pour un trièdre, on a à considérer le sinus du trièdre, et le sinus du trièdre réciproque. Pour un tétraèdre, on a à considérer le volume sextuplé $6V$, et une quantité corrélative que l'on définirait par des formules analogues aux formules écrites en dernier lieu.

10. Sans vouloir faire ici une revue complète de ces quantités, nous dirons que l'on peut définir l'aire algébrique d'un triangle ABC par les formules

$$2\overline{ABC} = \overline{BC}\times(A,\alpha) = \overline{CA}\times(B,\beta) = \overline{AB}\times(C,\gamma),$$

α, β, γ désignant les droites dirigées qui portent les côtés; on peut écrire, $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ ou $\overline{C}$ mis en facteur voulant dire $+1$,

$$2\overline{ABC} = \overline{A}\times\overline{BC}\times(A,\alpha) = -B\times\overline{AC}\times(B,\beta) = \ldots,$$

le signe — correspondant au dérangement de la suite BAC. On écrira de même

$$6\overline{ABCD} = 2\overline{ABC}\times\overline{D}\times(d,D) = \ldots,$$
$$= -\overline{D}\times 2\overline{ABC}\times(D,d) = \ldots.$$

le signe — correspondant au dérangement de la suite D A B C, l'ordre des éléments dans la parenthèse étant lié à l'ordre des deux premiers facteurs ; on en déduit facilement

$$6\,\overline{\mathrm{ABCD}} = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{CD}} \times (\gamma,\gamma'),$$

γ et γ' étant les droites dirigées qui portent A B et C D.

11. Les définitions adoptées donnent les conséquences suivantes :

On constate que la distance d'un point A à une droite dirigée β dans un plan orienté est positive lorsqu'une force agissant suivant β dans le sens positif a un moment positif par rapport à A. Pour l'angle d'une droite et d'un plan, on a une règle très simple et très naturelle. Pour un point et un plan, c'est la distance (b, A) qui est positive quand un observateur debout sur le plan du côté de A voit la flèche circulaire du plan tourner de sa droite vers sa gauche, si l'espace est orienté de droite à gauche ; pour deux droites, le moment est positif comme en Mécanique. L'aire d'un triangle, le volume d'un tétraèdre sont positifs dans les conditions généralement admises. Relativement à la façon d'orienter un plan, ou l'espace, il est essentiel, quand on emploie des axes de coordonnées, d'*orienter le plan de* Ox *vers* Oy, *d'orienter l'espace de* Ox *vers* Oy *pour l'observateur* Oz ; si l'on tient à parler de gauche et de droite, il convient alors d'adopter pour l'espace une disposition des axes Ox, Oy, Oz, telle que l'observateur Oz voie les axes Ox, Oy comme on les place d'ordinaire en Géométrie plane : autrement, on est conduit à orienter le plan de Oy vers Ox comme on fait souvent en Mécanique plane, ce qui est fâcheux pour les moments ; l'espace est alors orienté dans le sens astronomique direct, tel qu'on l'oriente pour l'ascension droite et pour la longitude, mais non pour l'azimut et pour l'angle horaire.

G. Fontené (Paris).

CLASSIFICATION

DES

LIGNES ET SURFACES DU SECOND ORDRE

M. Méray, l'éminent professeur de la Faculté des Sciences de Dijon, a donné, dans les *Nouvelles Annales des Mathématiques* (3e série, tome XI, novembre 1892) une classification des lignes et surfaces du second ordre basée sur la présence des *points doubles*.

Cette classification ne paraît pas avoir attiré l'attention comme elle le mérite; je me propose de montrer les avantages qu'elle présente au point de vue de la spéculation pure et de l'enseignement, que celui-ci s'adresse à de futurs mathématiciens ou à des élèves ingénieurs.

La théorie des lignes et surfaces du second ordre est arrivée à un assez haut degré de perfection pour qu'il soit permis de chercher à déterminer les propriétés fondamentales qui peuvent servir à établir une classification naturelle.

Pour atteindre ce but, nous devrons tenir compte à la fois des caractères algébriques de l'équation, de la forme de la ligne ou de la surface, de ses propriétés géométriques et peser, pour ainsi dire, l'importance de chacun de ces caractères.

Tout d'abord, si on réfléchit à l'état actuel de la Géométrie analytique, on est conduit à conclure que le caractère algébrique doit l'emporter sur les autres. L'Algèbre fortement constituée, grâce à ses procédés de généralisation, a imposé peu à peu à la Géométrie son langage, ses conventions.

La Géométrie fournit les idées premières, les définitions, l'Algèbre les précise pour qu'on puisse leur appliquer le calcul et elle leur donne la généralité qu'elle possède elle-même; les exceptions, les cas particuliers disparaissent.

Il paraît donc naturel de chercher dans les propriétés de l'équation un caractère fournissant une base assez large pour

supporter toute la classification. Du reste les lignes et surfaces étant définies par leurs équations, il est certain que c'est des propriétés de la forme algébrique que doivent découler toutes les propriétés des figures correspondantes. Si donc nous trouvons une concordance absolue entre les caractères algébriques et géométriques des lignes ou surfaces appartenant à un même groupe, si les caractères des différents groupes sont distincts, nous aurons la meilleure preuve que notre classification est naturelle.

Examinons d'abord les classifications adoptées. Pendant un certain temps on a classé les lignes et surfaces du second ordre d'après les propriétés du *centre*. Cette classification est primitive, artificielle ; le centre n'a qu'une importance secondaire dans les lignes du second ordre et il n'en a plus aucune pour les lignes d'ordre plus élevé qui n'ont pas de centre en général.

Insuffisante, cette classification repose de plus sur une confusion regrettable ; le centre d'une ellipse ne joue pas le même rôle que le point d'intersection de deux droites ; le premier est exclusivement un centre, le second est avant tout un *point double* qui a une influence primordiale sur les propriétés algébriques et géométriques. Quelle note donnerait-on à un élève confondant un centre et un point double dans une cubique ? Les mêmes réflexions s'appliquent aux surfaces.

Actuellement on classe les coniques en résolvant l'équation générale et en construisant les différentes lignes qu'elle peut représenter ; cette étude qui repose sur les propriétés du trinôme est excellente et sert de modèle pour la construction des courbes d'ordre supérieur.

Elle fournit des caractères propres à distinguer les différentes lignes du second ordre, mais on a tort d'en déduire une classification sans s'être assuré que ces caractères distinctifs sont suffisants pour définir des familles naturelles. Le caractère fondamental est tiré de la nature de Δ_2 ; on range dans un même groupe les lignes qui peuvent être homothétiques ; on subdivise ensuite chaque groupe d'après la nature de Δ_3, mais sans donner la véritable signification géométrique de ce second caractère.

Nous montrerons que le caractère primordial doit être tiré de Δ_3 et non de Δ_2.

Remarque. — (Je désigne par Δ_2, Δ_3, Δ_4 les discriminants des formes à deux, trois et quatre variables : cette notation me paraît bien préférable à celle en usage d, Δ, H.)

Depuis quelques années, dans tous les cours, on classe aussi les coniques d'après la décomposition en carrés, mais on la fait de telle façon que la nouvelle méthode se réduit à la résolution légèrement déguisée de l'équation.

Au lieu de décomposer naturellement la forme complète rendue homogène, on s'occupe d'abord exclusivement des termes du second degré ; on constate avec satisfaction qu'on retrouve la classification déjà établie et plus tard on exalte encore la perfection de celle-ci en montrant qu'elle concorde avec la théorie des centres.

Ce résultat est forcé ; on a dénaturé la décomposition en carrés pour retrouver l'ancienne classification des centres.

Les élèves ne sont généralement pas aussi satisfaits ; ils ne comprennent pas qu'on réunisse dans un même groupe l'hyperbole et deux droites qui se coupent, et tous disent qu'il y a pour eux deux sortes de lignes du second ordre : les vraies courbes et les systèmes de droites.

Nous ajouterons que la terminologie est mauvaise : on place dans un même *genre*, genre ellipse, par exemple, l'ellipse qui n'a pas de point double et un couple de deux droites qui en a un.

Que doit penser un élève à qui l'on définit le *genre* d'une courbe ?

Classification naturelle des lignes du second ordre. — Nous devons d'abord chercher le caractère *algébrique* fondamental des formes quadratiques.

Toutes les propriétés de ces formes résultent des deux théorèmes suivants :

I. Toute forme quadratique à n variables est décomposable en une somme algébrique de n carrés ou de moins de n carrés indépendants.

II. $$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z.$$

Le premier théorème conduit immédiatement à distinguer trois familles.

Première famille	$\Delta_3 \gtrless 0$	3 carrés,
Deuxième famille	$\Delta_3 = 0$	2 carrés,
Troisième famille	$\Delta_3 = 0$ Mineurs du premier ordre nuls.	1 carré.

La nature de Δ_3 fournit une classification algébrique, simple et précise. Ce caractère a-t-il une signification géométrique importante ? Réunit-il dans une même famille des figures ayant les mêmes propriétés ?

Dire que $\Delta_3 = 0$, c'est dire qu'il existe un système de valeurs d'x, y, z, non toutes nulles, vérifiant à la fois les équations

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0 \quad f'_z = 0$$

C'est donc dire qu'il y a un point double à distance finie ou infinie.

Première famille	3 carrés	Pas de point double,
Deuxième famille	2 carrés	Un point double,
Troisième famille	1 carré	Une ligne de points doubles.

La considération des points doubles fait rentrer la classification des coniques dans celle des courbes en général, puisqu'elle est basée comme elle sur le nombre des points doubles, sur le *genre*.

Montrons que la décomposition en carrés a autant d'importance au point de vue géométrique qu'au point de vue algébrique.

Les théories des tangentes, des centres, des diamètres, des axes, des foyers sont les conséquences d'une théorie unique, celle des *polaires*.

Cette théorie domine toutes les autres, elle les comprend toutes ; c'est donc elle qui doit fournir, au point de vue géométrique, le caractère fondamental pour la classification.

Or la décomposition en carrés entraîne l'existence des triangles conjugués, les propriétés des polaires, des droites conjuguées, des diamètres, des axes, des foyers, c'est-à-dire toutes les propriétés des coniques.

Il nous reste à prouver que tous les coniques d'une famille ont un ensemble de propriétés bien définies, que ces propriétés varient d'une famille à l'autre.

Première famille. — Chaque point a une polaire unique, chaque droite a un pôle unique, chaque point de la courbe a une tangente unique. La droite de l'infini a un pôle unique, le centre. Chaque point de l'infini a une polaire unique, c'est-à-dire qu'à toute direction de corde correspond un diamètre.

D'un point quelconque on peut mener deux tangentes. Chaque courbe a quatre foyers.

Deuxième famille. — La présence d'un point double modifie profondément les propriétés des polaires.

La polaire du point double est indéterminée.

La polaire d'un point quelconque passe par le point double.

Tous les points d'une droite passant par le point double ont même polaire.

Les mêmes théorèmes s'appliquent aux diamètres, aux tangentes.

Troisième famille. — Les mêmes théorèmes s'appliquent à chaque point de la ligne des points doubles.

Remarque. — La décomposition en carrés de l'ensemble de la forme est la seule classification intéressante en coordonnées trilinéaires et tangentielles.

Enfin cette classification convient également aux coniques à coefficients imaginaires.

Pour terminer la classification, on subdivisera les familles en espèces, d'après la nature des termes du second degré.

Première famille, $\Delta_3 \lessgtr 0$:
- $\Delta_2 < 0$ Hyperbole
- $\Delta_2 = 0$ Parabole
- $\Delta_2 > 0$ Espèce elliptique :
  - $A\Delta_3 < 0$ Ellipse réelle,
  - $A\Delta_3 > 0$ Ellipse imaginaire.

Deuxième famille, $\Delta_3 = 0$, 1 point double :
- $\Delta_2 < 0$ Couple hyperbolique,
- $\Delta_2 = 0$ Couple parabolique réel ou imaginaire,
- $\Delta_2 > 0$ Couple elliptique.

Troisième famille, $\Delta_3 = 0$, Mineurs premier ordre nuls :
- Droite double.

Classification des surfaces du second ordre. — On peut essayer de défendre la classification actuelle des coniques, en disant que dans chaque groupe on trouve des figures qui peuvent être homothétiques.

Celle des surfaces présente le plus grand désordre et il n'y a aucun argument à fournir en sa faveur, autre que l'habitude.

On trouve placés dans des groupes différents les cônes et les cylindres qui ont la même définition ; on ne peut invoquer l'homothétie, car le cylindre elliptique et le paraboloïde elliptique ne sont pas dans la même classe, tandis que les deux paraboloïdes sont réunis; la décomposition en carrés est également méconnue ; le cône qui correspond à trois carrés est avec les surfaces qui en ont quatre.

Appliquons radicalement la décomposition en carrés, et nous retrouverons la simplicité, l'unité déjà observées dans la classification des coniques.

Première famille. $\Delta_4 \gtrless 0$. Pas de point double. 4 carrés.

- $\Delta_3 \lessgtr 0$ Espèce hyperbolique
  - Hyperboloïde à 1 nappe.
  - Hyperboloïde à 2 nappes.
- $AA' - B''^2 < 0$
- $\Delta_3 = 0$ Espèce parabolique
  - Paraboloïde hyperbolique.
  - Paraboloïde elliptique.
- $A\Delta_3 > 0$ Espèce elliptique
  - Ellipsoïde réel.
  - Ellipsoïde imaginaire.
- $AA' - B''^2 > 0$

Deuxième famille. $\Delta_4 = 0$. 1 point double. 3 carrés.

- $A\Delta_3 < 0$ Cône réel.
- $A\Delta_3 > 0$ Cône imaginaire.
- $\Delta_3 = 0$
  - Cylindre hyperbolique.
  - Cylindre elliptique réel.
  - Cylindre elliptique imaginaire.
- $\Delta_3 = 0$, Mineurs du premier ordre nuls.
  - Cylindre parabolique.

Troisième famille. Ligne de points doubles.

- Couple hyperbolique de plans.
- Couple parabolique réel.
- Couple parabolique imaginaire.
- Couple elliptique.

Quatrième famille. Plan double.

On est frappé par la simplicité de cette classification; l'étude des plans polaires va achever de prouver combien elle est naturelle.

De plus, la considération des points doubles fait comprendre la cause des singularités que présentent les plans diamétraux dans les cylindres et les couples de plans ; leur présence permet de prévoir ce qui doit arriver et, au lieu d'une série de faits détachés que l'élève retient avec peine, on n'a plus qu'une suite de conséquences fort simples d'un fait unique.

Première famille. — Chaque point a un plan polaire unique ; chaque plan a un pôle unique. Il en résulte que chaque point de la surface à distance finie ou infinie a un plan tangent ; toute direction de corde a un plan diamétral ; le plan de l'infini a un pôle unique qui est le centre.

A toute droite correspond une droite conjuguée. A toute droite à l'infini Δ correspond une droite conjuguée unique qui est le diamètre conjugué des plans parallèles passant par Δ.

Deuxième famille. — Le plan polaire du point double est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque passe par le point double.

Si des points sont en ligne droite avec le point double, ils ont même plan polaire : — en particulier le plan tangent est tangent en tous les points de la génératrice.

Ces propriétés appartiennent aux cylindres qui ont leur point double à l'infini ; il en résulte que :

le plan diamétral conjugué de la direction des génératrices, c'est-à-dire le plan polaire du point double est indéterminé ;

si deux directions de cordes déterminent un plan parallèle à la direction des génératrices, elles ont même plan diamétral.

En effet, les points à l'infini de ces deux directions sont en ligne droite avec le point double ; donc ils ont même plan polaire.

Troisième famille. — L'intersection des deux plans du couple est une ligne de points doubles et on peut appliquer à chacun d'eux tous les résultats précédents.

Le plan polaire d'un point quelconque de la ligne des points doubles est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque passe par la ligne des points doubles.

Quatrième famille. — Le plan polaire d'un point quelconque du plan double est indéterminé.

Le plan polaire d'un point quelconque se confond avec le plan double.

Chasles regardait comme le meilleur critérium d'une méthode le fait qu'elle s'appliquait aussi facilement à la Géométrie plane qu'au problème correspondant de la Géométrie de l'espace ; il est impossible de ne pas reconnaître, qu'à ce point de vue, la nouvelle classification est parfaite.

A. Poussart (Paris).

UNE PREMIÈRE LEÇON DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

On sait quelles difficultés rencontrent les commençants lorsque, après avoir considéré un système de deux plans de projection, ils font le rabattement du plan vertical sur le plan horizontal, rabattement destiné à donner l'épure.

On sait aussi quels inconvénients entraîne la considération, pendant la plus grande partie du cours, d'un système unique de deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical : les élèves n'ont pas le temps de se familiariser avec la méthode des changements de plans ; et puis il y a aussi les problèmes insolubles, momentanément, parce que telle droite est de profil, alors le professeur est forcé de dire à ses élèves : vous verrez cela plus tard.

Qu'on le veuille ou non, la considération de plus de deux plans s'impose dès le début, et par conséquent il en est de même pour les changements de plans : on peut donner encore, entre autres raisons, la nécessité où se trouve l'artisan le moins instruit de dessiner un plan et deux élévations pour représenter l'objet le plus simple.

Tout cela a été signalé depuis longtemps. Tout récemment, M. Laisant, dans son très intéressant ouvrage : *La Mathématique*, insiste sur ce fait qu'il ne faut pas « rendre l'élève esclave de deux plans de projection et d'une ligne de terre invariablement tracée ».

Du reste, dans plusieurs traités, on a cherché à éviter, par différents procédés, les difficultés et les inconvénients dont il vient d'être question. Voici une méthode simple qui a pour elle une expérience continue de plusieurs années avec des élèves de mathématiques élémentaires ; elle permet de passer, sans rabattement, de la figure de l'espace à l'épure ; elle permet aussi d'éviter les inconvénients d'un système unique de deux plans de projection.

1. — On sait que d'un point M on peut mener à un plan P une perpendiculaire et une seule (5e livre de Géométrie). Le pied de cette perpendiculaire est la *projection* du point M sur le plan P (1). La perpendiculaire est la *projetante* du point sur le plan.

2. — Soient maintenant (fig. 1) :

— une figure formée de points A, B, C, D,... et réduite, s'il le faut, à une échelle déterminée ;

— un plan horizontal, H, formé par une feuille de papier ;

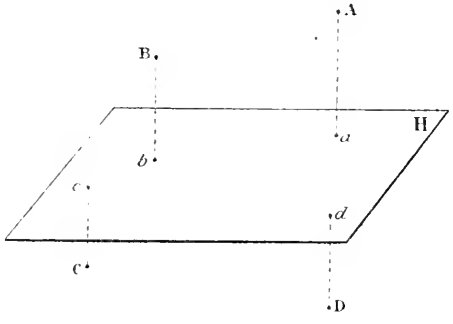


Fig. 1.

— enfin un observateur dont l'*œil* est au-dessus du plan H et qui regarde la figure ABCD...

Chacun des points A, B, C, D,...

1° n'a qu'une projection a, b, c, d,...

2° n'a qu'une distance au plan H (*cote*) ;

(1) Il faudrait dire ici : *projection orthogonale*, mais comme, dans la suite de cet article, on n'aura à considérer que des projections orthogonales, on dira *projection*, tout court.

3° enfin, chacun des points est, par rapport à l'observateur, soit au-dessus du plan H, soit au-dessous. Il résulte de là que deux points différents donnent des résultats qui diffèrent par l'un au moins des trois éléments : projection, cote, sens. Par conséquent, à une figure donnée ABCD....., de l'espace, correspond une figure plane *abcd*..., tracée sur H, où l'on associe à chaque point *a*, *b*, *c*, *d*,... sa cote et le sens dans lequel elle est comptée.

Pour que ces indications soient nettes, *on peut* (fig. 2) tracer

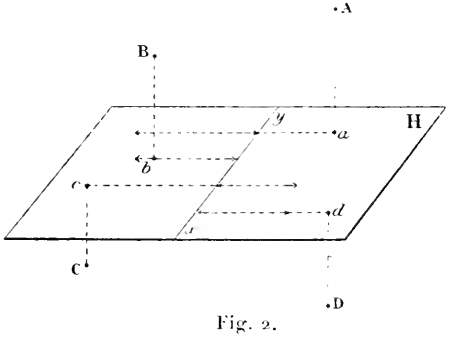


Fig. 2.

une droite quelconque *xy* dans le plan H, puis mener par *a*, *b*, *c*, *d*,... des perpendiculaires à *xy* et prendre les cotes, sur ces perpendiculaires, à partir de *xy* :

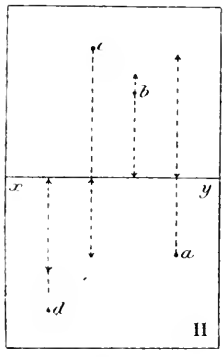


Fig. 3.

au-dessus de *xy*, pour les points situés *au-dessus* de H,

au-dessous de *xy*, pour les points situés *au-dessous* de H,

l'observateur (qui n'est autre que l'opérateur) lisant toujours *xy* de gauche à droite.

(Pour plus de clarté, les cotes prises dans le plan H sont indiquées par ———).

Maintenant, si l'on enlève la figure ABCD... de l'espace et que l'on considère seulement les tracés faits sur la feuille H, on a une *épure* (fig. 3) et l'on voit qu'à une figure de l'espace correspond une épure et une seule.

Réciproquement, à une épure donnée correspond une figure de l'espace et une seule. Pour le montrer, on place horizontale-

ment la feuille H contenant l'épure — par exemple, la feuille de la figure 3 — les tracés en dessus, puis on mène par $a, b, c, d, \ldots$ des perpendiculaires à H et on prend les cotes :

au-dessus de H si, dans l'épure, elles étaient *au-dessus* de xy,
au-dessous de H si, dans l'épure, elles étaient *au-dessous* de xy,

en lisant toujours xy de gauche à droite. On retrouve évidemment ainsi la figure ABCD... de l'espace (fig. 2).

3. — La droite xy a été prise quelconque dans le plan H de la figure 1 ; si l'on considère le plan vertical V passant par xy, il sera également quelconque. — Soient a', b', c', d', ... (fig. 4) les

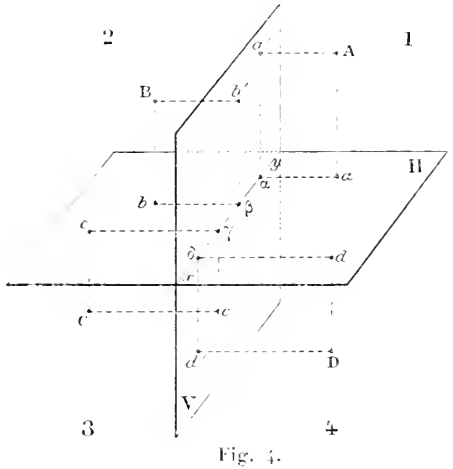


Fig. 4.

projections des points A, B, C, D,... sur V. Les longueurs $a'A$, $b'B$, $c'C$, $d'D$, ... sont les *éloignements* des points A, B, C, D, ... Les points $a, b, c, d, \ldots$ sont les *projections horizontales* des points A, B, C, D, ... et les points $a', b', c', d', \ldots$ sont les *projections verticales* de A, B, C, D, ... La droite xy est la *ligne de terre* relative aux deux plans de projection H et V considérés.

Si l'on détermine les intersections, avec H et V, des plans aAa', bBb', ... les quadrilatères $Aa\alpha a'$, $Bb\beta b'$, ... sont des rectangles. Par exemple $Aa\alpha a'$: Aa et Aa' respectivement perpendiculaires à H et V sont respectivement perpendiculaires à αa et $\alpha a'$, donc $a = a' = 1\ dr.$; d'autre part, le plan aAa' étant perpendiculaire

à H et V (puisqu'il passe par des perpendiculaires à ces plans) est par conséquent perpendiculaire à xy ; il détermine donc le rectiligne $a\alpha a'$ du dièdre correspondant, et, comme ce dièdre est droit, $a\alpha a' = 1\ dr.$; donc $\Lambda a\alpha a'$ est un rectangle. On déduit de là que $a\Lambda = \alpha a'$ et $a'\Lambda = \alpha a$, et, comme αa et $\alpha a'$ sont perpendiculaires à xy, on peut dire que les cotes sont égales aux distances des projections verticales à xy, et que les éloignements sont égaux aux distances des projections horizontales à xy.

Par conséquent la figure 3 représente à la fois les tracés faits sur H et V à condition que :

1° l'on mette a', b', c', d', ... aux extrémités des cotes (extrémités non situées sur xy) et que :

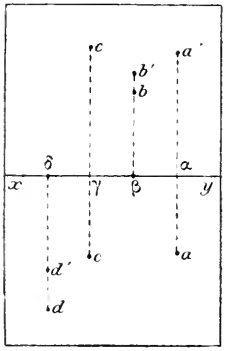


Fig. 5.

2° l'on considère les éloignements comme devant être pris :

au-dessous de xy, pour les points situés *en avant* de V,

au-dessus de xy, pour les points situés *en arrière* de V,

par rapport à un observateur ayant l'œil au-dessus du plan horizontal, regardant la figure ABCD ... et le plan V et enfin lisant toujours xy de gauche à droite (fig. 5).

Ainsi, à une figure de l'espace, ABCD ..., correspond un ensemble unique de deux projections sur deux plans perpendiculaires H et V, et telles que les deux projections d'un même point de l'espace sont sur une même perpendiculaire à xy (*ligne de rappel*).

Réciproquement, étant donnée une épure formée par des couples de points aa', bb', ... tels que les deux points d'un même couple sont sur une même ligne de rappel, à cette épure correspond une figure de l'espace et une seule. La démonstration de ce fait résulte de ce qui a été dit pour le plan H considéré seul, mais on peut en donner une démonstration directe. Soit donc l'épure donnée par la figure 5 : on imagine deux feuilles identiques à la feuille 5 et on les place perpendiculairement l'une à l'autre de façon que les deux droites xy coïncident ainsi que les deux points α, les deux points β, ... (fig. 4) ; on mène par a et a'

les perpendiculaires respectives à H et à V, ces deux droites sont dans un même plan (le plan $a x a'$) et dans ce plan elles sont perpendiculaires à deux droites qui se coupent, donc elles se coupent elles-mêmes et en un point qui n'est autre que le point A. Les autres points B, C, D, ... sont reproduits de même.

4. — En résumé, la figure 5 peut être considérée à un double point de vue : elle représente les projections de la figure ABCD... soit sur un plan horizontal H unique, soit sur un système de deux plans, l'un, horizontal, l'autre, vertical.

Ainsi, sans avoir fait de rabattement, on a l'épure d'une figure de l'espace sur deux plans perpendiculaires. Les élèves ont donc constamment devant les yeux soit la figure avec l'ensemble des deux plans, soit l'ensemble seul des deux plans, soit enfin le plan horizontal seul, c'est-à dire l'épure, et, par conséquent ils voient constamment la figure *en rapport* avec les deux plans ou avec un seul. D'ailleurs savoir isoler les plans les uns des autres est avantageux dans la considération des parties des traces de surfaces situées sur la partie postérieure du plan horizontal ou sur la partie inférieure du plan vertical ; cela est avantageux encore dans les questions d'ombres portées sur les plans de projection...

De plus, ayant commencé par considérer un plan horizontal seul, puis ayant pris un plan vertical quelconque, les élèves en prendront tout aussi facilement plusieurs autres et formuleront d'eux-mêmes la règle du changement de plan vertical.

Ces préliminaires posés, on peut continuer de la manière suivante.

5. — Quand on a pris un système de deux plans perpendiculaires V et H, on a à considérer quatre dièdres qu'il est commode de numéroter :

1^er^, celui où est l'œil de l'observateur,
2^e^, le dièdre adjacent supérieur,
3^e^, celui qui est sous le 2^e^,
4^e^, celui qui est sous le 1^er^ (fig. 4).

De même, pour simplifier l'écriture, après avoir remarqué que

la ligne de terre divise V et H en deux demi-plans, on désigne par

H_a, le demi-plan horizontal antérieur,
H_p, le demi-plan horizontal postérieur,
V_s, le demi-plan vertical supérieur,
V_i, le demi-plan vertical inférieur.

Il faut *voir*, au-dessous de la ligne de terre, ou bien H_a seul, ou bien ensemble H_a et V_i; au-dessus, ou bien H_p seul, ou bien ensemble H_p et V_s.

6. — Étant donné un point d'un certain dièdre par sa cote et son éloignement (en nombres ou bien en longueurs déterminées par des portions de droites) il faut pouvoir immédiatement en faire l'épure. Réciproquement, étant données, dans une épure, les deux projections d'un point, il faut pouvoir dire sans hésiter dans quel dièdre il se trouve.

Les règles suivantes, qu'il faut savoir imperturbablement, sont très commodes à appliquer ; elles sont du reste évidentes. Si un point est dans 1 ou 3, les deux projections sont de part et d'autre de la ligne de terre :

dans 1, la projection verticale est au-dessus de la ligne de terre,

dans 3, la projection verticale est au-dessous de la ligne de terre.

Si un point est dans 2 ou 4, les deux projections sont d'un même côté de la ligne de terre :

dans 2, elles sont au-dessus de la ligne de terre,

dans 4, elles sont au-dessous de la ligne de terre.

Les réciproques sont vraies.

Quand on a deux plans de projection, un point a deux projections ; aussi, au lieu de dire : le point A, le point B, ..., on dit : *le point aa'*, *le point bb'*, ... La lettre accentuée désigne toujours la projection verticale.

Ainsi (fig. 4 et 5), le point A est dans 1, le point B est dans 2, le point C est dans 3 et le point D dans 4.

On voit bien maintenant l'importance qu'il y a de lire toujours *xy* dans le même sens (par exemple, de gauche à droite,

ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent ; on fera tourner la feuille sur elle-même, si cela est nécessaire, et, pour lire plus commodément, on imaginera que chaque lettre a également tourné sur elle-

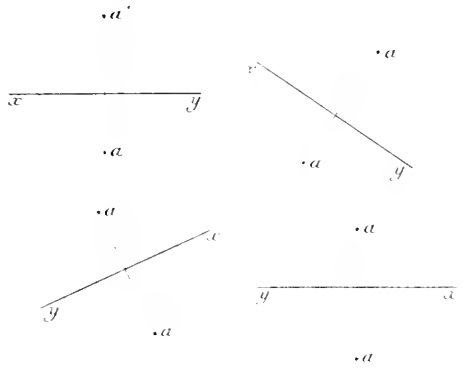
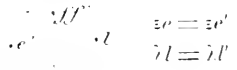


Fig. 6.

même. — Dans les quatre épures suivantes (fig. 6), on a un point de 1.

7. — Une petite remarque est maintenant utile. Si un point est à égale distance des deux plans H et V choisis, c'est-à-dire s'il appartient à l'un des deux bissecteurs des quatre dièdres, sa cote et son éloignement sont égaux et par suite ses projections sont à égale distance de xy. Elles sont donc confondues si le point appartient aux dièdres 2 ou 4.



Les réciproques sont vraies.

Le point E (fig. 7), est dans le premier bissecteur (dièdre 1) ;

Le point F est dans le second bissecteur (dièdre 2) ;

Le point L est dans le premier bissecteur (dièdre 3) ;

Le point O est dans le second bissecteur (dièdre 4).

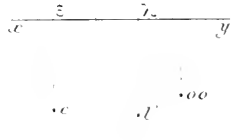


Fig. 7.

8. — Après avoir pris un point dans chacun des quatre dièdres, il reste à faire l'épure d'un point pris dans l'un des plans de projection. Pour cela, on remarquera que si un point est dans le plan horizontal,

1° sa cote étant nulle, sa projection verticale est sur la ligne de terre ;

2° sa projection horizontale est le point lui-même, donc elle est (fig. 8 et 9)

au-dessous de la ligne de terre, si le point est dans H_a (point I),

au-dessus de la ligne de terre, si le point est dans H_p (point J).

Si un point est dans le plan vertical,

1° son éloignement étant nul, sa projection horizontale est sur la ligne de terre ;

2° sa projection verticale est le point lui-même, donc elle est :

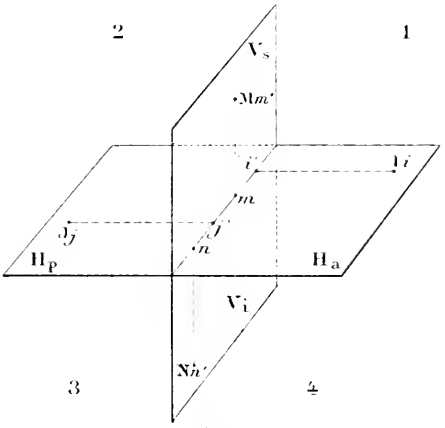


Fig. 8.

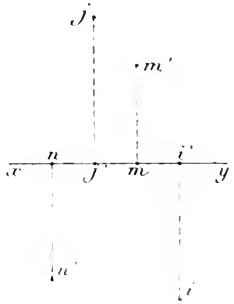


Fig. 9.

au-dessus de la ligne de terre, si le point est dans V_s (point M) ;

au-dessous de la ligne de terre, si le point est dans V_i (point N).

Les réciproques sont vraies.

Comme cas très particulier, il faut considérer un point appartenant à la fois à H et V, c'est-à-dire à la ligne de terre : ses deux projections sont évidemment confondues sur la ligne de terre.

A cet endroit du cours, il est indispensable que les élèves fassent des exercices nombreux sur les diverses positions du point par rapport à un système de deux plans perpendiculaires H et V. On leur fera, par exemple, exécuter de petites épures de points. Ces points leur seront donnés chacun par son dièdre ou son demi-plan accompagné de la cote et de l'éloignement....

9. — Au début de cette étude, on a projeté une figure ABCD... sur un plan horizontal H, puis, pour avoir une figure plane, on a porté les cotes dans ce plan et à partir d'une droite xy quelconque, ce qui a donné un premier mode de représentation. Ensuite, on a introduit un plan vertical V, quelconque, puisqu'il dépend de xy, ce qui a donné un second mode de représentation identique au premier.

Or, il est évident que, quelle que soit cette droite xy et par suite quel que soit ce plan V, la projection horizontale $abcd$... et les cotes restent invariables (puisque projection et cotes sont relatives au plan H) ; seuls, la projection $a'b'c'd'$... et les éloignements changent quand V change (cependant les projections sont égales pour deux plans verticaux parallèles entre eux). Par conséquent, ayant choisi d'abord un plan vertical V, on peut passer de l'épure relative au système HxyV à l'épure relative à un autre système $Hx_1y_1V_1$ sans avoir recours à la figure de l'espace. Voici la règle pratique évidente pour chaque point :

1re, la projection horizontale ne change pas ;

2e, la cote ne change pas :

3e, la nouvelle projection verticale vient sur une perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre x_1y_1, à une distance égale, et au-dessus de x_1y_1 si l'ancienne projection verticale est au-dessus de xy, au-dessous de x_1y_1 si l'ancienne projection verticale est au-dessous de xy (fig. 10).

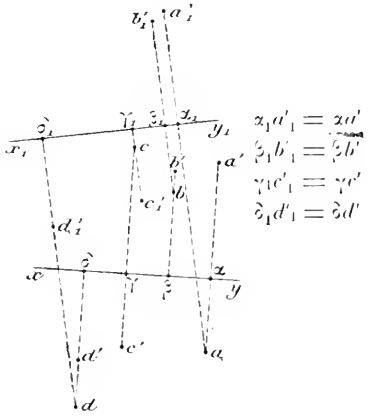


Fig. 10.

L'ancienne projection verticale de la figure ABCD... est $a'b'c'd'$..., et la nouvelle projection verticale est $a'_1b'_1c'_1d'_1$....

Bien entendu, on lit toujours x_1y_1 de gauche à droite, et l'observateur aura dû, en général, changer de position, mais en remplissant toujours les conditions connues : son œil est au-dessus de A et il regarde la figure et le plan V_1.

En réalité, par suite de l'identité des deux modes de représen-

tation, on pourrait dire qu'un changement de plan se réduit à un simple *changement de droite*.

Puisqu'on a un autre plan vertical V_1, les dièdres de V et de H ne sont pas conservés tels quels : les dièdres supérieurs de même numéro empiètent généralement l'un sur l'autre, et il en est de même des dièdres inférieurs. Par conséquent, un point peut *rester* dans le dièdre où il était ou bien *passer* dans un autre : par exemple, dans le cas particulier de l'épure de la figure 9,

le point A est resté dans le premier dièdre,
le point B a passé du deuxième dans le premier,
le point C a passé du troisième dans le quatrième,
le point D est resté dans le quatrième.

En même temps que les dièdres changent, certaines propriétés se perdent : par exemple la propriété d'être dans un bissecteur, dans un plan vertical de projection,...

Ici encore, il est bon de faire de nombreux exercices avec des plans V_2, V_3, ... placés de manières variées et dont un, au moins, est parallèle au plan V. On pourra prendre ces plans au hasard ou les déterminer de façon à faire passer un point d'un dièdre dans un autre désigné d'avance. On peut enfin, si on le veut, déplacer le plan horizontal parallèlement à lui-même.

10. — On pourrait même parler du changement de plan horizontal, mais il est préférable de le rejeter à la théorie complète des changements de plans, car ce qui a été dit suffit jusque-là. En tout cas, on fera remarquer qu'on a, au début du cours, projeté une figure sur un certain plan horizontal H, puis, qu'on a introduit un plan vertical V quelconque ; mais qu'on aurait pu tout aussi bien commencer par projeter la figure sur un plan vertical V — au moyen des conventions connues — et introduire ensuite le plan horizontal H : les résultats auraient été les mêmes. On aurait même pu introduire un plan quelconque H_1, non horizontal au sens physique du mot, mais assujetti seulement à la condition d'être perpendiculaire au plan vertical et jouant par conséquent le même rôle que le plan H. Par analogie, on conserve à ce plan H_1 le nom de plan horizontal.

On *voit* donc le changement de plan horizontal tout aussi facilement que le changement de plan vertical.

On remarque, en passant, que la figure 5, qui représente les projections d'une figure

soit sur un plan horizontal H seul,

soit sur un système de deux plans H et V,

représente aussi la projection de la même figure sur un plan vertical V seul.

Peut-être trouvera-t-on trop chargée cette étude du point, mais on peut y mettre tout le temps nécessaire. Il faut bien se persuader en effet qu'on n'insistera jamais assez sur ce sujet, et qu'il ne faut pas se hâter de passer à l'étude de la droite sous le prétexte très tentant qu'on y retrouvera le point : quand les élèves ont à apprendre la droite, ils ne voient plus le point, et, s'ils ne *savent* pas suffisamment celui-ci, ils ne peuvent même pas résoudre les questions les plus simples sur la droite, comme, par exemple : trouver les traces d'une droite connaissant ses projections.

Du reste, cette complication de la première leçon est plus apparente que réelle : les parties qui la composent se trouvent dans tous les cours à différents endroits. Mais, faite ainsi, elle donne immédiatement aux élèves une sensation plus exacte de ce qu'est la Géométrie descriptive, et cela est une large compensation ; si l'on compte en outre les avantages directs de clarté et de commodité qui s'y trouvent et qui en découlent, on verra que, somme toute, on a gagné en rapidité et que les élèves savent mieux. — Il faudrait évidemment, pour s'en rendre très bien compte, développer le cours élémentaire presque en entier, mais l'ensemble qui précède suffit à en donner une idée.

G. Budelot (Melun).

CHRONIQUE

Compte rendu de la huitième réunion annuelle de l'Association allemande pour l'avancement de l'Enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

Cette importante Association, qui compte aujourd'hui près de 800 membres, s'est réunie à Hanovre, du 23 au 26 mai, sous la présidence de M. le professeur PIETZKER. Les séances ont presque toutes été tenues dans les locaux de l'Ecole technique supérieure, dont les installations, les laboratoires et les collections ont offert un grand intérêt pour les participants, universitaires pour la plupart. Nous ne dirons rien des réunions familières pleines d'entrain dans lesquelles on a salué avec joie le rapprochement de plus en plus accentué entre les Ecoles polytechniques et les Universités, ni des excursions scientifiques faites dans les environs. Quant à la séance administrative, nous nous bornerons à mentionner les deux *résolutions votées par l'Assemblée :*

1° L'Association se déclare hautement satisfaite du nouveau décret qui règle le plan d'étude des candidats à l'enseignement en Prusse ; elle approuve tout particulièrement cette heureuse innovation grâce à laquelle il sera tenu compte des quelques semestres passés dans une école technique supérieure.

2° L'Association exprime le vœu que l'on mette à la disposition des maîtres secondaires des cours de vacances organisés dans les établissements techniques supérieurs, et elle demande que dans le bulletin de la société, il soit publié une étude des programmes des Ecoles techniques examinés au point de vue du récent décret.

Conformément au but de l'Association, les communications présentées dans les différentes séances se rattachent à l'enseignement des mathématiques, du dessin technique et des sciences naturelles, ces enseignements étant envisagés quant à leur tendance, leur étendue et leur méthode. Toutefois il a aussi été présenté un certain nombre de travaux d'un caractère purement scientifique, sans rapport direct avec l'enseignement ; ce sont ceux de MM. RUNGE, SEUBERT et KOHLRAUSCH.

Dans la première séance générale, M. le professeur KIEPERT a fait une conférence d'un grand intérêt sur une question dont il s'occupe depuis plusieurs années ; il s'agit de l'introduction de *la science de l'actuaire* dans l'enseignement supérieur. Cette innovation s'impose de plus en plus, tant à cause de l'utilité pratique de cette branche que par

son importance au point de vue économique. La nécessité d'un pareil enseignement est démontrée, d'un côté, par le fait que, jusqu'ici, les actuaires ont été livrés à eux-mêmes pour ce qui est de la préparation à leur carrière, de l'autre, par le succès qu'a rencontré à Göttingue le séminaire spécialement consacré à la technique de l'assurance. Mais de plus, on permettra ainsi aux mathématiciens qui ne se sentent pas attirés vers la carrière de l'enseignement, d'embrasser une profession souvent largement rémunérée.

M. Kiepert présente d'abord un aperçu historique de la science de l'actuaire et passe en revue les divers systèmes successivement adoptés, jusqu'à celui des primes actuellement en vigueur. Il examine en même temps la question des tables de mortalité établies aux différentes époques : Brune et Süssmilch (1761), Halley et Neumann (1691), Jean de Witt (1671), et dont on trouve déjà des traces chez Vulpian (200 av. J.-C.). La table actuellement en vigueur en Allemagne a été dressée en 1883 d'après les observations faites par 23 compagnies. Les sommes immenses qui se trouvent engagées dans les assurances, sous les formes les plus diverses, sont une preuve certaine de la haute importance au point de vue économique de la science de l'actuaire. Le conférencier mentionne, à titre d'exemple, que les sommes assurées actuellement auprès des 43 institutions allemandes atteignent le chiffre de 6 milliards de marks ; les capitaux réunis à cet effet se montent à 2 milliards.

Dans la seconde partie de sa conférence, M. Kiepert aborde la théorie mathématique des assurances ; il accompagne son exposé d'exemples destinés à montrer qu'il ne s'agit pas toujours de simples questions d'Arithmétique, ainsi qu'on le suppose quelquefois dans le public. Il explique enfin quelles sont les sources de bénéfices des compagnies : elles se composent des économies réalisées dans les frais d'administration, d'un meilleur rendement des intérêts et d'une mortalité des assurés moindre que celle prévue par les tables. Ce dernier avantage peut être atteint grâce à la sélection qui s'opère dans l'admission des assurés.

A l'ordre du jour de la deuxième séance générale figurait une conférence de son président, intitulée : *Du système et de la méthode dans l'enseignement des sciences exactes*. Cette question avait été soulevée à l'un des précédents congrès. M. Pietzker l'a reprise pour l'examiner dans son ensemble à un point de vue général. Il définit d'abord le contraste entre les enseignements systématique et méthodique. Dans le premier, l'examen du sujet n'est abordé qu'après avoir exposé les propriétés fondamentales, les définitions et le dogme, en partant chaque fois de connaissances précédemment acquises et en ne considérant les propriétés particulières que dans l'ensemble du système. Dans l'enseignement méthodique, par contre, il est tenu compte des facultés et de l'état des connaissances de l'élève, ainsi que de la subjection du maître et de l'élève. M. Pietzker donne naturellement la préférence à cette dernière

méthode, mais il estime que si l'étude systématique ne doit pas servir de point de départ, elle doit toutefois former la clôture de l'enseignement. Cela est possible notamment pour les Mathématiques, dont le but à l'école est de présenter l'image d'un système parfait. Cette branche s'y prête précisément mieux que toute autre. Elle ne doit pas viser uniquement les connaissances techniques ; elle doit, au contraire, être utilisée comme un moyen en vue de l'acquisition des connaissances générales. En terminant, le conférencier résume sa manière de voir dans les trois propositions suivantes :

1° L'enseignement des sciences exactes n'a pas encore été transformé de son caractère systématique en une forme méthodique, autant que cela serait désirable.

2° Dans l'enseignement méthodique, l'emploi d'un élément subjectif se trouve justifié.

3° Les programmes officiels, les manuels et les recueils d'exercices doivent être tels que la méthode puisse s'adapter à la personnalité du maître.

Les autres travaux présentés au congrès sont relatifs à des branches spéciales.

M. Rodenberg a parlé de la délimitation du domaine de l'*enseignement de la géométrie descriptive* dans les établissements secondaires supérieurs. Selon lui on doit accorder une large place à la partie propédeutique. Il s'agit avant tout d'éveiller et de développer scientifiquement la conception de l'espace. A cet effet on aura recours à des modèles de solides géométriques simples ; il suffira souvent de représenter ceux-ci par leurs arêtes à l'aide de fils de fer. Il serait désirable, en outre, de faire une étude comparée des représentations d'un corps dans les différents modes de projection.

M. Habenicht a examiné la question suivante : *dans quelle mesure peut-on faciliter l'enseignement de la Géométrie, en particulier celui des premières notions ?* (1) En s'appuyant sur son expérience personnelle, il estime que les premières notions géométriques peuvent être données sous forme de jeu. Il ne faut pas fatiguer l'esprit de l'enfant et le décourager par des difficultés. L'introduction à la Géométrie doit être aussi simple que possible. Le point de départ doit être choisi, non pas dans les figures abstraites, mais dans les formes géométriques que présentent les corps placés dans l'entourage de l'enfant. On s'abstiendra de commencer par des définitions ; celles-ci doivent être déduites d'une étude intuitive de l'objet. Dès le début on exercera l'œil et la main dans la détermination des mesures. Le segment mesuré conduira à la notion de droite ; l'angle sera présenté par la considération d'une rotation. Le pliage des figures facilitera les considérations géométriques. Il y aura

(1) A rapprocher de deux conférences faites à Paris, l'une par M. Duclaux, l'autre par M. Laisant ; voir l'*Enseignement Mathematique*, n° 3, p. 233.

Note de la Rédaction.

avantage à faire dessiner les figures sous dictée. Dans ce premier enseignement, le maître doit insister sur le rôle utilitaire ; il doit se servir de grandeurs concrètes et de nombres déterminés, et écarter l'usage de lettres dans les calculs. Dans la similitude on pourra faire intervenir les traits du visage et rechercher les ressemblances.

M. Richter indique comment, grâce à des exercices convenablement choisis, l'art nautique peut être pris en considération dans l'enseignement des sciences mathématiques et physiques.

Signalons enfin deux communications qui se rattachent au domaine des sciences physiques et chimiques.

L'une, présentée par M. Braüer, est relative à la mesure dans l'enseignement de la chimie. Elle met en évidence la possibilité de démontrer aux élèves certaines lois quantitatives, en ayant simplement recours au matériel que possède le laboratoire d'un établissement secondaire. Cette conférence a eu lieu dans l'amphithéâtre du *Realgymnasium* ; elle était accompagnée de nombreuses expériences.

L'autre communication, due à M. Schmidt a eu pour objet un appareil très ingénieux, destiné à rendre intuitives les notions et les lois les plus importantes de l'électricité. Cet appareil marque un progrès sérieux sur ceux qui, jusqu'ici, ont été construits dans ce but. Il est basé sur l'emploi d'un courant d'air, tandis que les autres font usage d'une pression d'eau. L'appareil de M. Schmidt a été construit par la maison Müller-Uri à Braunschweig, avec la collaboration de M. le professeur M. Möller.

O. Lang (Hanovre).

Les Congrès de Boulogne-sur-Mer et de Douvres.

Le Congrès de l'*Association française pour l'avancement des sciences* se tiendra cette année à Boulogne-sur-Mer, du 14 au 21 septembre, sous la présidence de M. Brouardel, membre de l'Institut et de l'Académie de médecine.

Cette date a été choisie de manière à faire concorder la réunion des savants français avec celle de l'*Association britannique pour l'avancement des sciences* qui tiendra sa session annuelle à Douvres, à la même époque, sous la présidence de M. Michael-Foster.

Les deux sociétés se réuniront deux fois en séance générale. Il a été convenu que l'Association française irait à Douvres se joindre à la British Association qui, à son tour, viendrait tenir une séance à Boulogne.

Nous avons sous les yeux le programme détaillé du Congrès de l'Association française ; nous en extrayons ce qui suit :

Jeudi 14 septembre. — Séance d'ouverture du Congrès. Réunion des Sections pour les élections des bureaux.

Le soir, réception par la Municipalité à l'Hôtel de Ville.

Vendredi 15 septembre. — Séances de Sections et visites industrielles.

Samedi 16 septembre. — Visite à l'Association britannique à Douvres. Départ le matin de Boulogne par le bateau spécial. A l'arrivée, division en deux groupes : l'un se rendant à Canterbury, pour répondre à l'invitation de cette ville, l'autre restant à Douvres. Retour dans la soirée à Boulogne.

Dimanche 17 septembre. — Excursion générale à Wimereux (laboratoire zoologique dirigé par M. le professeur Giard, installation des appareils de télégraphie sans fils, expériences de communication avec la station anglaise), le cap Gris-Nez, Marquise.

Lundi 18 septembre. — Séances de Sections et visites industrielles.

Mardi 19 septembre. — Le matin, séances de Sections. Dans l'après-midi, excursion à Calais, visite de la ville et d'une fabrique de dentelles.

Mercredi 20 septembre. — Le matin, séances de Sections et visites industrielles. L'après-midi, réunion de l'Assemblée générale pour l'élection du vice-président, du vice-secrétaire et le choix de la ville où se tiendra le Congrès de 1901.

Jeudi 21 septembre. — Réception de l'Association britannique. Inauguration de la statue de Duchenne (de Boulogne). Conférence sur Duchenne, par M. le Dr Brissaud, professeur à la Faculté de médecine de Paris, médecin de l'hôpital Saint-Antoine. Banquet offert aux membres de l'Association britannique.

Les vendredi 22, samedi 23, dimanche 24 septembre. — Excursion finale dans la région industrielle du Pas-de-Calais : Arras, Douai, Lens, Isbergues, Saint-Omer, Arques, Dunkerque.

Les séances des PREMIÈRE et DEUXIÈME SECTIONS (*Mathématiques, Astronomie, Géodésie* et *Mécanique*) seront présidées par M. COLLIGNON, inspecteur des ponts et chaussées, ancien président de l'Association. Parmi les communications annoncées pour ces séances, nous signalerons les suivantes :

A. BEGHIN (Roubaix) : Règle à calcul (modèle spécial) donnant une approximation deux fois plus grande que les autres modèles. — COLLIGNON (Paris) : 1° Durée du parcours des tangentes et des normales à une courbe, sous l'action de la pesanteur; 2° Sur les tours équidistantes destinées à la transmission des signaux optiques. — E. FONTANEAU (Limoges) : Sur l'intégration des équations de l'hydrodynamique. — M. FROLOW (Genève) : Sur la théorie des parallèles. — C.-A. LAISANT (Paris) : Aire d'une courbe gauche. — E. LEMOINE : 1° Quelques applications de la géométrographie; 2° Propositions relatives à la Géométrie du triangle.

Les séances de la SEIZIÈME SECTION (*Enseignement*) seront tenues sous la présidence de M. LEVASSEUR, membre de l'Institut, professeur au Collège de France.

M. Griess.

Le n° 17 (1er juin) de l'*Éducation mathématique* nous apporte la triste nouvelle de la mort de M. Griess, fondateur et principal rédacteur de ce journal, et professeur au Lycée Charlemagne, à Paris, décédé le 17 mai.

M. Griess était à peine âgé de quarante-deux ans; érudit et dévoué à la science, il avait traduit les *Fonctions elliptiques* de M. Greenhill, les *Leçons sur la Géométrie* de M. Klein, et l'*Algèbre supérieure* de M. Weber. Son caractère valait son talent, et ce savant ne comptait guère que des amis parmi ceux qui le connaissaient. Sa mort prématurée est une perte sérieuse pour l'enseignement et pour la science.

C'est bien cordialement que nous envoyons à notre confrère nos plus sincères condoléances, et que nous le prions de vouloir bien en transmettre la respectueuse expression à la famille si éprouvée qui vient de perdre son chef.

Les examens de l'École polytechnique en France.

Les examens écrits ont eu lieu vers le commencement de juin, et les épreuves orales ont commencé le 24 juin. Le nombre des candidats, qui, en 1898, s'était abaissé à 950, s'est légèrement relevé cette année. Il est environ de 1.000, se décomposant de la manière suivante : 600 à Paris, 400 dans les départements. Le nombre moyen des élèves admis à l'École polytechnique dans ces dernières années a été de 200 à 220. Ce nombre n'est pas encore officiellement fixé, mais beaucoup de personnes pensent qu'il sera supérieur à 200 (1).

C'est seulement dans les premiers jours de septembre que les examens se terminent, et la liste d'admission est habituellement publiée vers le 15 ou le 20 septembre.

Prix de l'Académie de Madrid.

L'Académie royale des sciences exactes, physiques et naturelles de Madrid vient de proclamer les noms des lauréats du Concours de mathématiques de 1897. Sur trois mémoires présentés, deux obtiennent un prix. Ce sont ceux de M. Gino Loria, professeur à l'Université de Gênes, et de M. Gomes Teixeira, professeur à l'École polytechnique de Porto.

L'autre mémoire obtient un accessit; il a pour auteur M. Joaquim de Vargas y Aguirre, de Salamanca.

Qu'il nous soit permis d'adresser à ces savants nos plus vives félicitations pour le succès académique qu'ils viennent de remporter.

---

(1) Le nombre des admissions vient d'être officiellement fixé à 220.

BIBLIOGRAPHIE

Dr G.-M. Testi. — **Corso di Matematiche** ad uso delle scuole secondarie superiori e più specialmente degli instituti tecnici. Volume I. *Arithmetica razionale :* seconda edizione, interamente rifatta. 1 vol. petit in-8°, 152 p. Prix : 2 fr. 60. Livorno, R. Guisti, 1898.

M. Testi vient de faire paraître une nouvelle édition du premier volume de son cours de Mathématiques, à l'usage des écoles secondaires supérieures et plus spécialement des institutions techniques.

Le cours complet comprend trois volumes traitant respectivement de l'Arithmétique, de l'Algèbre et de la Géométrie élémentaires. C'est une étude limitée aux premiers éléments, mais ayant pour but essentiel de présenter ceux-ci dans leur enchaînement logique ; on s'adresse donc ici à des élèves ayant déjà quelques connaissances mathématiques. L'auteur déclare dans une préface qu'il s'est efforcé « d'atteindre l'unité de méthode et la rigueur scientifique, tout en recherchant cette clarté d'exposition qui est la qualité indispensable d'un livre d'enseignement ».

La nouvelle édition de « l'Arithmétique rationnelle » offre diverses améliorations qui ont sensiblement diminué le nombre des pages du volume primitif, en y introduisant plus de brièveté et de clarté.

L'ouvrage, divisé en deux parties, débute par un rapide exposé des principes de logique et des méthodes de raisonnement dont il sera fait usage dans la suite : lois des inverses, analyse, synthèse, induction complète, etc. Il continue par la théorie des cinq premières opérations arithmétiques envisagées indépendamment de tout système de numération (l'extraction des racines est traitée plus tard, dans le cours d'Algèbre). On aborde ensuite la numération décimale et la pratique des quatre opérations usuelles. Quelques considérations sur la divisibilité, les nombres premiers, la détermination du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple, terminent cette première partie.

La deuxième partie, consacrée à l'étude des nombres fractionnaires, est rédigée selon l'ordre ordinaire des traités d'Arithmétique : propriétés générales des fractions, opérations usuelles sur des fractions, fractions décimales.

Tout en reconnaissant que ces notions sont généralement bien présentées, il me semble qu'en ce qui concerne la multiplication par une fraction M. Testi s'écarte passablement du but qu'il s'était assigné. Il élude l'explication qu'exige l'introduction du multiplicateur fractionnaire, en donnant de la multiplication la définition suivante :

« Multiplier un nombre a par un nombre b signifie déterminer un troisième nombre c, qui doit se déduire de a en opérant sur ce dernier nombre comme il faudrait opérer sur l'unité pour obtenir le multiplicateur b. »

« Il résulte de cette définition que multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{m}{n}$, c'est prendre « m fois la n^e partie de $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b.\,n}\right) m = \frac{am}{bn}. \text{ »}$$

C'est simple ; mais cela laisse quelque peu à désirer au double point de vue de la clarté et de la rigueur.

Il est vrai que nous touchons ici à une partie assez délicate de l'Arithmétique élémentaire ; c'est précisément une raison pour ne pas passer dessus comme chat sur braise.

L'extension de la notion de multiplication au cas où le multiplicateur est fractionnaire constitue l'une de ces inductions remarquables qui sont le propre, le génie même des Mathématiques. Il y a là une première généralisation importante qu'il faut mettre en pleine lumière, au lieu de la dissimuler sous une convention ou une définition plus ou moins habilement posée.

Pour introduire l'exposant fractionnaire, on montre comment l'on est conduit à représenter $\sqrt[n]{a^m}$ par $a^{\frac{m}{n}}$ lors même que m n'est pas divisible par n, et l'on justifie cette notation en démontrant que les règles de l'exposant entier s'appliquent aussi à l'exposant fractionnaire.

C'est d'une manière entièrement analogue qu'à mon avis on devrait procéder pour passer de la notion du multiplicateur entier à celle du multiplicateur fractionnaire.

Cette réserve faite, le livre de M. Testi peut rendre d'excellents services aux élèves auxquels il est destiné ; il me paraît cependant correspondre au programme des écoles normales plutôt qu'à celui des écoles techniques.

Lucien Baatard (Genève).

Dr H. Bork. — **Mathematische Hauptsätze für Gymnasien** : zweiter Theil : Pensum des Obergymnasiums ; zweite Auflage. 1 vol. in-8° 235 p. Prix : 2 marks 60. Dürr, Leipzig.

Ainsi que l'indique son titre, ce livre n'est pas un manuel proprement dit, mais un simple abrégé présentant sous forme condensée et dans un ordre convenable l'ensemble des connaissances mathématiques des écoles moyennes ; il renferme tout ce qui peut être confié à la mémoire de l'élève ou être facilement consulté par lui. Les différents sujets sont traités de manière à laisser au maître une certaine liberté quant à l'ordre qu'il adoptera pour son programme.

Les services que peut rendre un pareil abrégé dans l'enseignement moyen sont incontestables, aussi croyons-nous que ce livre sera le bienvenu de beaucoup de maîtres. Mais l'auteur dépasse encore ce programme en ce qu'il ajoute aux propositions de courtes démonstrations : de plus il fait suivre les parties importantes d'exemples bien choisis. L'exposition est excellente, et on ne peut que louer la brièveté et la concision des termes.

Pour ce qui concerne le choix des matières, l'auteur a dû, dans une certaine mesure, tenir compte du plan d'étude adopté en Prusse : ce livre

sera donc consulté avec intérêt même en dehors de l'Allemagne, parce qu'il permet de se faire une idée de l'état des connaissances mathématiques dans les Gymnases prussiens.

Afin de faciliter notre compte rendu dans ses détails, nous énoncerons d'abord les deux postulats suivants, concernant les mathématiques des écoles moyennes, postulats que l'on ne peut guère contredire :

1) L'école moyenne (Gymnase) doit se concentrer de préférence sur les parties des mathématiques qui sont de toute importance dans le domaine de la vie pratique, ou qui facilitent la compréhension des questions astronomiques, physiques et techniques.

2) Elle doit ensuite autant que possible s'efforcer de relier les théories et les propositions de façon que les propriétés et les formules obtenues dans les degrés inférieurs, retrouvent leur emploi dans les degrés supérieurs; par contre, les propositions qui ne satisfont pas à cette condition doivent être laissées de côté.

Sur cette base, nous approuvons l'auteur d'avoir négligé les équations de Diophante et les fractions continues.

L'*Arithmétique*, qui comprend les puissances, les logarithmes et les équations du second degré, est traitée avec toute la rigueur désirable, comme cela ne se voit guère dans un manuel; le paragraphe « de l'infini et du zéro » est fait d'une façon particulièrement excellente et originale, ainsi que les racines irrationnelles et ce qui s'y rattache.

La notion de fonction est introduite de bonne heure et d'une manière habile. Les propriétés fondamentales des séries infinies et de leur convergence sont présentées avec beaucoup de clarté. Mais c'est ici que commencent les difficultés. Selon l'auteur les séries exprimant e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ sont obtenues d'une façon élémentaire. Toutefois nous ferons observer à ce sujet, que cette soi-disante exposition élémentaire est beaucoup plus difficile que celle qui utilise les procédés ordinaires du calcul différentiel. Et en première ligne, le théorème de Moivre appartient déjà aux parties les plus épineuses des mathématiques élémentaires.

Les relations de la forme

$$\cos x + i \sin x = \lim \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \right)^n,$$

les calculs et conclusions qui s'y rapportent ne sont pas à la portée d'un élève du gymnase : les séries obtenues pour sin et cos lui apparaîtront toujours comme des résultats du hasard et non comme les conséquences d'une discussion bien déterminée. La formation de ces séries serait bien plus convaincante si l'on pouvait dire à l'élève : « Nous voulons déduire ces fonctions des propriétés qui nous sont connues, c'est-à-dire des théorèmes d'addition. » Le procédé pour l'égalité des coefficients est déjà préparé au § 27 par le théorème sur les conditions d'identité de deux fonctions entières. Si l'on considère en outre que dans la Géométrie analytique, au § 65, le coefficient angulaire de la tangente, $\lim \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)$ est employé, on voit que l'idée des dérivées est préparée, et l'on ne comprend pas pourquoi l'auteur a abandonné ce point de vue en préférant les considérations abstraites d'Euler.

La *Géométrie plane* a fait l'objet principal du premier volume de l'ou-

vrage; dans ce second volume elle se réduit à de simples compléments, parmi lesquels nous signalerons la question importante de *la Construction des expressions algébriques*. On y trouve, en outre, *la Théorie des transversales* avec le théorème de Pascal, et *la division harmonique*, avec les pôles et polaires dans le cercle.

La *Trigonométrie* est exposée d'une manière simple et précise; son champ est limité au strict nécessaire. Nous croyons qu'il serait difficile de faire mieux dans ce domaine. Le développement de la notion de fonction trigonométrique pour des angles supérieurs à 90° est introduit d'après la méthode des coordonnées en Géométrie analytique; c'est cette méthode en effet, qui fournit les définitions les plus simples. Ce chapitre se termine par la représentation de la fonction sinus à l'aide d'une courbe; on approuvera cela par égard aux applications à la Physique.

La *Stéréométrie* est, à notre avis, par trop restreinte dans ce manuel. Il est surprenant qu'il soit fait si peu usage de la Trigonométrie. Les trièdres et par suite les triangles sphériques devraient être traités d'une manière approfondie au point de vue des constructions et des calculs; ils devraient occuper dans ce chapitre la place la plus importante, comme le triangle en Géométrie plane et en Trigonométrie.

Il y aurait là une source féconde d'applications, et cette étude présenterait, à coup sûr, plus d'intérêt que les calculs de volume de tous les solides imaginables, mais qui, dans la pratique, ne se rencontrent jamais.

Il suffit de rappeler les problèmes suivants : tracé d'une route d'une pente donnée sur une montagne d'une inclinaison donnée; détermination des angles des faces des corps réguliers; position de l'axe terrestre sur l'écliptique et son influence sur la longueur des jours, sur les saisons, etc.

Il est complètement inutile au gymnase de traiter d'une façon spéciale la Trigonométrie sphérique. Les théorèmes du sinus et du cosinus suffisent; on peut se passer, sans aucun préjudice, des formules de Gauss, des analogies de Neper, etc. Il est vrai que les calculs se présenteraient sous une forme moins commode, mais l'objet principal n'est pas le calcul, c'est, en première ligne, l'interprétation des diverses formules appliquées à la Stéréométrie. Et sous ce rapport, la formule du cosinus de la Trigonométrie sphérique rend d'inestimables services, tandis que les formules commodes pour les calculs logarithmiques obscurcissent les relations géométriques.

Nous désirerions donc un meilleur développement de la Stéréométrie et une forte réduction de la Trigonométrie sphérique, ou, encore mieux, une complète liaison de celle-ci avec la Stéréométrie.

Du reste, il est possible que ces critiques s'adressent plutôt aux plans d'étude prussiens de 1892 qui ont servi de base à l'auteur, qu'au manuel lui-même, et nous reconnaissons avec plaisir que celui-ci présente une part de bonnes choses en stéréométrie. Ainsi, le calcul des volumes est fait très simplement et d'une façon très compréhensible; le passage de la règle du cosinus de la Trigonométrie sphérique à celle de la Trigonométrie plane est une bonne idée.

Une courte mais excellente introduction à la Géométrie analytique à deux dimensions constitue la fin de l'ouvrage; elle fait connaître de cette science autant qu'on en peut demander d'un élève du gymnase.

H. Ganter (Aarau).

H. Bork, P. Crantz, E. Haentzschel. — **Mathematischer Leitfaden** für Realschulen ; zweiter Theil : *Trigonometrie und Stereometrie*. 1 vol. in-8°, 128 p. Prix : 1 mark 60. Dürr, Leipzig.

Ce petit volume a été rédigé par l'auteur du manuel analysé plus haut, avec la collaboration de deux de ses collègues ; il offre également l'avantage d'une remarquable clarté d'exposition.

Mais il est écrit pour des établissements d'une autre catégorie et d'un degré légèrement inférieur. C'est pourquoi, dans la Trigonométrie, une fois les premières notions établies, il donne quelques exercices pratiques, afin d'initier les élèves aux applications dès le début.

Les formules réunies d'ordinaire sous le nom de *Goniométrie* sont étudiées seulement à la fin de la première partie. Il en résulte, d'une part, l'avantage de dispenser d'abord les élèves, pendant quelque temps de l'étude des théorèmes d'addition et de leurs conséquences, étude qui offre toujours quelque difficulté au débutant, tandis que, d'autre part, cette méthode a le désavantage de donner lieu à certaines démonstrations un peu artificielles. De plus il s'agirait de savoir si l'élève trouve encore un intérêt dans le chapitre « formules d'addition », après qu'on lui aura montré que l'on peut faire de la Trigonométrie sans ces formules. Nous croyons, en outre, qu'il y a un inconvénient à ne pas mettre en évidence le caractère propre de ces formules, ainsi qu'on procède dans ce manuel, en faisant dériver ces formules d'un problème pratique.

Ne serait-il pas juste, de dire à l'élève : « Après avoir constaté (par la figure) que la fonction $\sin \alpha$ ne croît pas proportionnellement à l'angle, il nous reste à déterminer la loi de croissance de $\sin \alpha$ en fonction de l'angle.

En outre, on ne devrait jamais négliger de rendre les élèves attentifs à ce que l'expression $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, permet de reconnaître que $\sin 2\alpha$ est plus petit que $2 \sin \alpha$ et que, par conséquent, la croissance de la fonction ne suit pas la loi de proportionnalité.

La *Stéréométrie* est traitée très élémentairement ; elle est accompagnée de nombreux exemples simples et bien choisis. Les auteurs consacrent quelques pages aux perspectives centrale et parallèle sans entrer dans le détail d'une étude approfondie ; malgré son peu de développement, ce chapitre peut être de quelque utilité, s'il est accompagné de nombreux exercices de construction.

Le calcul des volumes se réduit également à une étude très élémentaire ; quelquefois il l'est à tel point que l'on a renoncé à toute démonstration. Le principe de Cavalieri, par exemple, est introduit et utilisé sans preuve.

On voit que ce livre est destiné à un enseignement restreint ; mais comme tel il rendra certainement d'excellents services.

H. Ganter (Aarau).

F. de Heusch, professeur à l'École militaire de Bruxelles. — **Cours d'Analyse ; I. Calcul différentiel.** 1 vol. gr. in-8°, 278 pages. A. Castaigne, Bruxelles, 1898.

Ce cours d'analyse a été rédigé d'après les leçons professées à l'École militaire de Bruxelles. Le premier volume, qui seul vient de paraître, est

consacré aux *éléments du calcul différentiel;* il comprend trois parties. Dans la première l'auteur expose la différentiation des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes. La seconde traite des applications analytiques : étude générale des séries, formes indéterminées, maximum et minimum des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes. La troisième partie comprend les applications géométriques ; on y trouve les notions essentielles relatives à l'étude générale des courbes et des surfaces.

Grâce à la simplicité et à la clarté de l'exposé, cet ouvrage peut être recommandé à ceux qui abordent pour la première fois l'étude de l'Analyse. Toutefois nous devons attirer l'attention de ses lecteurs sur la *table des errata* placée à la fin du volume; nous les engageons à reporter d'abord dans le texte les 71 corrections signalées par l'auteur. Ce nombre dépasse de beaucoup celui qu'on peut tolérer dans un ouvrage mathématique. C'est dire que l'auteur et l'imprimeur n'ont pas apporté à cette publication tout le soin désirable. Par suite de leur négligence le lecteur se voit imposé un travail désagréable qui aurait pu être évité au moyen d'un nombre suffisant d'épreuves.

Malgré l'inconvénient qui vient d'être signalé, le livre de M. de Heusch pourra rendre service à tous ceux qui désirent s'initier aux éléments du calcul différentiel.

H. Fehr.

N. Charruit. — **Cours de Géométrie cotée** à l'usage des candidats à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, 1 vol. grand in-8°, 299 p. ; Prix : 5 francs, Nony et Cie, Paris, 1898.

C'est un ouvrage qui mérite d'être recommandé pour l'enseignement de la Géométrie cotée. Cette partie de la Géométrie descriptive est présentée très simplement et avec toute la rigueur et la clarté désirables. Un bon choix d'exercices accompagne chaque chapitre et le lecteur trouvera plusieurs de ces exercices résolus dans l'ouvrage du même auteur : *Problèmes et épures de Géométrie descriptive et de Géométrie cotée*, etc.

La *première partie* de l'ouvrage contient l'exposition de la méthode des deux projections orthogonales. L'auteur se borne à exposer l'essentiel et renvoie aux exercices plusieurs problèmes importants.

Dans la *deuxième partie*, l'auteur expose les principes de la Géométrie cotée, les méthodes générales — plans verticaux auxiliaires, rotation autour d'un axe vertical ou horizontal, rabattements, — les recherches d'angles et de distances, la représentation des polyèdres, leur section plane et l'intersection de deux polyèdres.

La représentation des lignes et des surfaces fait l'objet de la *troisième partie*. La théorie générale et les problèmes de tangence y sont développés pour les surfaces coniques, cylindriques et de révolution. La sphère est traitée à part par des méthodes plus simples. Enfin les constructions des sphères inscrite et circonscrite à un tétraèdre, ainsi que l'intersection d'une droite et d'une surface terminent cette partie.

La *quatrième* et dernière *partie* s'occupe des sections planes des surfaces. La section plane d'une sphère, l'intersection d'une sphère avec un polyèdre et les mêmes problèmes pour les cônes et les cylindres de révolution sont examinés avec beaucoup de soin. Le dernier chapitre montre les applications

que l'on peut faire des propriétés des surfaces de révolution aux questions de distances et d'angles, puis traite de la résolution des trièdres.

Deux notes accompagnent cet ouvrage. Dans la première, l'auteur démontre que les projections orthogonales d'une conique sont des coniques de même nature. Dans la seconde, il donne un moyen très simple de trouver les sections planes d'un cône ou d'un cylindre de révolution qui se projettent suivant un cercle et il en déduit des constructions relatives à ces surfaces ne nécessitant pas de rabattement d'une de leurs sections circulaires.

Nous regrettons que l'auteur n'ait pas parlé des applications de la Géométrie cotée aux surfaces topographiques, il aurait rendu service à plus d'un lecteur.

C. JACCOTTET (Lausanne).

ERN. DUPORCQ. — **Premiers principes de Géométrie moderne,** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation. 1 vol. in-8°, 160 pages; prix : 3 francs; Gauthier-Villars, Paris, 1899.

Grâce à sa simplicité et à son élégance, la Géométrie moderne offre un grand intérêt pour les élèves et contribue, dans une large mesure à développer chez eux l'esprit mathématique. Ce fait est bien reconnu : aussi, la plupart des *traités* de Géométrie, parus en France depuis une vingtaine d'années, contiennent quelques chapitres destinés à initier l'élève aux travaux de Pascal et de Desargues, de Poncelet et de Chasles. Pour le moment ces premières notions sont encore présentées sous forme de *compléments* ou d'*appendice*, en attendant une refonte complète des théories modernes avec les éléments exposés d'après Euclide.

Le livre de M. Duporcq s'adresse à ceux qui, en possession des premières notions, désirent se familiariser un peu plus avec les méthodes de la Géométrie moderne. Il est destiné aux élèves de mathématiques spéciales et aux candidats à la licence et à l'agrégation. Sous un volume relativement restreint, il contient les principes essentiels de cet important domaine de la Géométrie présentés sous une forme remarquablement claire et avec beaucoup de concision.

Dès le premier chapitre l'auteur fait ressortir le caractère nettement analytique de la Géométrie moderne. Il débute par les notions préliminaires relatives à l'emploi des imaginaires et aux transformations des figures. Puis, il passe à l'étude des divisions et des faisceaux homographiques pour aborder ensuite l'involution et la génération des courbes et des surfaces du second degré.

Le chapitre suivant renferme l'exposé géométrique de transformations homographiques et corrélatives. Dans l'étude des transformations homographiques l'auteur examine successivement l'homographie plane et l'homographie dans l'espace. La notion importante de transformation corrélative ou dualistique est présentée sous une forme très simple : elle est accompagnée de quelques applications.

Ces premières notions sont ensuite appliquées à l'étude des principales propriétés des courbes et des surfaces du second degré. Dans le chapitre relatif aux coniques sont examinés les points suivants :

Théorème de Desargues-Sturm et ses conséquences : pôles et polaires :

problèmes ; coniques harmoniquement circonscrites — ou inscrites — à une conique, extension aux cônes du second degré. Le chapitre consacré aux quadriques contient les propriétés essentielles concernant les pôles de plans polaires, l'intersection de deux quadriques, les faisceaux et les réseaux de quadriques. A signaler encore dans ce chapitre l'extension aux quadriques d'un certain nombre de propriétés démontrées sur les coniques harmoniquement circonscrites.

Le dernier chapitre contient l'étude de quelques transformations : applications des transformations homographiques et corrélatives, transformation par polaires réciproques relativement à une sphère ou à un cercle ; inversion, transformation anallagmatique ; transformations quadratiques planes. L'ouvrage se termine par l'étude géométrique de la transformation de Lie.

De nombreux exercices variés accompagnent les diverses notions traitées dans ce volume, les uns sont exposés avec leur solution, d'autres, sont simplement énoncés à la fin de l'ouvrage.

Cette courte analyse suffit pour montrer quelles sont les matières examinées dans ce petit traité. Comme on le voit, l'auteur a su se borner aux principes essentiels de la Géométrie moderne, aussi, croyons-nous que, par cela même, l'ouvrage de M. Duporcq sera consulté avec profit par tous ceux qui désirent s'initier aux méthodes de cet intéressant domaine de la Géométrie.

H. Fehr.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXXVIII. Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 19 (8 mai). — C. Guichard : Sur les réseaux qui correspondent au cas où la suite de Laplace est limitée dans un sens. — Le Vavasseur : Les groupes d'ordre $p^3\,q^2$, p étant un nombre premier plus grand que le nombre premier q.

N° 20 (15 mai). — E. Guyou : Application, à titre d'essai, de la division décimale du cercle à la pratique de la navigation. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique. — J. Beudon : Sur le calcul des formules contenant des fonctions arbitraires.

N° 21 (23 mai). — G. Darboux : Sur la déformation des surfaces générales du second degré. — A. Thybaut : Sur les surfaces isothermiques et la déformation du paraboloïde. — Tzitzeica : Sur la déformation de certaines surfaces liées aux surfaces du second degré. — P. Painlevé : Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique. — E. Borel : Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul.

N° 22 (29 mai). — G. Darboux : Sur les surfaces isothermiques. — Vallier : Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. — C. Guichard : Sur les réseaux cycliques qui contiennent un système de géodésiques.

N° 23 (5 juin). — E. Picard : Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy. — E. Maillet : Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers. — J. Coulon : Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques réelles.

N° 24 (12 juin). — E. Phragmen : Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler. — P. Vieille : Déformation des ondes au cours de leur propagation. — A. Blondel : Sur l'équation du mouvement des automobiles. — Caspari : Épreuves des instruments destinés aux expériences sur la décimalisation des angles.

N° 25 (19 juin). — G. Darboux : Sur une classe de surfaces isothermiques liées à la déformation des surfaces du second degré. — E. Picard : Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé. — H. Lebesgue : Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan. — P. Painlevé : Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipchitz.

N° 26 (26 juin). — N. Saltykow : Considérations sur les travaux de MM. S. Lie et A. Mayer. — Pépin : Nouvelle formule relative aux résidus quadratiques. — A. Petot : Sur l'équation du mouvement des automobiles.

American Journal of mathematics edited by Th. Craig and Newcomb; vol. XXI; prix d'abonnement annuel : 5 dollars; Baltimore, John Hopkins Press, 1899.

N° 2 (avril). — E.-J. Wilczynski : On Systems of multiform Functions belonging to a Group of linear substitutions with uniform coefficients. — O. Bolza : The partial differential Equations for the hyperelliptic τ-and σ Functions. — E.-B. Van Vleck : On certain differential Equations of the second order allied to Hermite's Equation. — E.-O. Lovett : Note on differential Invariants of a system of m points by projective Transformation. — O. Bolza : Prove of Brioschi's recursion Formula for the Expansion of the even σ-Function of two variables. — E. Jahnke : Note to professor Craig's Memoir Displacements depending of one, two and shree parameters in a Space of four dimensions.

Annali di matematica pura ed applicata, dirigées antérieurement par E. Brioschi, et continuées par les professeurs E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini et G. Jung; série 3, t. II; prix d'abonnement à un volume : 16 L.: Milan, C. Rebeschini, 1898-1899.

Fasc. 2, 3. — Bianchi : Alcune ricerche di geometrica non euclidea. — Levi : Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. — Cifarelli : Le congruenze. — Scorza : Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4° ordine. — Sabinine : Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intégrale définie multiple sous la forme propre aux applications. — Cazzaniga : Appunti sulla moltiplicazione dei determinanti normaloidi. — Timerding : Ueber ein quadratisches Nullsystem.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 296, série 5ª, vol. VIII, 1899; Rendiconti; Rome, tip. della R. acc. dei Lincei.

Fasc. 8 (23 avril). — Bianchi : Sulle trasformazioni delle superficie a curvatura costante positiva.

Fasc. 9 (7 mai). — Stranco : Sulle funzioni reali di una variabile. — Burgatti : Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.

Fasc. 10 (21 mai). — Bianchi : Sulle nuove trasformazioni delle superficie a curvatura costante.

Fasc. 11 (3 juin). — Burgatti : Sopra alcune formole formole fondamentale relative alle congruenze di rette.

El Progreso matematico, revista de matematicas puras y aplicadas : Director : D.-Z.-G. del Galdeano ; série 2ª, ano I, 1899; prix d'abonnement semestriel : Espagne, 5 pesetas ; Etranger, 6 fr.: Coso, 99, Saragosse.

Nous sommes heureux d'avoir à saluer la réapparition de cet utile et intéressant recueil périodique, publié par notre collaborateur et éminent ami M. de Galdeano. Tous ceux qui ont lu ses remarquables articles de *l'Enseignement mathématique* y applaudiront avec nous.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées sous les auspices du ministère de l'Instruction publique, par un comité de rédaction composé de professeurs de Mathématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté. — 2e série, t. I, 1899; Paris, Gauthier-Villars; Toulouse, Ed. Privat.

1er Fasc. — G. Kobb : Sur les solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. — E. Goursat : Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre. — V. Rouquet : Recherche des courbes dont le lieu des centres de courbure est une courbe donnée.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville; 5e série, publiée par C. Jordan; t. V; prix d'abonnement annuel : Paris, 30 fr.; Départements et Union postale, 35 fr.; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Fasc. 2. — P. Appell : Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons. — E. Jahnke : Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. — P. Duhem : Sur l'égalité de Clausius. — Ch.-J. de la Vallée-Poussin : Réduction des intégrales multiples généralisées. — E. Maillet : Sur la détermination du groupe des équations numériques. — J. Boussinesq : Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette : influence, sur l'équilibre, des mouvements latéraux spontanés du cavalier.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von Prof. G. v. Escherich und Prof. L. Gegenbauer; 10e année, 1899. Eisenstein et Cie, Vienne.

N° 3. — F.-J. Studnicka : Beitrag zur Theorie der cyclischen Determinanten. — L. Klug : Staudt's Untersuchungen über das Pascal'sche Sechseck und einige sich daran anschliessende Bemerkungen. — Palla Klekler : Note über die Polynomialcoefficienten. — Ed. Janisch : Ueber die Berührungshyperboloide der windschiefen Flächen mit Leitkegelschnitt und zwei geraden Leitlinien. — B. Igel : Einiges aus der Theorie der adjungierten Differentialgleichungen. — A. Schwarz : Ueber die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie.

Zeitsch. f. d. Realschulwesen, herausgegeben von E. Czuber u. M. Glofser; 24e année, nos 5, 6 et 7, 1899. Hœlder. Vienne.

A signaler dans le n° 7 :

Prof. A. Pichler (Vienne : Zum Euklid'schen Beweis der unendlichen Menge von Primzahlen. — Prof. F. Schiffner (Vienne) : Zur Behandlung der orthogonalen Projektion des Kreises. — Prof. Dr. J. Trischauf (Graz) : Zur Theorie projectivischer Strahlenbüschel.

Zeitsch. f. math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann; 30e année, 1899. Teubner, Leipzig.

N° 4 (juin). — J. Dickmann (Krefeld) : Die Amortisationsrechnung und die Tilgung öffentlicher Anleihen als Unterrichtsgegenstand. — Wertheim (Frankfurt-a.-M.) : Ueber die Ausziehung der Quadrat und Kubikwurzeln

bei Heron von Alexandria. — Dr Böttcher (Leipzig) : Tertianerverfahren zur Auffindung aller pythagoreischen Zahlenkleeblätter. — O. Hartmann (Pforzheim) : Möglichst kurze und annähernd richtige elementare Bestimmung des Ellipsenumfanges.

Zeitsch. f. Math. u Physik., herausgegeben von Dr R. Mehmke u. Dr M. Cantor : t. ﬠ. nos 1, 2 et 3, 1899 ; Teubner, Leipzig.

Cette importante revue, fondée en 1856, par O. Schlömilch, est dirigée depuis un an par MM. R. Mehmke, professeur à l'École technique supérieure de Stuttgart, et M. Cantor, professeur à l'Université de Heidelberg. Les nouveaux directeurs lui ont fait subir une heureuse transformation ; ils tiennent à accorder dans leur journal une large place aux *mathématiques appliquées*.

Cette transformation répond à un réel besoin : elle a pour raison d'être l'importance de plus en plus considérable que prend l'application des mathématiques aux sciences techniques. Sous cette nouvelle forme elle s'adresse à la fois aux mathématiciens et aux ingénieurs et leur permet de suivre les problèmes qui, chaque jour, prennent naissance dans les sciences appliquées.

Voici le *sommaire des trois premiers numéros* du tome ﬠ :

N° 1. — H. Lorenz : Dynamik der Kurbelgetriebe. — K. Heun : Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie. — E. Müller : Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmannschen Ausdehnungslehre. — E. Czuber : Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differential gleichungen erster Ordnung. — C. Baravelli : Sur les « Tables des chiffres constants » de M. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions. — R. Mehmke : Beispiele graphischer Tafeln, mit Bemerkungen ueber die Methode der fluchtrechten Punkte. — Fr. Schur : Die Deformation einer geradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Aenderung der Längen ihrer Geraden.

Historisch-litterarische Abtheilung. — G. Wertheim : Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln. — G. Wertheim : Ein von Fermat herrührender Beweis.

Nos 2 et 3. — H. Lorenz : Dynamik der Kurbelgetriebe (*suite*). — A. Beck : Ueber perspektive Affinität zweier Räume. — R. Schumann : Ueber die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung. — E. Wölffing : Ueber Pseudotrochoiden. — E. Schulze : Eine Determinantenformel. — R. Mehmke : Zur Bestimmung der Axe der Schraubung, durch die ein starrer Körper aus einer gegebenen Lage in eine zweite gebracht werden kann.

Hist.-litt. Abtheilung. — H. Suter : Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam. — G. Wertheim : Ueber den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben *x*.

Nyt Tidsskrift for matematik, 10e année, série A, n° 5, série B, n° 2, 1899. Kobenhavn.

Pædagogisches Archiv, herausgegeben von Prof. G. Dahn, 41e année, n° 5, 1899. Dürr, Leipzig.

Schweizerische Pædagogische Zeitschrift, herausgegeben von F. Fritschi und G. Stucki ; 9e année, n° 1, 1889. Orell Fussli, Zurich.

E. Deporcq. — **Premiers principes de Géométrie moderne** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation; 1 vol. in-8°, 160 p.; prix : 3 francs; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

H. Poincaré. — **Cinématique et Mécanismes; Potentiel et Mécanique des fluides;** Cours professé à la Sorbonne, rédigé par A. Guillet; 1 vol. gr. in-8°, 385 p.; prix : 15 fr.; Paris, G. Carré et C. Naud, 1899.

H. Fehr. — **Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale;** une broch. in-8°, 94 p.; Paris, G. Carré et C. Naud, 1899.

René Baire. — **Sur les fonctions de variables réelles** (thèse de doctorat présentée à la Faculté des sciences de Paris); 2e thèse (propositions données par la Faculté) : principales propositions relatives aux surfaces dont les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre; 1 vol. in-4°, 125 p.; Milan, C. Rebeschini, 1899.

G. Stiner. — **Die dreimal berührenden Ellipsen der Steiner'schen Hypocykloïde;** Saint-Gall, Druck der Zollikofer'schen Buchdruckerei, 1899.

M. d'Ocagne. — **Traité de Nomographie;** théorie des Abaques; applications pratiques, 1 vol. gr. in-8°, 480 p.; prix : 15 francs; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

A. Cahen. — **Sur la formation explicite des équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale est une fonction à un nombre fini de branches** (thèse de doctorat présentée à la faculté des sciences de Paris); 1 vol. in-4°, 96 p.; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

M. Servant. — **Essai sur les séries divergentes** (thèse de doctorat présentée à la faculté des sciences de Paris); 1 vol. in-4°, 59 p.; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

G. Vivanti. — **Corso di Calcolo-infinitesimale;** 1 vol. in-8°, 560 p.; prix : 8 lires; Libreria Editrice Ant. Trimarchi, Messina, 1898.

Bulletin de la Société mathématique de France t. XXVII; 1899.

Fasc. 1. — Goursat : Sur les équations du second ordre à n variables analogues à l'équation de Monge-Ampère. — Hadamard : Sur les conditions de décomposition des formes. — C. Bourlet : Étude théorique sur la bicyclette. — G. Humbert : Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire. — G. Humbert : Sur les polygones de Poncelet. — Blutel : Sur une propriété des trajectoires obliques d'une famille de géodésiques.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

NOTION, NATURE ET ENSEIGNEMENT

DES RÈGLES DE LA MULTIPLICATION

La Table de Pythagore nous a tous initiés de bonne heure, de trop bonne heure peut-être, à répéter comme des perroquets : 4 fois 3 douze, 7 fois 9 soixante-trois, 8 fois 5 quarante, etc., etc.

Au point de vue pratique, un peu *phénicien* ? de la plupart des gens, cela est parfait et peut passer pour une « notion ». Mais il faut reconnaître que l'empirisme de ce procédé ne nous mène pas loin, même dans l'APPLICATION de la science, attendu que l'on ne peut guère appliquer une Loi qu'en la dépouillant des circonstances trop particulières où elle se présente.

Les auteurs ont donc eu raison de placer tout au début de l'arithmétique la définition suivante : « multiplier un nombre par un autre, c'est chercher un troisième nombre qui se compose avec l'un des deux premiers, comme le second se compose avec l'unité. — En d'autres termes : Deux nombres étant donnés, j'appelle l'un *multiplicande* et l'autre *multiplicateur ;* et je me propose de trouver un nombre appelé *produit* qui soit au multiplicande comme le multiplicateur est à l'UNITÉ. »

§ 1. Mais qu'est-ce que ceci signifie : « Être à... comme... est à... ? » — Si l'on dit à l'élève que 12 est à 3 comme 4 est à 1, en ce sens que 12 est le *quadruple* de 3, comme 4 est le quadruple de 1, l'élève pourra croire que l'on confond ici *explication* avec *complication ;* et il répondra, s'il ose, que « le double, le triple, le quadruple, le quintuple, etc., d'un nombre sont des idées suffisamment claires pour se passer de la comparaison qu'on a essayé de faire ».

Cela est très exact au fond. Car la série des termes ci-dessus, *double, triple, quadruple...* nous conduit facilement à l'expression générique de *n-uple* ou de MULTIPLE : d'où la définition suivante :

« multiplier un nombre par un autre, c'est chercher, dans la série des « multiples » de ce premier nombre, celui qui a pour *numéro* d'ordre le chiffre du second nombre. »

Il en résulte dès lors que le multiplicande n'est point un nombre absolument abstrait, à la façon du multiplicateur. D'autre part, le *produit* est congénère du multiplicande et semi-concret comme lui. Nous allons le prouver avec complaisance, à cause de la gravité réelle de ce problème pédagogique.

1. — On tarde trop, je crois, à faire connaître aux élèves le « coefficient ». Ce serait pourtant là un bon moyen pour leur définir sérieusement le nombre *abstrait*.

Il n'y a au monde que des OBJETS (qui se comptent) et des *gestes réitérés* (pour les compter un à un). Dire aux enfants ou aux jeunes gens, peu importe, que « six » est un nombre abstrait, parce que l'on trouve abstraitement ce nombre dans six chapeaux, six bouteilles, six œufs, etc., c'est confondre autour avec alentour ! Si vous voulez matérialiser vos leçons, ayez donc un tas de bouteilles, de chapeaux ou de ce que vous voudrez.. puis allez au tas et apportez *successivement* sur la table 1, 2, 3, 4 bouteilles, par exemple. Vous n'aurez pas de peine à faire comprendre à l'auditoire que vous vous êtes dérangé 1, 2, 3, 4 *fois* pour rassembler, soit des bouteilles, soit des chapeaux, soit n'importe quoi.

Le voilà pris sur le vif le fameux nombre abstrait : c'est le « combien de fois ? »

Supposons maintenant que vous rapportiez trois bouteilles *à la fois* et que vous fassiez ce manège 8 *fois ;* cela fait 24 bouteilles, n'est-ce pas ? mais il faut enfoncer le clou. Remportez donc quatre bouteilles à la fois et débarrassez votre table en six *coups*. Recommencez encore en prenant deux bouteilles à la fois et en faisant 12 *voyages ;* puis, pour finir, enlevez les bouteilles, en *4 tours* de main... — Voilà une bonne leçon !

§ 2. Le MULTIPLICANDE dérive d'un groupement préalable des *unités quelconques ;* quand l'emballage est terminé, on emporte les ballots, un à un, et on compte les départs. Le MULTIPLICATEUR sert à enregistrer la cote. Ce n'est pas une « quantité », c'est

plutôt une « quotité », — dans le sens étymologique du terme.

Ici se présente une réponse à la question soulevée par les métaphysiciens : « Le nombre *vingt*, par exemple, est-il une collection synthétique de 20 unités ou le *vingtième* nombre de la série numérique ? »

Hé bien ??... Cela dépend ? — Grammaticalement parlant les nombres « cardinaux » sont des adjectifs déterminatifs qui n'ont aucun sens complet par eux-mêmes. En ajoutant à la suite le mot « chose » ou *machin* (?) on se tire d'affaire, mais on ne fait point une abstraction correcte ni enviable.

Si l'on veut être intelligible, il faut transformer le mot « vingt » en « vingtaine » et compter les vingtaines comme on compte des paquets d'allumettes ou des sacs de pommes de terre, etc., etc.

Par contre, et toujours grammaticalement, s'il s'agit d'un numéro d'ordre, on écrira : Louis XIV = Louis le quatorzième ; et on fera observer que 14 est un nombre *ordinal* populairement abrégé.

Donc : le nombre 80 (quatre-vingts, tel qu'on a pris l'habitude de l'articuler, est un *index* plutôt algébrique qu'arithmétique, en ce sens que la multiplication de 20 par 4 y est énoncée et non pas effectuée. Pour le penseur, quatre-vingts suggère l'idée de la quatrième vingtaine transférée et consignée par la caisse des Dépôts et Consignations. Le maître d'école devrait faire analyser cette *locution* de la manière suivante : « Quatre-vingts, c'est-à-dire 4 fois vingt, c'est-à-dire la quatrième expédition des marchandises qu'on a coutume de ficeler par bottillons de 20 pièces. » — En résumé : Une *vingtaine* est comme une *douzaine*, un *quarteron*, une *grosse* ; une *tonne*, etc... Ça se compte à la queue leu leu, tout comme des chapeaux, des bouteilles ; et le COMPTE que ça représente est un nombre abstrait proprement dit, en deux temps et trois mouvements. — Le mot « fois » se traduit par « temps » en beaucoup de langues.

§ 3. Au delà de l'enseignement primaire, il serait bon de noter différenciellement les nombres abstraits, les vrais coefficients, par $N \times 1^0$, afin de les distinguer formellement de $N \times 1^1 =$ un nombre qui contient N unités. — Bref : N *fois* $= N.\ 1^0$; *un* $= 1^1$; N *fois un* $= N.\ 1^0.\ 1^1 = N.\ 1^1$.

Que l'on ne crie pas à la scolastique... ! Car je vais immédiatement prouver que $(5 \times 7 = 35)$ est une proposition vague, indigne de la réputation des mathématiciens. — Voici cette preuve :

α). Si c'est la multiplication de deux nombres parfaitement abstraits l'un par l'autre, il faut opérer ainsi :

$$\begin{array}{r}
1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 \\
1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 + 1^0 \\
\hline
1^0 + 1^0 + 1^0 + . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
1^0 + 1^0 + . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
1^0 + . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\
. \ . \ . \ . \ . \ + 1^0 \\
\hline
\text{Total} = 35 \text{ fois } 1^0 \text{ ou } 35 \textit{ par.}
\end{array}$$

En langage ordinaire on devra dire : 5 fois $\times$ 7 fois égale 35 fois.

β). Si je considère la multiplication de 7 unités par 5, j'aurai 35 unités ou 5 fois les sept unités, une quintuple *heptade* d'objets *indéfinis*, mais d'OBJETS. Ou bien : $(5 \times 1^0) \times (7 \times 1^1) = (35 \times 1^1)$.

En prenant 7 fois une *demi-décade*, j'aurais le même résultat. Nous y reviendrons.

γ). Si je pose la multiplication de 5 unités par 7 unités, j'aurai 35 *unités carrées* : $(5 \times 1^1) \times (7 \times 1^1) = (35 \times 1^2)$ et 35 est un nombre RECTANGLE.

δ). Comme corollaire : je dis que 25 est le *carré* de 5, pourvu que *cinq* ne soit pas (5×1^0).

§ 4. Le genre didactique est trop abandonné pour que j'espère soutenir ici que le nombre 64, par exemple, diffère de lui-même, selon que l'on envisage 64 fois, 64 unités simples, 64 unités carrées ou 64 unités cubiques, ou même 64 unités de la forme 1^6. On a la routine d'écrire : $64 \times 1^0 = 64 \times 1^1 = 64 \times 1^2$, etc. On enseigne que $4 \times 4 \times 4 = 8 \times 8$, sans remarquer que le signe $=$ serait absurde en géométrie pour établir la lointaine analogie entre un hexaèdre de 4 mètres de côté et un carré de 8 mètres de côté.

L'algèbre a fini, pour beaucoup de maîtres, par la démonstration de $i^0 = i^4 = i^8 = i^{12}$ ... etc., ... etc.

On ne remontera pas le courant !

N'empêche que toutes ces confusions entre l'*homonymie* et l'*égalité* ne soient antirationnelles... Mais revenons à notre sujet précis.

Y a-t-il trois termes ou quatre termes en jeu dans la multiplication ?

— Hé bien ?... et encore, cela dépend ! Voici pourquoi : Si je considère la multiplication comme la répétition ou l'addition à elle-même d'une certaine grandeur, un certain nombre de fois, il n'est guère indispensable de reconnaître quatre termes : $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$ représente le résultat d'une sommation spéciale. Au lieu d'ajouter l'un à l'autre *cinq* nombres inégaux, j'ai ajouté cinq nombre égaux. C'est tout.

Mais si je considère l'égalité de deux rapports par quotient, tels que $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, ma conception est forcément quaternitaire ou, si l'on veut, doublement binaire. Le multiplicateur et l'unité formant un premier couple, le produit et le multiplicande forment un second couple analogue au premier.

Remarquons tout de suite que l'homogénéité n'est exigible que dans les deux termes d'un même couple. Bref : « Six pommes de terre *est à* deux pommes de terre, *comme* quinze violons *est à* cinq violons. »

Toute facétie à part, j'ai le droit de biffer au numérateur et au dénominateur un terme commun, et de diviser les deux termes par « pommes de terre », dans un cas, et par « violons » dans l'autre cas ; de façon à laisser $\frac{6}{2} = \frac{15}{5}$ ou mieux encore $\frac{6 \times 1^0}{2 \times 1^0} = \frac{15 \times 1^0}{5 \times 1^0}$, afin de souligner l'idée systématique.

II. — La commutativité semble inséparable de l'essence de la multiplication ; surtout dans la conception quaternitaire $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, attendu qu'on peut déplacer les moyens ou les extrêmes, *ad libitum*.

Quelle est donc, dès lors, l'origine des noms de *multiplicateur* et de *multiplicande* ?

Avouons-le, à notre honte, il y a 99 p. 100 des écoliers qui demeurent convaincus que, dans la multiplication, on *doit* placer en haut de la page le grand nombre et au-dessous le plus petit. Demandez à qui vous voudrez de multiplier 37 par 819, et vous verrez, sauf exception infiniment rare, l'enfant, le jeune homme ou le monsieur écrire ainsi :

```
 819
  37
-----
 5733
2457
-----
30303
```

Allez au tableau et faites vous-même l'opération de la manière suivante : *Vous verrez... !*

```
  37
 819
-----
  333
  37
296
-----
30303
```

Mon intention n'est pas de changer les habitudes de faire... Ces habitudes ont été fixées par la loi de commodité, mais l'intelligence est assez souple pour ne pas se figer d'emblée comme une sauce vulgaire ! En d'autres termes : Je voudrais que l'on fît savoir aux étudiants que le nombre placé en haut est le plus grand, mais qu'il n'est pas toujours *ipso facto* le MULTIPLICANDE ; de sorte que l'on ramène la multiplication à une allure uniforme en invoquant le principe de la commutativité. Cela n'est pas une subtilité, tant s'en faut.

§ 5. La notion, la nature et l'origine du multiplicande impliquent une sorte d'hypothèse mystique, sur les rôles des nombres ; hypothèse en vertu de laquelle il y aurait un dualisme arithmétique calqué sur l'antithèse du mâle et de la femelle, de l'actif et du passif. Prenons un fait facile à analyser, c'est-à-dire un nombre d'objets concrets, comme 60 œufs, par exemple.

Je puis partager ces 60 œufs en tas égaux, de plusieurs manières différentes et symétriques *deux à deux*.

6 tas de 10 œufs :	10 tas de 6 œufs :
5 » » 12 »	12 » » 5 »
4 » » 15 »	15 » » 4 »
3 » » 20 »	20 » » 3 »
2 » » 30 »	30 » » 2 »

Or, dans chaque exemple, le tas d'œufs envisagé devient la « matière » de l'opération au même titre que l'œuf individuel. L' « esprit » de l'opération s'oppose donc à cette *matière*, comme l'actif au passif, etc...

Je ne vois pas, quant à moi, de meilleure idée à se faire concernant le *multiplicande* et le *multiplicateur*.

La commutativité est donc un phénomène purement expérimental au début et ultérieurement généralisé. Mais 5 tas de 12 œufs = 4 tas de 15 œufs n'est pas une égalité, ni une équation; c'est une « équipollence » empiriquement découverte !

§ 6. Il n'est pas mauvais, non plus, de prendre en considération un fait géométrique, savoir : que le rectangle ayant pour base 12 mètres et pour hauteur 5 mètres, peut tourner d'un angle droit autour d'un de ses sommets et prendre l'aspect d'une *autre figure* ayant 5 mètres de base et 12 mètres de haut. On postule ensuite la permanence de l'aire, en dépit de la rotation et l'on écrit : $12 \times 5 = 5 \times 12$. — Mais cela aussi est une petite découverte expérimentale très féconde.

Remarquez bien, en effet, que, dans l'aire d'un rectangle envisagée comme produit, il n'y a pas lieu d'opposer les facteurs : *Base* et *Hauteur*. Cette fois, il y a commutativité forcée, attendu que la base est *ad libitum* multiplicande ou multiplicateur. — Mieux que cela : « Il y a deux multiplicandes mutuellement et *bissexuellement* (!) multiplicateurs... » Aussi la formule de ce genre de multiplication mérite-t-elle d'être retenue, surtout si l'on veut poursuivre notre étude sur le problème que nous nous sommes posé dès le début, savoir : « Quelles sont les règles les plus générales de la multiplication ? »

Tout le monde doit avoir retenu dans sa mémoire, comme un

événement solennel, l'étrange émotion qu'il a ressentie en apprenant que le *produit* de deux lignes droites segments pouvait s'obtenir au moyen d'une « quatrième proportionnelle », sans qu'il fût question de *rectangle* construit, ni d'aire, ni de surface évaluée.

C'est ici que l'on saisit vraiment l'origine étymologique des proportions A : B :: *a* : *b*, qualifiées « géométriques » par les vieux savants.

§ 7. Quand on lit les œuvres de R. Descartes, on se figure tout d'abord un parti pris de réduire systématiquement le *concret* à l'*abstrait*, sans aucune chance de réciproque. Mais c'est une erreur.

Au bout d'un certain temps, on découvre que l'immortel penseur est le fondateur de l'APPLICATION :

1° ou 2° de l'Algèbre à la Géométrie ;

2° ou 1° de la Géométrie à l'Algèbre ;

3° plus sûrement de la *fécondation mutuelle* de ces deux sciences mathématiques, l'une par l'autre.

La technique appropriée à la détermination d'une quatrième proportionnelle consiste essentiellement dans le tracé de plusieurs triangles *semblables*, de façon à lier intimement l'une à l'autre la *grandeur* et la *direction* !

Bref ; l'égalité de deux rapports par quotient, dans les segments rectilignes, nous conduit « malgré nous » aux BIRADIALES, et nous révèle la profonde intuition des écrivains qui appelèrent *géométrique* la proportion $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$.

Reprenons maintenant, par curiosité, la définition de la multiplication largement conçue.

Il nous faut dire : « Problème qui consiste à déterminer une inconnue nommée PRODUIT, en fonction de *trois* grandeurs connues, dont l'une est prise pour ÉTALON, soit par rapport à la seconde, soit par rapport à la troisième, soit par rapport à chacune. »

Ce n'est pas tout : il faut ajouter, en effet, « que le produit se compose et *se comporte* par rapport au multiplicande, tout comme le multiplicateur se compose et *se comporte* par rapport à l'étalon ».

§ 8. Mais, dira-t-on, qu'est-ce que cette façon de *se comporter par rapport à...* ?

Réponse : « C'est tout le calcul des grandeurs dirigées, soit dans le plan, soit dans l'espace. »

Voilà donc les plus hautes difficultés de la mathématique évoquées et impliquées dans cette étude.

III. — Trois vecteurs *coplanaires* étant donnés, avec indication expresse de celui qui est pris pour unité, on les amène facilement à concourir, c'est-à-dire à rayonner d'un même point originel ; et il est facile aussi de construire un quatrième vecteur se comportant par rapport à l'un *quelconque* des deux premiers, comme celui-ci se compose et se comporte par rapport au vecteur unitaire. — Il est inutile d'insister là-dessus.

§ 9. Pourquoi donc cette simplicité serait-elle détruite en passant des vecteurs coplanaires aux vecteurs non-coplanaires ?

— Parce que, dirais-je modestement, le prestige exercé par l'illustre Hamilton a produit les mêmes effets que le prestige exercé par l'illustre Cuvier : on n'a pas osé se permettre de trouver *autre chose !!!*

Les grands hommes ont malheureusement le défaut des grands arbres : il est difficile de faire pousser quelque chose à leur ombre, sauf le lierre qui monte le long de leur tige puissante et qui redescend bientôt pour remonter encore... et ainsi de suite.

La nation qui a produit Hamilton a raison d'être fière... Mais celle qui a produit Descartes aurait tort de ne pas l'être. J'avoue, en ce qui me concerne, que le calcul sublime des quaternions étant fait et bien fait, il n'y a pas à le refaire. Mais je soutiens que l'exceptionnalité de son algèbre n'est elle-même qu'une vue subjective des faits géométriques de l'espace à trois dimensions, une conquête par mouvement tournant de la Terre Promise, un beau stratagème de guerre enfin. — Voici la justification minutieuse de mes paroles hardies.

§ 10. Pédagogiquement examinée, la question de savoir jusqu'où $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ peut s'étendre, se traiterait ainsi :

« On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ses deux termes par le même nombre, quel que soit ce nombre. »

Voilà pourquoi $\frac{A}{B}$, comme $\frac{a}{b}$, peut être réduit à une fraction assez heureusement choisie pour que le dénominateur soit 1^0 (*un* puissance *zéro*).

Mais la routine est omnipotente : on considère la division comme le couronnement des quatre règles de l'Arithmétique élémentaire ; de sorte que le rapport par quotient de A : B n'aurait même pas de sens pour éclairer la définition du *produit* vis-à-vis du *multiplicande* ?

Dans un tel état de misère philosophique, comment voulez-vous arriver à comprendre et surtout à faire comprendre la multiplication de deux vecteurs l'un par l'autre ? on renonce à être professeur... ou se fait prestidigitateur et l'on escamote la carte gênante.

Il faut, comme on dit, s'élever du connu à l'inconnu et insister fortement sur les choses très connues sans craindre d'y perdre son temps. Car les hésitations que l'on éprouve plus tard, en présence d'un problème nouveau, tiennent surtout à ce qu'on sait mal le problème antérieur qui sert à préparer la solution.

Si tous les vecteurs étaient parallèles et toujours dirigés de gauche à droite, par exemple, la recherche du vecteur-produit, par les constructions géométriques, eût fait l'effet d'un artifice ingénieux : on se serait dit que la détermination de la *proportionnalité* des segments rectilignes s'obtient en détruisant momentanément leur parallélisme, sauf à le rétablir dans l'énoncé final de la réponse stricte à la stricte question.

§ 11. Je n'ai pas besoin de dire que j'attache une importance psychologique très grande à ce fait historique, en vertu duquel les grandeurs vectorielles non diversement dirigées dans le plan, finissent par entraîner le constructeur à la fiction d'autres vecteurs diversement dirigés, pour faciliter son travail ! — La proportionnalité des lignes ne s'établit, en Géométrie vraie, que grâce au *truc* des ANGLES.

Mais voici la contre-partie : « Que deviendront nos *similitudes*, dès que nous sortirons du plan ? »

— Réponse : Des « analogies convenables ».

Il est certain que le rapport de deux vecteurs exige *trois* déterminations :

1° Un quotient numérique abstrait ;

2° Un angle des directions divergentes ;

3° Le plan sur lequel on constate la divergence angulaire.

C'est le TERNION initial !

De là ce théorème :

« Deux vecteurs A et B peuvent être déplacés parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce qu'ils concourent en un même point origine et soient correctement coplanaires. — Arrivés en cet état, leur rapport est à la fois *quotientiel* et *angulaire*. »

Par conséquent nous pouvons deviner que la biradiale formée par le vecteur-produit et le vecteur-multiplicande est composée de deux segments rectilignes ayant entre eux le rapport quotientiel et angulaire, que nous avons trouvés entre le multiplicateur et l'unité.

§ 12. Ici une pose nécessaire : une biradiale analytiquement représentée constitue un quaternion et non pas un « ternion ». — Si le ternion suffit, il faut renoncer à la découverte de Hamilton, carrément et non pas sournoisement !

Ce sommaire dilemme ne tient pas : Car, personne n'a, jusqu'ici, déterminé la *Solidarité obligatoire des biradiales analogues*. — Voilà pourquoi il n'est pas question de renverser, ni de modifier, ni d'améliorer la méthode hamiltonienne. — On cherche AUTRE CHOSE. — Voilà tout.

Le calcul des ternions consisterait donc à présenter la multiplication des vecteurs, dans l'espace, sans descendre de l'abstraction conventionnelle et fictive à la réalité concrète, mais en remontant bien plutôt du concret mécanico-géométrique à l'abstrait pur de l'analyse.

Cette tentative est issue de l'esprit didactique, avant tout, et ne vise aucunement à la découverte officielle !

Il s'agit d'étendre progressivement, gradativement et sans secousse, la notion, la nature et l'enseignement des Règles de la Multiplication.

IV. — Il est évident que le *strict* rapport géométrique de deux vecteurs, l'un vis-à-vis de l'autre, offre à l'esprit un sens *immé-*

diat, abstraction faite de l'unité choisie pour l'évaluer. Mais cette *binarité* pure tient à ce que l'un des deux vecteurs est implicitement pris pour l'unité non mentionnée. Dès lors il se trouve que la valeur relative de l'autre vecteur, avec sa déviation angulaire plane, suffit à tout.

Or le problème de la multiplication introduit en somme une seconde biradiale dont l'un des rayons est caché. On dit ceci, par exemple : « Sur les arêtes indéfinies d'un angle trièdre S, on prend SA = 1, SB = V′ et SC = V″ et il est question de construire un quatrième vecteur SD = x, tel que V′ : 1 : : x : V″; dans *toute la force* du terme.

§ 13. Discussion. — V′ = 3, V″ = 4 et x = 12, pour mieux spécifier le cas et se débarrasser des nombres *nus*.

Ce que nous savons encore, je suppose, c'est que x doit faire avec V″ le même *anglan plan* que V′ avec le vecteur-unité. Soit α, cet angle.

Donc, dira-t-on a première vue, il y a une infinité de solutions, attendu que le vecteur x peut tourner librement autour du vecteur V″ sans cesser de se comporter avec ce vecteur comme il convient...?

Soit : Il y a une infinité de solutions *passables ;* mais il y en a une *meilleure* que les autres : c'est précisément celle qui permet en même temps d'affirmer que le vecteur x fait avec V′ le même angle β que V″ fait avec le vecteur-unité. Car rien en somme ne justifie la distinction fonctionnelle de V′ et de V″, en tant que multiplicande ou multiplicateur.

Toute élection à cet égard est gratuite de notre part :

Le produit de deux vecteurs est une conception née de la Géométrie plane, et nous ne sommes pas obligés d'introduire une nouvelle condition de dissymétrie, une hypothèse de *successivité* dans une donnée où tous les éléments sont *co-existants*. Je dirais volontiers que dans la multiplication de deux vecteurs, il y a deux multiplicandes et point de multiplicateur prédilectif, ou que — du moins — cette conception immédiate, intuitive et spontanée, l'emporte philosophiquement sur celle des quaternions artificiels et symboliques. La commutativité, c'est l'épreuve cruciale, le vrai contrôle ou *contre-rôle*.

Plus directement encore : Deux biradiales égales et coplanaires sont nécessairement comprises entre deux autres biradiales égales et coplanaires ; deux biradiales égales non-coplanaires ne sont pas nécessairement comprises entre deux autres biradiales égales, mais *peuvent* l'être. Dans ce dernier cas, elles représentent quatre vecteurs en proportion géométrique aussi parfaite que s'il y avait co-planarité. — On pourrait dire qu'il y a co-planarité *virtuelle*, dont l'*actuelle* n'est qu'un cas plus particulier.

Un angle solide tétraédrique à faces articulées formant des angles dièdres essentiellement variables, de zéro à 180 degrés, et sur les arêtes desquels on prend les 4 vecteurs : 1, V′, V″, x ; tel est, dans l'espace, le dispositif impeccable de la multiplication $V' \times V'' = V'' \times V' = x$.

Il en résulte effectivement l'égalité des faces opposées, dans l'angle tétraèdre susdit.

CONCLUSION

Lorsque quatre grandeurs peuvent se coupler deux à deux et peuvent donner lieu à *certaines analogies*, en passant d'un couple à l'autre, on se trouve en présence d'une PROPORTION.

L'enseignement mathématique manque malheureusement de terme générique pour englober les divers *rapports* que les grandeurs sont susceptibles d'entretenir. On dit bien, en langue courante : « A est à B, comme a est à b. » — Mais, jusqu'à présent du moins, on ne voit pas clairement ce que c'est que ETRE A... ?

Il serait peut être inconvenant de dire que la *métaphysique* est la lèpre de l'esprit humain... Je me contenterai donc de soutenir que la démangeaison de l'abstrait, que le prurit de la généralisation illimitée a un inconvénient proverbial :

« Trop gratter cuit ! »

Ainsi j'avais cru un instant, à tort, que le langage le meilleur pourrait être le suivant :

« A est fonction de B, comme a est fonction de b. »

Cela conduirait très simplement, en effet, à ramener toutes les proportions, à l'idée fondamentale : $y = f(x)$. A étant une cer-

taine valeur de y pour $x = \mathrm{B}$; a étant une seconde valeur de y pour $x = b$; il y a quelque raison de poser : A est à B comme a est à b.

§ 14. Le premier cas résulte de la fonction élémentaire $y = x + \mathrm{K}$, K étant une constante finie, positive ou négative. — Dès lors : A est à B, comme a est à b, signifie proprement que A dépasse B, comme a dépasse b.

Ce genre de rapport, par équidifférence, n'exclut pas la diversité des objets comparés, de groupe à groupe. Ainsi il n'est pas douteux que 8 chapeaux est à 6 chapeaux, comme 15 lampes est à 13 lampes, en ce sens que le même *excédent* de deux unités se retrouve ici et là. C'est précaire, mais cela existe.

La fonction élémentaire $y = \mathrm{K}.x$ nous fait passer des rapports par équidifférence aux rapports équiquotientiels. Cette fois : A contient B comme a contient b.

Mais on aurait tort de considérer d'autres fonctions élémentaires quelconques, à moins d'en donner un motif mathématiquement plausible.

Peut-on admettre, par exemple, que 4 soit à 16, comme 7 est à 49, en ce sens que 4 est racine carrée de 16 comme 7 l'est de 49?

Peut-on supposer que $\frac{2}{3}$ soit à $\frac{\sqrt{3}}{2}$ comme $\frac{1}{2}$ est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sous prétexte que l'angle de 60 degrés a pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$, au même titre que l'angle de 45 degrés a $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

C'est en examinant impartialement ces questions que l'on est amené à découvrir le *quid proprium* des proportions dignes de ce nom, savoir : la possibilité de changer de place les *moyens* ou les *extrêmes*. Dès lors l'expression large : *Est à comme... est à*, se réduit subitement à l'équidifférence et à l'équiquotient. $\mathrm{A} - \mathrm{B} = a - b$, ou bien $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{a}{b}$. Voilà tout.

§ 15. Autrefois on écrivait en style de proportions, au moyen de points séparés ou groupés par deux ou par quatre. On ne traduisait malheureusement que par les mots : *Est à, comme, est à...* Ce fut donc un réel progrès que de traduire en style d'équa-

tions, au moyen du signe canonique : $(=)$, par des algorithmes distincts :

$$\begin{cases} A - B = a - b : & \text{d'où} \quad A - B + b - a = 0, & \text{d'une part,} \\ \dfrac{A}{B} = \dfrac{a}{b} ; & \text{d'où} \quad \dfrac{A \times b}{B \times a} = 1, & \text{d'autre part.} \end{cases}$$

Pédagogiquement, il faut le répéter cent fois, cela veut dire que nous ne connaissons, en mathématiques élémentaires ou supérieures, que deux opérations *officiellement* commutatives : l'addition et la multiplication, et que cette vérité revient à affirmer que *zéro* est logarithme de *un*, dans tous les systèmes possibles et concevables !

$$\begin{cases} \text{La somme des moyens} = \text{la somme des extrêmes :} \\ \text{Le produit » » = le produit » » } \end{cases}$$

Tel est le bilan de nos connaissances sur les proportions non abusivement conçues.

Il s'agissait donc de voir, à ce point de vue précis, l'extension *maxima* de la proportion par quotient, autrement dit : « l'égalité propre de deux rapports quotientiels obtenus par des constructions géométriques. »

§ 16. C'est à ce moment que se présente à l'esprit du philosophe-mathématicien l'*indissolubilité* des deux conceptions : direction et grandeur, grandeur et direction, sans hiérarchie prédilective... — Retenez bien cela.

Au reste, s'il y avait une préséance rationnelle, il faudrait placer la *direction* avant la *grandeur* géométrique.

On arrive, de proche en proche, à cette proposition remarquable, savoir : « que le *multiplicateur* doit *tourner* autour de l'EXTRÉ, comme le *produit*, lui aussi, doit tourner autour du MULTIPLICANDE, en conservant un rapport quotientiel défini et une divergence angulaire définie. » Bref : « le lieu géométrique des situations du produit est un cône circulaire droit tout pareil au lieu géométrique des situations du multiplicateur, chacune à chacune. »

En somme l'unité est une longueur-unité et un *axe* fondamental ; le multiplicande est une longueur-unité (secondaire) et un axe secondaire. C'est autour de ces deux axes que tournent res-

pectivement le multiplicateur et le produit, de façon à conserver une solidarité déterminable en chaque position, et avec *criterium* de réversibilité parfaite.

Cette solidarité relève de la Cinématique ; et nous l'avons *matérialisée* au moyen d'une *bielle* non décrite jusqu'à ce jour, sauf erreur bibliographique et facile à corriger.

Il en résulte une généralisation non abusive des vecteurs *coplanaires* en vecteurs *syntropiques*, dont les co-planaires ne sont plus qu'une photographie instantanée et casuelle. — Cette idée paraît féconde.

§ 17. La composition des « couples » ne doit pas, en effet, donner une solution double, à moins que les rotations ne soient *successives*. La « parodie » sphérique de l'aboutage des vecteurs α et β, donne $(\alpha + \beta$ différent de $(\beta + \alpha)$: mais l'aboutage n'est pas le type exclusif de l'addition des vecteurs ni des arcs. Une parodie meilleure est celle du parallélogramme des forces.

Il faut donc donner aux deux arcs-vecteurs la même origine, terminer le triangle sphérique et mener un arc médian que l'on prolonge ensuite d'une quantité égale à lui-même. Tel est l'analogue de la *diagonale* représentant la résultante *unique*.

Plus directement, dans l'espace, on construira un angle solide tétraèdre, ayant des faces opposées égales. Sur les arêtes il sera toujours possible de prendre quatre longueurs formant deux biradiales égales comprises entre deux autres biradiales égales.

Cette intuition géométrique est au-dessus des *impedimenta* de l'analyse : il m'importe peu que l'on calcule ou que l'on ne calcule point au moyen de symboles tétralogiques qualifiés *quaternions*. — Une muraille de Chine, fort respectueuse sans aucun doute, environne pour moi le céleste Hamilton, soit dit sans ironie. — Ce qu'il faut professer avant tout, c'est le QUATERNION ancestral de la « proportion géométrique » intelligible par soi-même, avant toutes les algèbres...

§ 18. Et puisque je prononce en finissant ce mot au pluriel, les ALGÈBRES, je tiens à dire que la grande conception d'A. Comte au sujet du calcul des « fonctions indirectes » est plus scientifique que jamais. Introduire artificiellement dans le calcul des algorithmes quelconques, et les faire disparaître en fin d'opéra-

tions comme un échafaudage provisoire ; tout le génie de l'analyse est là. Pédagogiquement je voudrais donc que la méthode infinitésimale, celle des quaternions et autres... fussent exposées en bloc par le professeur historien.

Il aurait qualité pour faire voir que la langue des calculs est fort souvent circonlocutionnelle ou périphrastique, mais que cela n'a rien de compromettant, en ce sens que nos conceptions fondamentales des choses restent toujours telles quelles.

Les algébristes *pur sang* sont comme les banquiers : ils travaillent sur des symboles ; et leurs spéculations ne valent que par la possibilité de retraduire le tout en langage économique réel.

Raoul Baron (Paris).

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE

D'APRÈS M. JACQUES HADAMARD

Bien que le livre tout entier mérite assurément qu'on s'y arrête, je ne veux parler ici que de quelques pages des *Leçons de Géométrie* de M. Jacques Hadamard : elles ont pour titre : *Sur la méthode en Géométrie*, et les conseils qu'elles contiennent doivent être médités par les élèves et par les maîtres. Dégager la méthode de recherche, les objets sur lesquels doit se fixer l'attention ; contribuer ainsi à l'éducation de cette faculté, c'est-à-dire à la fois de la volonté et de l'intelligence, tel est le but de l'auteur ; ce but, tous les maîtres dignes de ce nom, qui croient que la science donne de la vigueur aux esprits qui s'en nourrissent, doivent l'avoir devant les yeux.

Cette éducation de l'attention, pour ce qui est des mathématiques, se fait par l'habitude même de la recherche et par une bonne direction donnée à l'habitude. C'est cette direction qui est l'objet propre de M. Hadamard. Il est certain qu'elle peut résulter, au moins pour les meilleurs esprits, de l'habitude elle-même, de l'étude du cours, de l'application de ce cours à des exercices

gradués (1). Les règles à suivre ressortent des exemples, et l'on finit par s'y conformer sans y penser. Mais est-il bon de n'y pas penser, est-il bon que l'habitude soit inconsciente ? Pour ceux à qui le commerce des mathématiques a donné d'excellentes habitudes, il y a un véritable intérêt philosophique à reconnaître en quoi consistent ces habitudes, en quoi et pourquoi elles sont excellentes, comment elles aident à découvrir la vérité, au moins dans un domaine particulier : s'ils arrivent à reconnaître dans quelle mesure elles peuvent être transportées ailleurs que dans ce domaine, et combien, dans la réalité, la complication des données et des inconnues s'oppose à la simplicité des raisonnements mathématiques ; ils n'y perdront rien pour leur conduite dans la vie. Mais cette connaissance de la méthode, du chemin qu'il faut prendre, des pièges qu'il faut éviter importe encore plus aux commençants qui, en entrant dans une région toute nouvelle pour eux, s'y sentent perdus et se découragent souvent sans raison. Parmi ceux qui ont poursuivi l'étude des mathématiques, qui ne se rappelle des moments de désespoir devant des questions d'une simplicité enfantine ? Et combien se sont dépités en reconnaissant l'inutilité des efforts qu'ils avaient faits ? Combien d'autres se sont abandonnés au découragement, ont fermé leur livre, bouché leurs oreilles, laissé passer le temps d'apprendre les éléments, qui ne se retrouve plus ? Combien de ceux-là auraient pu être sauvés si, à ce moment, un maître leur avait montré, sur le problème même qui les décourageait, *pourquoi* ils n'arrivaient pas à le résoudre ; si au lieu de leur donner la solution de ce problème, solution qui leur reste d'autant plus étrangère qu'elle est plus élégante et concise, il leur avait indiqué, à la clarté confuse du but, le chemin qui mène vers cette solution, s'il leur avait dit pourquoi ce chemin-là était sans doute le vrai ; si, tout le long, tantôt les précédant, tantôt les suivant, il les avait encouragés et soutenus. Autant qu'un texte imprimé peut remplacer la parole vivante, la note de M. Hadamard sera, pour les commençants, ce maître-là.

(1) On ne saurait trop recommander, à ce point de vue, le recueil de problèmes de M. Petersen, qui a été composé avec un art consommé. A ces problèmes, M. Petersen a joint d'ailleurs d'excellents conseils, mais qui se rapportent plutôt aux *méthodes particulières* qu'à la méthode en général.

A quelques lecteurs superficiels, elle paraîtra composée de truïsmes. Dégager des truïsmes, c'est peut-être la vraie besogne du philosophe. Qu'une règle semble évidente à celui qui est accoutumé à l'appliquer, c'est la preuve que la règle est bonne ; c'est l'habitude même qui confère à cette règle son caractère d'évidence, et la facilité avec laquelle on l'applique qui la fait paraître inutile. Cette facilité n'a pas été acquise sans efforts : plus tôt on aura une conscience claire de la règle, moins on fera d'efforts stériles. Apprendre à travailler utilement, c'est le moyen sûr d'apprendre à aimer le travail, et le bénéfice est moral autant qu'intellectuel. Je ne serais pas étonné que M. Hadamard ait eu quelque arrière-pensée de ce genre, qui l'a soutenu quand il a écrit sa Note, et l'a décidé à braver des plaisanteries faciles.

C'est la partie de la note intitulée « Théorèmes à démontrer » qui est la plus importante. L'auteur réduit à trois les règles à appliquer.

1° *Substituer les définitions aux définis*, « ce qui, disait Pascal, ne change jamais le sens du discours ». L'illustre écrivain n'a pas craint d'insister sur cette règle dans son *Art de persuader*. Même dans sa généralité et sa banalité, elle est bonne à répéter; l'expérience le montre assez; mais M. Hadamard lui donne une portée considérable en regardant comme définition d'une figure toute propriété qui est équivalente à la définition primitive, c'est-à-dire qui appartient à la figure et n'appartient qu'à cette figure. Le cercle, par exemple, peut être regardé comme le lieu des points équidistants d'un point fixe, ou le lieu du sommet d'un angle constant dont les côtés passent par deux points fixes, ou comme le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes soit constant. Toutes ces propriétés, pour me borner à celles-là, peuvent être regardées comme des définitions équivalentes du cercle. S'il entre un cercle dans le théorème qu'il a à démontrer, l'élève devra se les rappeler toutes et choisir celle qui lui paraît se rapprocher davantage de la conclusion.

2° *Se servir de toute l'hypothèse*. Je veux remarquer en passant que cette règle suppose que la question est *bien posée*. C'est sur des questions bien posées que les élèves doivent s'exercer ; ils ont assez à faire à chercher les intermédiaires entre l'hypothèse

et la conclusion, à distinguer nettement *toute* l'hypothèse et les degrés de la démonstration où interviennent les diverses parties de cette hypothèse; M. Hadamard leur conseille avec raison de faire cette dernière recherche sur les démonstrations mêmes des propositions classiques. Quand ils auront été longtemps rompus à cet exercice, quelques-uns apprendront à se poser des questions : c'est là, à proprement parler, le commencement du travail de recherche : heureux ceux qui parviendront un jour à discerner, dans l'infinie complexité des choses, les éléments simples qui permettent de traduire une question physique en un problème mathématique, bien posé. Comment, alors, se servir de *toute* l'hypothèse?... Mais nous voilà bien loin des débuts de la Géométrie. Revenons-y avec la troisième règle de M. Hadamard.

3° *Donner à l'énoncé toutes les formes dont il est susceptible et choisir entre ces formes.* Retourner sous toutes ses faces l'hypothèse et la conclusion, les transformer en hypothèses ou en conclusions équivalentes, de manière à les rapprocher, à saisir deux formes qu'il soit possible de relier par des intermédiaires, voilà, au fond, ce qui reste arbitraire dans le travail de l'étudiant, c'est le champ où s'exerce son libre effort. La première règle, sous sa forme générale consiste à dire : Sachez exactement ce que vous voulez démontrer, sachez le sens des mots; sous la forme plus précise que lui donne l'auteur « passer en revue les diverses définitions », elle contient la troisième règle, puisque, aussi bien, les diverses formes de l'hypothèse et de la conclusion, ce sont les diverses définitions de cette hypothèse et de cette conclusion : encore convenait-il d'y insister, car une *même* définition a plusieurs faces entre lesquelles il faut choisir.

Dans les questions faciles, qui conviennent au débutant, il s'agira seulement de distinguer deux formes de l'hypothèse et de la conclusion qui se recouvrent exactement, ou dont la première enveloppe entièrement la seconde; plus tard, on devra lui donner à démontrer des théorèmes où une forme de l'hypothèse ressemble à une forme de la conclusion et l'attire en quelque sorte; à lui de trouver le lien qui les réunit; plus tard encore, sa vue s'aiguisera, il deviendra capable de saisir des rapports plus lointains et plus cachés, des liens plus nombreux et plus subtils.

C'est sur des exemples multiples et bien choisis, traités avec tous les détails nécessaires, que M. Hadamard montre la valeur des règles qu'il a résumées, la raison du succès quand on les applique comme il faut, les erreurs où l'on tombe quand on les oublie : je suis assuré que ceux qui le suivront pas à pas dans ces exemples seront convaincus de l'utilité de son œuvre.

La seconde partie de la note se rapporte aux lieux géométriques et aux problèmes de construction ; l'auteur explique comment les principes qu'il a développés dans la première partie, doivent être entendus et appliqués dans ces deux sortes de questions ; je ne m'y arrêterai pas.

La troisième partie est la plus « savante » : c'est celle qui, sans doute, a coûté le moins d'effort à l'auteur, et probablement celle qu'il aurait sacrifié le plus volontiers. Il aurait eu tort de le faire. L'extraordinaire développement scientifique auquel nous assistons n'a pas accru la durée de la vie moyenne, ni augmenté la capacité cérébrale des enfants, ni avancé l'âge auquel ils sont en mesure de commencer les études scientifiques : de là la nécessité de condenser ces études, de faire pénétrer plus de choses dans l'enseignement élémentaire, si l'on veut que tous bénéficient de l'accroissement de la science et que quelques-uns deviennent capables d'y contribuer. Les idées que les génies créateurs ont découvertes sur les sommets descendent peu à peu, s'infiltrent dans les éléments, les pénètrent et les renouvellent lentement. Cela est nécessaire, et les admirateurs d'Euclide doivent en prendre leur parti. Dans ce rajeunissement des éléments, il faut du tact et même un peu de timidité : c'est sous forme d'exercices, de remarques incidentes, de compléments, que les idées nouvelles s'introduisent d'abord ; peu à peu, elles arrivent à ne plus effaroucher, elles deviennent plus familières, elles prennent la place qui leur est due dans l'enseignement. Je ne voudrais pas dire du mal des exercices qui n'ont pas d'autre valeur que d'être des exercices : il en faut, et beaucoup ; mais ils doivent être reconnus comme tels et ne doivent ni encombrer l'enseignement classique, ni surcharger la mémoire des étudiants : le bon maître sait choisir de temps en temps des exercices d'une autre nature où pénètre une idée importante, une méthode nouvelle qu'il fera ressortir et dont l'étudiant verra les prolongements. Une remar-

que, faite en passant, peut être comme une fenêtre ouverte sur l'infini de la science.

Une leçon complémentaire, qui retrace à grands traits plusieurs méthodes, qui les relie, qui en montre la puissance, voilà ce qu'est la troisième partie de la note de M. Hadamard. Aucune idée n'a plus d'importance, en mathématiques, que celle de transformation. C'est tout d'abord une idée directrice, c'est elle qui apporte l'ordre dans les choses : comme on l'a dit bien des fois, les propositions du premier, du second, du troisième livre se groupent autour des transformations par translation, par rotation, par homothétie et similitude. La puissance des méthodes de transformation pour la découverte et l'enchaînement des vérités mathématiques est maintenant connue de tous, et les plus simples de ces méthodes sont entrées dans l'enseignement classique. M. Hadamard les rappelle rapidement pour en montrer la portée, pour expliquer en quoi elles se ressemblent, en quoi elles diffèrent.

Mais l'idée de transformation est elle-même dominée par l'idée de *groupe*, et l'auteur a cru que le moment était venu de faire descendre dans les éléments cette notion capitale. Il s'adresse, bien entendu, aux élèves déjà avancés, à ceux qui ont acquis, non pas beaucoup de connaissances géométriques, mais l'habitude du raisonnement géométrique, à ceux qui sont capables de généraliser et d'abstraire, et que la science attire, en dehors des préoccupation d'examen : il leur explique ce que c'est qu'une *forme réduite*, qu'un *invariant*, qu'un *groupe*, comment l'existence des invariants dérive de celle des groupes, par l'intermédiaire des formes réduites, et comment l'existence d'invariants communs à une catégorie de transformations montre que ces transformations forment un groupe. Tous les élèves, assurément, ne liront pas cette troisième partie, et quelques professeurs, peut-être, estimeront qu'elle contient des idées qui ne sont pas à la portée de leurs élèves ; mais ils ne pourront s'empêcher de reconnaître que ces idées, même sans être professées explicitement, permettent, sur quelques points, de donner à l'enseignement une meilleure forme et à quelques propositions élémentaires un sens plus profond.

Jules Tannery (Paris).

RÉFLEXIONS

SUR

LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Il s'agit ici de la Géométrie élémentaire. Tous ceux qui se sont occupés d'enseignement savent quelle est en cette matière l'importance capitale de la première direction donnée à l'esprit, et malgré les études publiées à ce sujet, la matière n'est pas épuisée, tant s'en faut. Parmi les professeurs les plus éminents et ayant les idées les plus personnelles sur ce premier enseignement de la Géométrie, on peut citer le colonel Mannheim, universellement connu des mathématiciens, et qui enseigne la Géométrie descriptive et ses applications à l'Ecole polytechnique de Paris.

Nous aurions été heureux d'obtenir de lui un ou plusieurs articles destinés à nos lecteurs ; mais il s'est confiné, pour ainsi dire, exclusivement dans la publication de travaux purement scientifiques et se montre résolu à persévérer dans cette voie. Comme nous insistions, en lui montrant tout l'intérêt et toute l'utilité que présenterait le développement d'idées fort anciennes, fort enracinées chez lui (et selon nous fort justes), il nous engagea vivement à présenter cet exposé nous-même, et à profiter des conversations fréquentes que nous avions eues avec lui sur cette matière. Il s'offrit même à nous remettre quelques notes, ce qu'il a fait avec sa bienveillance habituelle.

De ces explications nécessaires, il résulte que le présent article n'est pas en réalité de celui qui le signe, et qui fait simplement office d'interprète. Les idées fondamentales qu'on y trouvera développées, appartiennent en propre à l'éminent professeur. Certes, nos lecteurs auraient beaucoup gagné à ce que M. le colonel Mannheim consentît à vaincre sa répugnance pour la rédaction d'articles qui ne sont pas exclusivement scientifiques ; sa pensée aurait assurément été mieux exprimée que dans l'analyse un peu sèche que nous en présentons. Mais nous cherchons

du moins à la présenter fidèlement : à défaut de la forme, le fond subsistera, et c'est l'essentiel.

Il convient d'ajouter que le colonel Mannheim, il y a bien des années déjà, ne se contenta pas d'émettre les doctrines dont il s'agit. Il chercha en outre, et il trouva l'occasion d'en faire une application pédagogique ; et cette expérience ne fit que confirmer ses idées premières. Nous demandons aux professeurs, le cas échéant, d'imiter cet exemple, et nous sommes certain, dans tous les cas, qu'ils trouveront avantage à réfléchir sur la question, après la lecture de cet article.

Lorsqu'un élève commence a s'initier à la Géométrie, soit qu'il s'agisse d'un tout jeune enfant, soit que le commençant ait atteint déjà un certain âge, comme il arrive souvent dans l'enseignement populaire, un premier obstacle se dresse devant lui : c'est la nouveauté du langage. Il entend énoncer une suite innombrable d'expressions, familières au professeur, il voit défiler sous ses yeux un nombre excessif de termes, dont chacun ne se fixe pas immédiatement dans son esprit avec la netteté désirable. A plus forte raison, le commençant ne peut-il suivre, ou plutôt deviner, l'idée qui nécessite l'emploi de ce langage. Dès le début, la mémoire se trouve non seulement en jeu, mais surmenée, harassée, et le découragement s'ensuit.

La première préoccupation de l'instituteur (nous employons ce mot dans son sens le plus élevé et le plus général) doit être de combattre la difficulté que nous venons de signaler, de la supprimer même si c'est possible. Il suffit pour cela de faire dessiner les figures les plus simples de la Géométrie plane, en écrivant toujours le nom de chacune d'elles à côté du dessin qui la représente. En apparence, cette façon de procéder fera traîner les choses en longueur, et produira un retard dans l'enseignement ; en réalité, elle en accélérera la marche, car le temps employé à bien apprendre et à comprendre n'est jamais du temps perdu ; on en retrouve largement, plus tard, le bénéfice.

Ce n'est pas tout. Au lieu de se borner à faire exécuter le dessin des figures, à mesure qu'on les définit, il faut en outre, dès que la chose est possible, faire effectuer par les élèves, certaines constructions faciles. En reproduisant ces constructions plusieurs fois, ils en retiendront le mécanisme et ils apprendront en même

temps, pour ainsi dire sans s'en apercevoir, les termes qu'on emploie pour les guider dans l'exécution des tracés.

Une chose essentielle dans cette première partie de l'enseignement géométrique, c'est de faire exécuter chaque dessin à une *échelle* donnée. Ceci revient à dire que l'idée de *rapport* doit être placée à la base de l'enseignement de la science des grandeurs, au début même de cet enseignement, à l'encontre de la tradition profondément irrationnelle, qui fait reléguer cette notion à la fin de l'Arithmétique, et jusqu'au troisième livre de la Géométrie. Qu'il s'agisse de nombres, qu'il s'agisse de longueurs, l'idée de l'absolu est toujours creuse et vaine ; nous ne pouvons rien, tant que nous n'essayons pas de compter et de mesurer ; pour compter ou mesurer, l'unité nous est nécessaire : le choix de cette unité reste à notre disposition ; mais, une fois qu'elle est choisie, le nombre qui sert à évaluer une collection d'objets, une longueur, ou toute autre grandeur mesurable, ne s'implante dans l'esprit que sous forme de rapport. En Géométrie, pour revenir au sujet qui nous occupe, ce rapport seul nous donne la notion précise des figures, et l'on comprend sans tarder que le choix de l'échelle n'est qu'un choix d'unité. Construire un triangle équilatéral dont chaque côté soit égal à 2, par exemple, est une expression vide de sens ; elle devient au contraire admirablement précise dès qu'on s'est donné l'échelle, c'est-à-dire l'unité de longueur servant à l'exécution du dessin.

Parmi les constructions élémentaires et simples qu'on peut et qu'on doit ainsi faire exécuter au commencant, il convient de signaler les suivantes :

Construire des triangles isosceles ;

Construire un triangle équilatéral ;

Déterminer la bissectrice d'un angle ;

Elever une perpendiculaire sur le milieu d'un segment ;

Elever une perpendiculaire à l'extrémité d'un segment ;

Inscrire un hexagone régulier, un triangle équilatéral, un carré, dans un cercle, etc., etc.

A la suite de ces exercices convenablement gradués, répétés, et pratiqués avec le plus grand soin matériel, l'élève n'aura pas de peine à comprendre ce que sont les données qui permettent d'établir une figure. Cette notion lui viendra d'elle-même en

quelque sorte, car il sera toujours en éveil, dans l'exécution de ses tracés, pour voir si les données qui lui sont fournies sont suffisantes et si elles ne sont pas surabondantes. En cas d'insuffisance, il reconnaît en effet que le tracé ne peut pas s'achever avec précision parce que la figure à obtenir n'est pas complètement définie, si bien qu'il y a alors indétermination. Si les données sont au contraire trop nombreuses, des contradictions en résulteraient, et l'on se trouve en présence d'une impossibilité.

Une fois l'élève arrivé à ce point, on pourra lui dire alors sans explication, car toute explication serait inutile :

Deux figures construites avec les mêmes données, de la même manière et avec la même échelle, sont deux figures égales.

Ceci équivaut à une théorie de figures égales, nous oserions dire à la seule théorie raisonnable des figures égales. N'est-il pas insensé, notamment, de considérer par exemple comme égaux, ainsi qu'on le fait couramment, deux triangles symétriques par rapport à une droite, et de confondre ainsi dans la même appellation des figures qui peuvent être superposées, les unes sans sortir du plan où elles sont tracées, les autres en leur faisant subir un retournement, c'est-à-dire un déplacement à travers l'espace ?

Tout aussi parfaitement, l'élève familiarisé avec les tracés dont nous avons parlé, admettra la définition suivante :

Deux figures construites avec les mêmes données, de la même manière et AVEC DES ÉCHELLES DIFFÉRENTES, *sont deux figures semblables.*

Il saisira très bien que l'une de ces figures est en grand ce que l'autre est en petit. Il aura donné un corps à cette notion banale et pour ainsi dire instinctive, qui nous fait dire de deux figures qu'elles ont la même forme et des grandeurs différentes. Il possédera en un mot les éléments essentiels de la théorie de la similitude.

Ainsi préparé, l'élève pourra dès lors profiter d'un enseignement géométrique normal, comprendre le langage qu'on emploiera et accomplir des progrès. On lui aura préparé le chemin au lieu d'accumuler comme à plaisir les obstacles sur sa route.

C'est exclusivement sur cet enseignement du début que portent les observations de M. le colonel Mannheim que nous venons de

reproduire. C'est en effet la partie la plus essentielle, et nous partageons complètement ses opinions sur ce sujet. Mais, quant au développement ultérieur de l'instruction géométrique, il y aurait encore beaucoup de remarques à faire et beaucoup de critiques à exercer. Soit par la méthode suivie (et dont beaucoup d'auteurs et de professeurs tentent visiblement de se dégager), soit par le choix souvent absurde des innombrables propositions entassées sous le nom de théorèmes, soit par l'omission de notions essentielles qui sont systématiquement passées sous silence, on paralyse les élèves, on anéantit à l'avance les résultats, on se donne beaucoup de peine pour en retirer peu de profit. C'est un sujet sur lequel j'espère pouvoir revenir, non pas dans un article, mais dans vingt peut-être, car le sujet est vaste, sinon inépuisable. Mais ce sujet, je ne veux pas même l'effleurer ici, et je préfère livrer simplement à la méditation des professeurs les réflexions du savant dont j'ai essayé ci-dessus de me faire l'interprète.

C.-A. Laisant.

SUR QUELQUES RAPPORTS
DU CALCUL INTÉGRAL ET DE LA GÉOMÉTRIE [1]

Les applications du calcul intégral élémentaire, à la Géométrie des courbes et des surfaces sont bien connues. Cependant la Géométrie peut être utilisée directement et avec avantage comme principe heuristique et quelquefois comme moyen de démonstration d'anciennes et de nouvelles formules d'intégration; ces dernières en acquièrent une signification immédiatement saisissable, ce qui, au point de vue pédagogique, n'est pas sans importance. Quelques relations de ce genre vont être développées plus bas. Dans la plupart des cas, la preuve en est tellement évidente, qu'elle peut être négligée.

---

[1] Conférence faite le 9 décembre 1898, à la Section des Sciences Mathématiques et Physiques de la *Physikal-Oekonom. Gesellschaft* à Koenigsberg.

Nous commencons par les formules fondamentales de la théorie des quantités irrationnelles quadratiques :

$$(1) \qquad 2\int\sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2} + arc\sin x,$$

$$(2a) \qquad 2\int\sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - l(x+\sqrt{x^2-1}),$$

$$(2b) \qquad 2\int\sqrt{x^2+1}\,dx = x\sqrt{x^2+1} + l(x+\sqrt{x^2+1}).$$

La formule (1) est géométriquement évidente. Considérons un point (x, y), dans le premier quadrant, sur la circonférence du cercle

$$(3) \qquad x^2+y^2 = 1.$$

Traçons le rayon vecteur r, désignons par Σ le secteur de cercle compris entre r et la partie positive de l'axe des y, par J, la surface comprise entre x, y, l'axe positif des y et l'arc de cercle, enfin par Δ le triangle rectangle de côtés x, y, la formule (1) dit assurément que

$$(1') \qquad J = \Sigma - \Delta.$$

Dans le cas d'une ellipse, il ne se présente pas de transformation importante ; des facteurs constants s'introduisent dans les deux membres de (1), mais n'en altèrent pas la signification géométrique. — La formule (2*a*) ou son équivalente (2*b*) se rapporte d'une manière analogue à la figure d'une hyperbole équilatère ou aussi d'une hyperbole quelconque.

Soit

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

l'équation de l'hyperbole, O le centre, S le sommet [1], P (x, y), un point de l'hyperbole que nous pouvons supposer dans le premier quadrant ; soient X, Y les pieds de x, y sur les axes. Le rayon vecteur limite avec OS et l'arc d'hyperbole PS $= s$ un secteur Σ ; x, y sont les côtés d'un triangle rectangle Δ. L'arc s

[1] Au lieu de l'abscisse a du sommet, qui n'est choisie que par raison de commodité, on peut prendre, dans toutes les formules d'intégral, l'abscisse d'un point quelconque de l'hyperbole.

limite avec les coordonnées x et y, et les deux axes, deux surfaces J_x et J_y.

Enfin soient a_1 et a_2 les asymptotes dans le premier et le quatrième quadrant; construisons par P et S des parallèles à a_2 jusqu'à leurs points d'intersection P_1 et S_1 avec a_1 : appelons la surface « A » limitée par s et les segments PP_1, SS_1, P_1S_1 la *surface asymptotique*[1] de s. Les formules (2*a* et 2*b*) expriment comme le montre un calcul simple que

$$(2a)' \quad J_x = \Delta - A. \qquad (2b)' \quad J_y = \Delta + A.$$

Mais inversement, l'existence de cette relation peut être rendue visible au moyen de la Géométrie élémentaire pure. Car d'après une propriété fondamentale de l'hyperbole (qui peut aussi passer pour une définition) les triangles OSS_1 et OPP_1 possèdent la même surface, qui est la moitié du « parallélogramme asymptotique » H de surface constante dans l'hyperbole et égale à $\frac{ab}{2}$.

Mais la surface limitée par s et les segments SO, OP_1, P_1P est décomposée d'abord par x en deux parties Σ et OPP_1, puis d'un autre côté par SS_1 en deux parties A et OSS_1 de sorte qu'on en déduit

$$(5) \qquad \Sigma = A.$$

D'ailleurs la figure montre au premier coup d'œil que

$$(6) \qquad J_y + J_x = 2\Delta. \qquad \Sigma + J_x = \Delta.$$

donc aussi que

$$(7) \qquad J_y - J_x = 2\Sigma. \qquad J_y - \Sigma = \Delta.$$

Relations vraies pour tout arc de courbe PS (non seulement pour un arc d'hyperbole).

Au moyen de (6), (7), on reconnaît que la relation (5) est équivalente à (2*a*)' ou aussi à (2*b*)' et peut enfin prendre la forme

$$(8) \qquad J_y - J_x = 2A.$$

---

[1] Si l'on exécute la même construction, en intervertissant les asymptotes, on obtient une deuxième « surface asymptotique », qui a la même surface que A, comme le montre la figure.

Nous avons donc ce résultat :

« Le théorème de la constance du parallélogramme asymptotique dans l'hyperbole est *équivalent* (1) aux relations (2a)', (2b)', (5), (8) et représente en même temps la valeur des formules intégrantes (2a), (2b) « Y ».

La même figure, ainsi que le calcul permettent de vérifier que l'une quelconque des quatre propriétés (2a)', (2b)' (5), (8) est une caractéristique de l'hyperbole. En effet la différentielle de $J_y - J_x - 2A$ par rapport à x est égale, à un facteur constant près, à la différentielle de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ par rapport à x, comme on s'en aperçoit si on utilise les asymptotes comme axes de coordonnées obliques.

Ce théorème se laisse généraliser.

Soit un système d'axes rectangulaires O, O_y ainsi que deux droites a_1, a_2 également inclinées sur l'axe des x. Si l'on construit d'après l'indication donnée plus haut, la surface A pour tout arc de courbe P S et si l'on cherche toutes les courbes P S pour lesquelles J_x, J_y, A sont liées par une relation linéaire à coefficients constants :

$$nJ_y + mJ_x = kA, \tag{9}$$

on obtient une équation différentielle de la forme :

$$y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}, \tag{10}$$

qui est intégrable par une méthode connue, et inversement la signification géométrique d'une équation différentielle (10) pour des valeurs quelconques de α, β, γ, δ (les signes étant convena-

(1) D'autre part, le théorème dont il s'agit est aussi équivalent aux théorèmes, soit sur l'égalité des deux surfaces asymptotiques, soit sur la propriété dont jouit le segment de tangente compris entre les asymptotes, d'être divisé en deux parties égales, au point de contact, ainsi qu'à ce théorème sur la proportionnalité de la sous-normale à l'abscisse (les signes étant choisis convenablement), puis au théorème qui dit que U est la moitié du triangle D, que forme la tangente avec les asymptotes, enfin dans le cas où les droites sont repoussées comme solution non satisfaisante) au fait que D a, en tous cas, une surface constante. Car toutes ces suppositions conduisent de la même manière, à l'équation différentielle $yy' = k^2 x$. On se rend compte, comment on peut employer le principe fondamental dans les propriétés des courbes.

blement choisis) est une relation (9) dans laquelle les rapports de n, m, k sont déterminés. On remarquera qu'au moyen des formules générales (6), (7) la relation (9) peut être transformée en six formes d'apparence différente, mais équivalentes quant au fond(*).

Considérons exclusivement cette formule générale (6) ou aussi (7).

La première des formules (6) écrite explicitement

$$\int x\,dy + \int dy\,x = xy \tag{6a}$$

n'est pas autre chose qu'une forme particulière de l'intégration partielle, qui pratiquement a pour but de réunir deux par deux, des intégrales dont les fonctions sont inverses.

Cette singularité de la forme n'est cependant qu'apparente. Supposons x et y fonctions d'une troisième variable t ce qui ne change pas du tout la signification géométrique des deux membres de (6a), mais (6a) prend alors la forme :

$$\int x\,\frac{dy}{dt}\,dt + \int y\,\frac{dx}{dt}\,dt = xy \tag{6a'}$$

et l'on reconnaît aussitôt que cela représente la règle générale de l'intégration partielle.

« La loi de l'intégration partielle reçoit ainsi un sens géométrique commun. »

La seconde des formules générales (6) $\Sigma + J_1 = \Delta$ s'écrit dans le calcul intégral

$$\int r^2 d\varphi = xy - 2\int y\,dx. \tag{6b}$$

(*) On déduit de (9) par un calcul facile, les cinq relations :

$$J_1(m+n) - 2m\Delta + 2_2\Lambda = 0, \qquad J_1(m+n) - 2n\Delta - 2_2\Lambda = 0,$$
$$\Sigma(m+n) + \Delta(m-n) - 2_2\Lambda = 0,$$
$$J_1(m-n) + 2m\Sigma - 2_2\Lambda = 0, \qquad J_1(m-n) + 2n\Sigma - 2_2\Lambda = 0,$$

qui restent valables dans les cas d'exception

$$(m=0, \qquad n=0, \qquad \varphi=0, \qquad m+n=0, \qquad m-n=0);$$

On peut encore augmenter le nombre des formes équivalentes, en introduisant les quantités présentées dans la remarque sur la formule (8).

En effet il est facile de démontrer analytiquement que la formule (6*b*) apparaît, quand on introduit dans l'intégrale $\int y\,dx$ les coordonnées polaires r, φ au lieu des rectangulaires x, y. Car si r' représente la différentielle de r par rapport à φ on a immédiatement :

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \int y dx = \int r\sin\varphi\,(-r\sin\varphi + r'\cos\varphi)\,d\varphi \\ J_y &= \int x dy = \int r\cos\varphi\,(r\cos\varphi + r'\sin\varphi)\,d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

d'où par soustraction :

$$J_y - J_x = \int r^2 d\varphi \tag{12}$$

et ainsi, à cause de (6*a*), on obtient la relation (6*b*) dont il est question. Le calcul précédent est de nouveau susceptible d'une généralisation importante. Si l'on traite de même manière les intégrales $\int x^m y^n dx$ et $\int x^m y^m dy$, on obtient de suite au moyen de (6*a*)

$$(m+1)\int r^{m+n+1}(\cos\varphi)^m(\sin\varphi)^{n-1}d\varphi = x^{m+1}y^n - (m+n+1)\int x^m y^n\,dx. \tag{13}$$

m, n signifient ici des exposants quelconques (excepté $m+1=0$) et y est une fonction quelconque de x. La formule est susceptible de nombreuses applications ; si, en particulier, m et n sont des nombres entiers, x et y liés par une équation du deuxième degré, l'intégrale de droite se ramène par des méthodes connues aux fonctions logarithmiques et cyclométriques. La même méthode régit aussi l'intégrale de gauche qui représente une classe étendue d'intégrales trigonométriques, difficiles à effectuer directement.

Dans le cas où $m=0$, $n=2$ on obtient la formule utile aux surfaces de révolution :

$$\int r^3 \sin\varphi d\varphi = xy^2 - 3\int y^2 dx \tag{14}$$

cette formule peut aussi se déduire de la règle de Guldin).

On se demandera si la deuxième méthode principale du calcul intégral élémentaire, la méthode, dite de substitution, n'est pas aussi susceptible d'une représentation géométrique simple.

Il est bon de prendre pour point de départ la règle équivalente du calcul différentiel, c'est-à-dire, si x, y, z sont des fonctions de t, la formule :

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 1. \tag{14}$$

Le point P (x, y, z) parcourt une courbe gauche; si l'on projette la tangente en P sur les plans des (xz), (zy), et si l'on désigne par γ_x, β_z, α_y les angles de ces projections avec la direction positive des axes des x, des y et des z, la relation (14) dit que :

$$tg\gamma_x \, tg\beta_z \, tg\alpha_y = 1. \tag{15}$$

Mais c'est une formule générale (jusqu'ici peu considérée, semble-t-il) des éléments de la géométrie analytique. En effet si une droite quelconque, dans l'espace, formant avec les axes les angles α, β, γ, est projetée comme ci-dessus, on a immédiatement :

$$tg\gamma_x = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \; tg\beta_z = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \; tg\alpha_y = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}, \tag{16}$$

d'où l'on déduit (15); inversement il est clair que (15) est la condition nécessaire et suffisante pour que trois directions sur les plans de coordonnées soient la projection d'une direction dans l'espace. Remarquons, en passant, que la détermination d'une direction dans l'espace, par les angles $\gamma_x, \beta_z, \alpha_y$ offre plusieurs avantages sur la méthode ordinairement employée, qui consiste à utiliser les angles γ, β, α; il en est de même en Géométrie descriptive et surtout dans les cas où le sens de la direction n'importe pas [1].

La formule (15) peut encore avoir une autre signification. Si à la place des angles $\gamma_x, \beta_z, \alpha_y$, on introduit leurs suppléments, c'est-à-dire les angles des projections avec les axes négatifs, ou bien encore leurs compléments c'est-à-dire les angles des projections avec les axes négatifs des y, des x et des z, et si l'on

[1] Ainsi par exemple dans la détermination des différents angles W dans l'espace, quand il existe une ou plusieurs relations entre la quantité W, et les valeurs des trois angles de projection; particulièrement quand les quatre angles sont donnés d'une manière quelconque.

désigne les tangentes de ces six angles par t_1, t_2, t_3, t'_1, t'_2, t'_3, on aura les relations :

$$(17) \qquad t_1 t_2 t_3 = -1, \quad t'_1 t'_2 t'_3 = -1, \quad t_1 = \frac{1}{t'_1}, \quad t_2 = \frac{1}{t'_2}, \quad t_3 = \frac{1}{t'_3}.$$

On obtient ainsi une généralisation directe de la notion du rapport anharmonique dans le cas de deux variables indépendantes.

En effet, la relation (17) existe entre les 6 valeurs d'un rapport anharmonique; il est vrai qu'il s'en présente une autre (formant avec celle-ci un rapport anharmonique) qui peut s'écrire, symétriquement, au moyen des angles α, β, γ :

$$(18) \qquad \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0.$$

En d'autres termes : pour un faisceau de rayons pris dans le plan $x + y + z = 0$, et dont le sommet est à l'origine O, les six quantités t, t' représentent les six valeurs du rapport anharmonique, comme paramètres [1] du faisceau de rayons.

Si la condition (18) disparaît, les quantités t, t' deviennent les paramètres du faisceau de rayons O.

W. Franz Meyer (Königsberg).

(Traduit de l'allemand par Alph. Bernoud.)

DE LA NOMOGRAPHIE

ET DE LA NÉCESSITÉ DE L'INTRODUIRE DANS L'ENSEIGNEMENT

Quel qu'il soit, physicien, chimiste, astronome, ingénieur, peu importe, un homme de science qui n'est pas théoricien pur doit très souvent rechercher les résultats numériques auxquels con-

[1] Cela ressort immédiatement du fait que les six valeurs d'un rapport anharmonique, quand l'une d'elles est égalée au carré de la tangente d'un angle, coïncident avec les carrés (pris avec le signe convenable) des six fonctions trigonométriques fondamentales. Ceci a un rapport très étroit avec la définition d'un angle dans la géométrie projective.

duit l'application de diverses formules générales, variables d'une science à l'autre et considérées comme acquises. Le financier, le personnel des Compagnies d'assurance ou de retraite, etc., sont dans le même cas, de sorte qu'il existe toute une pléiade d'hommes, même instruits, obligés de consacrer un temps précieux à répéter fréquemment des calculs d'ordinaire longs et fastidieux.

Ajoutons que dans l'immense majorité des cas de la pratique, on préfère de loin une solution commode et rapide à une autre plus rigoureuse et moins intuitive. Il en est surtout ainsi dans l'art de l'ingénieur, où les solutions approchées sont d'autant plus indiquées que l'on ne connaît que d'une façon peu précise les valeurs qu'il faut attribuer aux quantités fournies par l'expérience et sur lesquelles les calculs sont fondés.

Pour ces motifs, on a été amené, depuis longtemps, à rechercher les moyens les plus propres à simplifier les calculs, quand même l'exactitude du résultat en souffrirait quelque peu. Les procédés imaginés à cet effet sont au nombre de quatre, savoir : les tables numériques ou barèmes, les machines à calculer, le calcul graphique et les abaques ; passons-les rapidement en revue.

Le calcul de celui qui doit appliquer une formule est d'abord simplifié s'il peut trouver, dans des tables construites *ad hoc*, les résultats numériques que donne cette formule pour des valeurs des données convenablement choisies ; la table fournit alors, soit directement, soit par interpolation, le résultat de la formule pour n'importe quel cas particulier.

Les divers formulaires en usage renferment une quantité de tables de ce genre, dont le nombre s'accroît constamment avec les besoins de la pratique. On peut regarder les tables de logarithmes comme rentrant dans la catégorie actuelle.

L'usage de l'une ou de l'autre des machines, dites machines à calculer, facilite considérablement aussi les applications numériques. La règle à calcul est de loin la plus employée de ces machines. Sur ma demande, M. l'ingénieur Daubresse, chef des travaux graphiques à nos écoles spéciales, a bien voulu, il y a quelques mois à peine, en expliquer l'usage et le maniement à notre jeune cercle mathématique et dorénavant M. l'ingénieur Suttor, chargé des exercices mathématiques, remplira la même mission, chaque année, auprès de nos futurs candidats ingénieurs

et candidats en sciences physiques et mathématiques; ici, jusqu'à présent, les élèves des dernières années d'ingénieurs étaient seuls initiés à l'emploi de la règle.

Parmi les moyens de simplification de calcul dont on dispose actuellement, il faut distinguer d'une façon particulière les méthodes graphiques. C'est parce que ces méthodes sont plus expéditives et plus intuitives que les procédés analytiques et qu'elles fournissent des résultats suffisamment exacts pour les besoins de la pratique, qu'une préférence marquée leur a été accordée pendant ces dernières années, tant dans les écoles d'ingénieurs que dans les ateliers de construction.

Les divers procédés, signalés jusqu'à présent, les seuls d'un usage courant, ont un inconvénient commun : chaque application numérique exige encore un calcul ou une épure spéciale, donc demande encore un temps parfois considérable. Il est bien vrai que les hommes supérieurs qui ont la direction d'un grand établissement scientifique ou industriel ne s'astreignent pas à faire eux-mêmes de pareilles opérations et que des subalternes, calculateurs ou dessinateurs, sont ordinairement chargés de cette besogne essentiellement mécanique. C'est ainsi que la plupart des ateliers de construction comprennent un bureau technique, composé surtout de dessinateurs et qu'à côté des grands observatoires, il existe des bureaux de calculs, dont l'unique mission est de former les éphémérides astronomiques ou nautiques, exécuter des calculs d'orbites, etc.

Quoi qu'il en soit au sujet de ce dernier point, le défaut commun des méthodes précédentes est aggravé par ce fait qu'une même application est souvent effectuée, quelquefois au même instant, par un grand nombre de calculateurs ou de dessinateurs, lorsqu'il eût suffi qu'un seul fît l'opération.

Pour éviter qu'il en soit ainsi, il existe un moyen simple, mais qui n'est à conseiller qu'à l'occasion de formules fréquemment appliquées; il consiste à calculer d'avance et à publier au besoin les résultats auxquels ces formules peuvent conduire pour des valeurs des données suffisamment rapprochées et ne dépassant pas certaines limites. Très précieuse en toute circonstance, une pareille publication offre l'avantage considérable de fournir aussi le résultat à un moment où tout autre procédé aurait été inap-

plicable : ce peut être le cas du marin en détresse ou de l'officier militaire en présence de l'ennemi.

Quant à la manière dont il convient de réunir ainsi les principaux résultats d'une formule usuelle, d'ordre technique, le mieux est de former, non un barème, mais un tableau graphique coté ou, comme on dit, un *abaque*[1]. L'abaque constitue donc un quatrième moyen de simplification de calcul, particulièrement commode, puisqu'un abaque renferme en lui-même toutes les solutions qui peuvent se rencontrer en pratique lors de l'application d'une formule déterminée ; une fois un pareil tableau graphique dressé pour une certaine formule, l'application à un cas particulier est réduite au plus grand degré de simplicité, à une lecture faite sur l'abaque lui-même.

C'est à la fin du siècle dernier qu'on paraît devoir faire remonter le premier abaque et depuis lors, on en avait certes construit un grand nombre, de types divers : ce n'est cependant qu'en 1891 que les principes qui les concernent ont été réunis par M. l'ingénieur d'Ocagne, professeur à l'École des ponts et chaussées de Paris, en un corps de doctrine auquel il a donné le nom de *Nomographie*[2]. Considérée à un point de vue très général, la nouvelle science détermine et classe, dans sa partie théorique, tous les modes possibles de représentation plane des équations ; elle recherche ensuite, dans sa partie pratique, quels sont ceux de ces modes qui sont applicables à une équation donnée et quel est celui d'entre eux qui, dans le cas considéré, présente le plus d'avantages. Un an après l'apparition de la « Nomographie », l'Institut de France, dont la compétence en matière scientifique est universellement appréciée, lui accordait l'un de ses prix et reconnaissait ainsi officiellement la haute valeur du travail de M. d'Ocagne.

Depuis 1891, les questions relatives aux abaques n'ont cessé d'être étudiées avec ardeur, tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique, non seulement par le savant auteur de la brochure de 1891, mais encore par beaucoup d'autres ingénieurs, des astronomes, etc. Qu'il me suffise de signaler le plus impor-

---

[1] Du mot ἄβαξ, damier.

[2] De νόμος, loi.

tant et le plus récent des travaux publiés dans cet ordre d'idées : c'est un ouvrage d'ensemble, comprenant près de 500 pages, dû encore à la plume infatigable de M. d'Ocagne et où, à côté des principes, il a su réunir un très grand nombre d'applications extrêmement intéressantes et variées; ce volume est cinq fois plus gros que la brochure de 1891. A mon avis, le nouveau *Traité de Nomographie* (1) est un ouvrage d'un prix inestimable, qui devrait se trouver entre les mains de quiconque porte intérêt aux applications numériques. Mais ce n'est pas le lieu d'entrer dans des détails concernant la théorie ou les applications des abaques ; un article spécial doit être consacré, dans cette revue même, au récent *Traité* de M. d'Ocagne.

Personnellement, quand j'enseignais la mécanique appliquée, j'avais déjà été vivement frappé de certains abaques relatifs à cette science. L'apparition de la brochure de 1891 n'en a pas moins été pour moi une révélation et à partir de cette époque, je suis devenu un chaud partisan des abaques. Auprès de mes collègues, auprès de mes élèves, dans mes écrits, partout je fais de la propagande. L'année dernière, sur ma demande, M. Goedseels, actuellement administrateur-inspecteur de l'observatoire royal de Belgique et à qui la nomographie est redevable d'un de ses chapitres les plus généraux, venait donner à nos élèves-ingénieurs actuels une très intéressante conférence sur les abaques ; cette conférence fut ensuite, dans l'intérêt des aînés, publiée dans le *Bulletin de l'Union des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Louvain* (2). Cette année, sur mon conseil, un jeune étudiant plein d'avenir, M. Dehairs, donnait à son tour à ses condisciples en sciences mathématiques, une causerie sur le même sujet et fait plus significatif, M. l'ingénieur Suttor ouvrait à l'Institut préparatoire annexé à nos écoles spéciales un véritable cours de nomographie.

Aujourd'hui, en effet, il ne suffit plus que quelques ingénieurs

---

(1) Grand in-8°, Gauthier-Villars, 1899.

Le lecteur trouvera plus loin, dans la *Bibliographie*, une analyse de ce Traité rédigée par M. Lacombe, professeur à l'École polytechnique de Zurich.

La Direction.

(2) Troisième fascicule, 1898. Également dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1898 ; tirage à part chez M. Lagaert, Bruxelles.

ou professeurs isolés fassent apprécier, dans des cercles restreints, les avantages que présentent les abaques. La nomographie possède d'autres droits. Elle constitue tout un corps de doctrine reposant sur des principes sûrs et dont l'exposé, surtout si l'on se borne au côté pratique, n'exige guère que les notions les plus élémentaires de Géométrie analytique plane ; quoique jeune encore, elle a un passé glorieux et on peut lui prédire, sans crainte de se tromper, l'accueil le plus sympathique auprès de tous les hommes techniques.

Mais il faut compter avec la nature humaine qui, particulièrement à un certain âge, est rebelle à tout nouveau genre d'études ; on ne peut espérer qu'un ingénieur en position, généralement absorbé par des questions très diverses, ait le goût et sache trouver le temps de compléter des connaissances théoriques déjà lointaines, quand même il reconnaîtrait que ce complément, une fois acquis, pourrait lui être fort utile.

Pas de doute : c'est à l'école que doivent s'acquérir les notions théoriques essentielles, surtout si elles sont élémentaires et d'ordre général et si leur introduction dans l'enseignement ne doit pas prendre une part trop large du temps ordinairement réservé à d'autres matières. Ces conditions étant toutes réalisées par la nomographie, on ne peut hésiter davantage à l'inscrire au programme des cours, spécialement parmi les matières destinées au futur ingénieur. C'est l'ingénieur qui doit, en effet, profiter le premier du nouvel enseignement ; il se contente souvent d'approximations relativement grossières et pour lui, la solution fournie par l'abaque sera d'ordinaire la solution définitive.

Ce qui ne veut pas dire que la nomographie ne puisse être très utile aussi au mathématicien, à l'astronome, au financier ; seulement, pour ceux-ci, comme ils ont généralement besoin d'une plus grande approximation dans les résultats, la solution que donne l'abaque ne sera souvent qu'une première indication, d'autant plus précieuse, il est vrai, qu'on aura affaire à des calculs plus longs et plus pénibles et où une erreur est aisément commise.

Parmi les premiers initiés à la nouvelle théorie, ceux qui ont une aptitude spéciale pour le calcul et le dessin pourront se faire constructeurs d'abaques. Entre leurs mains, une formule générale se traduira en abaque, sans qu'il soit nécessaire qu'ils se

préoccupent de la signification des lettres que renferme la formule ; il suffit que celle-ci soit assez simple et que les variables, en nombre quelconque, oscillent entre des limites assez resserrées. Pour plus de facilité pour l'homme technique, les abaques pourront être accompagnés d'une légende explicative, indiquant leur mode d'emploi.

Reste un dernier point à examiner : dans quelle année d'études convient-il d'établir le cours d'abaques, ou mieux de nomographie ? On pourrait très bien le placer dans la classe de mathématiques spéciales ou première scientifique, comme l'a fait cette année, avec grand succès, M. l'ingénieur Suttor à notre Institut préparatoire ; en sept leçons d'une heure, les élèves ont pu y acquérir une idée déjà satisfaisante des principaux types d'abaques. Je trouve toutefois préférable de ne pas trop écarter les leçons renfermant les principes de la nomographie des cours pratiques qui peuvent et doivent même appliquer ces principes. C'est pour ce motif qu'appuyé par certains collègues, je viens de demander qu'un pareil cours soit établi, à raison de quinze heures de leçons, en deuxième année de notre école d'ingénieurs, donc à côté des cours de calcul différentiel et intégral, de mécanique analytique et de graphostatique. Dans ma pensée, ce cours, qui doit être également suivi par les élèves de sciences physiques et mathématiques, doit comprendre, outre l'exposition des principes, un certain nombre d'exemples, puisés dans des domaines familiers aux élèves et destinés à montrer à quel degré de simplicité beaucoup d'applications sont réduites par l'emploi d'un abaque ; parmi ces applications, on peut citer certains abaques de la multiplication et des intérêts composés, celui des lentilles, l'abaque de la distance sphérique, les abaques des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré, divers abaques de trigonométrie rectiligne ou sphérique, etc., etc. Les applications plus spéciales, astronomiques ou techniques, doivent être réservées aux professeurs spécialistes et enseignées par eux dans leurs cours respectifs, après le cours général de nomographie.

Grâce à la bienveillance éclairée de M^gr^ Hebbelynck, recteur de l'Université, mon projet n'a pas tardé à recevoir une solution favorable, de sorte que l'Université de Louvain possédera, dès le

mois de novembre prochain, un cours de nomographie générale, peut-être le premier en date. Puisse cet exemple trouver bientôt de nombreux imitateurs !

Ern. Pasquier.

Louvain, le 31 juillet 1899.

REMARQUES
SUR LES COORDONNÉES POLAIRES

On considère d'ordinaire les coordonnées polaires d'un point M du plan comme deux nombres ρ et ω — appelés l'un *rayon vecteur*, l'autre *anomalie* ou *azimuth* — dont le premier est le nombre positif qui mesure la distance entre M et un point fixe O (le *pôle*) tandis que le second représente l'angle, compté dans un sens déterminé, formé par la demi-droite OM avec une demi-droite fixe *a* (l'*axe polaire*) issue du point O. On ajoute que dans ce système chaque point est l'intersection de deux lignes coordonnées analogues ou correspondantes aux axes dans le système cartésien ; ces lignes sont un cercle dont O est le centre, et une droite qui passe par le point O.

Cette définition est parfaitement légitime et ne présente aucune imperfection si on l'applique à des points isolés ; c'est bien celle qu'adoptent tous les traités de Géométrie analytique. On a l'habitude de la légitimer davantage en établissant les relations entre les coordonnées polaires qu'on vient de définir et les coordonnées rectangulaires dont O est l'origine et *a* l'axe des abscisses. On ajoute encore que, si l'on a recours à la représentation des nombres complexes sur les points du plan, la première coordonnée polaire du point M n'est que le *module* ou *valeur absolue* du nombre complexe représenté par le point M, tandis que la seconde en est l'*amplitude* ou l'argument.

En se servant de la définition citée, il est aisé de résoudre les problèmes fondamentaux qu'offre l'analyse infinitésimale des courbes planes, tels que le tracé de la tangente, le calcul de

l'aire et la détermination du cercle osculateur, en un mot toutes les questions où il suffit de considérer un petit arc de la courbe. Mais lorsqu'on veut considérer et étudier toute une courbe on est arrêté par une difficulté extrêmement grave. En effet, comme en coordonnées cartésiennes on représente une courbe par une équation telle que

$$\varphi(x, y) = 0,$$

dans le système polaire on devra employer dans le même but une équation de la forme

$$f(\rho, \omega) = 0. \qquad (1)$$

Or il est bien clair que si l'on fait varier ω depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il arrivera en général que dans certains intervalles ρ sera positif, comme il doit, mais dans certains autres il acquerra des valeurs négatives, ce qui est une contradiction patente avec la définition d'où nous sommes partis. Cette circonstance n'a pas échappé aux meilleurs auteurs qui ont exposé la méthode des coordonnées ; mais ils n'ont pas approfondi la question, ils se sont bornés à conseiller, pour vaincre cet obstacle, de passer à un système cartésien. C'est une véritable fuite, qui fait croire aux commençants que le système polaire est bien moins puissant que le système cartésien, dont il semble être l'esclave ; c'est, d'un autre côté, une faute méthodologique, car la logique me semble imposer que, lorsqu'on a commencé à traiter un certain sujet à l'aide d'un certain système de coordonnées, on doit conserver ce système jusqu'à la fin. Mais il y a pire encore : l'empressement de revenir aux coordonnées cartésiennes empêche bien souvent de tirer tout le parti possible de la simplicité et de l'élégance des équations polaires, il ne permet pas d'étudier en même temps toutes les courbes d'une même famille, lorsque pour certaines valeurs du paramètre la courbe correspondante est algébrique, tandis que pour d'autres elle est transcendante (1).

On peut éviter tous ces inconvénients en appliquant le fécond principe des signes en Géométrie, par une simple modification

(1) Je cite comme exemples les spirales sinusoïdes $\rho^n = a^n \cos n\omega$, n étant le paramètre.

de la définition que nous avons rappelée au début de cet article : c'est ce que nous allons montrer.

Considérons dans un plan un point fixe O et une demi-droite a issue du point O ; imaginons qu'une demi-droite r tourne autour de O en partant de la position a dans le sens considéré comme positif ou dans le sens opposé. Pour chacune de ses positions on trouvera sur la demi-droite r une infinité de points (nous les indiquerons par la lettre M) et un nombre égal se trouvera sur le prolongement de r, ou, comme nous préférons dire, sur la demi-droite complémentaire $\overline{r}$ (nous les représenterons par $\overline{\mathrm{M}}$). Cela posé, pour fixer la position d'un point M on prendra deux nombres ρ, ω, le premier toujours positif, assez définis par les égalités :

$$\rho = + \text{ longueur } \overline{\mathrm{OM}}, \quad \omega = \text{angle } (ar) ;$$

au contraire la position d'un point $\overline{\mathrm{M}}$ est déterminée par deux nombres analogues, dont le premier est toujours négatif ; ils sont caractérisés par les relations :

$$\rho = - \text{ longueur } \overline{\overline{\mathrm{OM}}}, \quad \omega = \text{angle } (ar).$$

Par conséquent, tous les points d'une demi-droite auront la coordonnée ρ positive, tandis que tous ceux de la demi-droite complémentaire l'auront négative ; et *vice versa* un point appartiendra à une demi-droite ou à sa complémentaire suivant que sa coordonnée ρ sera positive ou négative. Quant à la coordonnée ω, elle sera la même pour tous les points d'une demi-droite ; elle sera positive ou négative suivant que la demi-droite mobile, pour arriver à la position considérée, aura tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif.

Ces définitions et conventions font voir que : 1° si une demi-droite r_0 fait avec a, dans un sens déterminé, l'angle ω_0, la demi-droite complémentaire $\overline{r}_0$ fera avec le même axe et dans le même sens un angle égal à $\omega_0 \pm \pi$; 2° la demi-droite r pour atteindre la position r_0 peut être censée avoir tourné toujours dans le sens positif. Il s'ensuit que pour déterminer la position d'un point par nos coordonnées polaires, on pourrait toujours employer deux nombres positifs, au lieu de ceux auxquels mènent

directement les remarques précédentes. Mais cette substitution artificieuse est contraire à la nature même des choses, comme l'est, par exemple, la considération du logarithme principal, que Cauchy proposa et que personne n'emploie plus aujourd'hui.

Elle pourra *peut-être* réussir utilement, lorsqu'il s'agira de points isolés ou bien si l'on veut abandonner les coordonnées polaires pour s'adonner aux coordonnées cartésiennes ; mais, en général, elle rend plus compliquée la résolution des questions relatives aux courbes. Cela arrive particulièrement lorsqu'il s'agit d'un problème, qui pour le géomètre a une importance hors ligne, quoique ceux qui les premiers ont cultivé de la Géométrie analytique en aient méconnu la valeur, c'est-à-dire le problème de découvrir quelle forme a une courbe déterminée par une équation du type (1). Pour résoudre ce problème, c'est-à-dire pour construire la courbe donnée, la méthode qui découle de ce qui précède (et dont Archimède a fait — *mutatis mutandis* — la première application dans ses recherches sur la spirale qui porte son nom) est la suivante : Imaginons que la demi-droite r tourne autour du pôle O, en partant *par exemple* de la position a, *dans un sens déterminé et après dans le sens opposé ;* soit ω_0 l'angle que forme a avec une de ses positions r tout à fait arbitraire ; l'équation $f(\rho, \omega_0) = 0$ donnera pour ρ un certain nombre de valeurs positives $\rho_1, \rho_2, \ldots$ et un certain nombre de négatives $-\overline{\rho}_1, -\overline{\rho}_2, \ldots$; aux premières correspondent les points $M_1, M_2, \ldots$ de la demi-droite r_0 tels que

$$\overline{OM_1} = \rho_1, \ \overline{OM_2} = \rho_2, \ldots$$

aux secondes les points $M_1, M_2, \ldots$ de la demi-droite complémentaire tels que

$$\overline{\overline{OM_1}} = \rho_1, \ \overline{\overline{OM_2}} = \rho_2, \ldots$$

Tous ces points $M_1, M_2, \ldots \overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots$ appartiennent à la courbe (1).

En considérant toutes les positions possibles de la demi-droite r, on obtiendra tous les points de la courbe (1). On peut remarquer que la rotation de la droite r doit en général être effectuée sans fin *dans les deux sens*, lorsqu'il s'agit d'une courbe transcendante, mais lorsque la courbe (1) est algébrique, le mouvement pourra être arrêté après un certain nombre de tours,

car, en le continuant, on retomberait sur des points de la courbe déjà tracés.

Pour donner à ce que nous venons d'exposer, toute la clarté désirable, il est bon d'en faire application à quelques exemples.

Commençons par un cas très simple. Soit donnée l'équation

$$\rho = 2\,R \sin \omega ; \qquad (2)$$

elle montre que si $0 < \omega < \pi$ on a $\rho > 0$,

tandis que si $\pi < \omega < 2\pi$ on a $\rho < 0$:

elle montre aussi qu'aux valeurs $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + 2\pi$ correspond la même valeur de ρ. Cela prouve que pour obtenir la courbe représentée par l'équation (2) il suffit de faire accomplir à la demi-droite r un tour complet ; pour chaque position de la demi-droite génératrice appartenant aux premiers demi-tours, on a un point de la courbe, mais pour chaque position de la demi-droite relative au second demi-tour on a un point sur la demi-droite complémentaire (1). On peut ajouter la remarque que les valeurs $\omega = \omega_0$ et $\omega = \pi - \omega_0$ donnent pour ρ des valeurs égales. Par conséquent la courbe est composée d'un seul arc appartenant au demi-plan qui se trouve au-dessus de l'axe polaire, arc qui est symétrique par rapport à la droite menée par le pôle perpendiculairement à l'axe polaire. C'est ce qu'il est très aisé de vérifier en remarquant que la courbe (2) n'est que le cercle de rayon R tangent au pôle à l'axe polaire et dont le centre est au-dessus de cet axe.

La courbe représentée par l'équation (2) appartient à la classe des « rhodonées » de G. Grandi ou « rosaces », dont $\rho = 2R \sin n\omega$ est l'équation générale. Or cette classe (qui comprend des courbes algébriques et des courbes transcendantes et dont l'étude générale au moyen des coordonnées cartésiennes est malaisée) peut très bien servir à prouver l'utilité des nouvelles coordonnées polaires; en particulier elle nous fournira le second exemple des considérations précédentes.

---

(1) C'est du reste un point déjà trouvé pendant le premier demi-tour.

Supposons $n = \frac{1}{2}$; nous avons alors la courbe

$$\rho = 2R \sin \frac{\omega}{2} \qquad (3)$$

Aux valeurs $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0 + 4\pi$ correspond la même valeur de ρ : donc deux tours de la droite génératrice sont suffisants pour décrire complètement la courbe. En outre l'équation (3) fait voir que

si $\qquad 0 < \omega < 2\pi \quad$ on a $\quad \rho < 0$

si $\qquad 2\pi < \omega < 4\pi \quad$ on a $\quad \rho < 0.$

Cela prouve que sur chaque demi-droite du premier tour il existe un point de la ligne dont il s'agit ; le lieu géométrique de

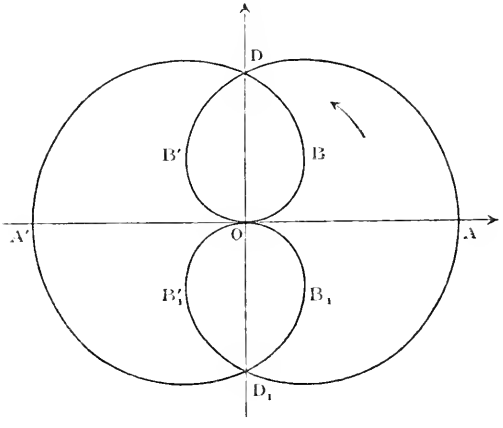


Fig. 1.

tous ces points est un arc fermé $OBDA'D_1B_1O$ tangent à l'axe polaire (fig. 1). Au contraire sur aucune demi-droite du second tour on ne trouve un point de la courbe, mais il en existe un sur le complémentaire de chacune de ces demi-droites ; tous ces nouveaux points engendrent un autre arc fermé $OB'_1D_1ADB'O$ (symétrique par rapport à O du précédent) qui complète la courbe. Cette courbe a deux points doubles D et D_1 et au pôle un point de contact de deux branches ; elle a deux axes de symétrie orthogonaux entre eux, car à ses valeurs de ω, telles que ω_0, $2\pi - \omega_0$, $2\pi + \omega_0$ correspondent pour les rayons vecteurs des valeurs arithmétiquement égales. Comme contrôle de ces

conclusions, remarquons que, si on passe aux coordonnées cartésiennes, l'équation (2) devient

$$(x^2 + y^2)^3 - 4R^2 (x^2 + y^2)^2 + 4R^2 y^2 = 0,$$

dont la discussion mène aux mêmes conséquences relatives à la forme de la courbe que nous avons obtenues plus haut.

Ces exemples pourraient être multipliés à l'infini. Nous nous bornerons à ces deux qui nous semblent suffisants pour notre but. Mais, avant de finir, nous croyons nécessaire d'ajouter une remarque sur certaines spirales bien connues; de cette remarque il s'ensuivra que l'idée ordinaire qu'on a de leur forme est, du point de vue où nous sommes placés, incomplète sinon fautive.

La définition ordinaire de la spirale d'Archimède se traduit par l'équation

$$\rho = a\omega. \qquad (4$$

On peut toujours supposer $a > 0$, car, dans le cas contraire on écrira $\rho = -a(-\omega)$ et, en changeant le sens positif des angles on retombera sur l'hypothèse $a > 0$.

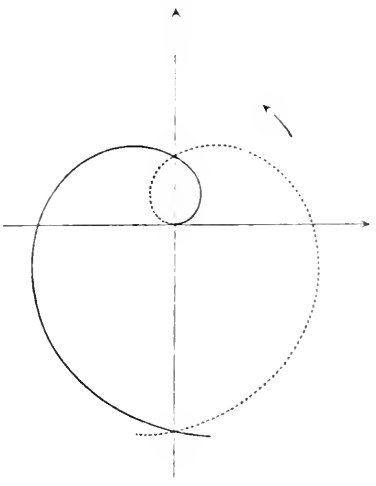


Fig. 2.

En faisant varier ω depuis 0 jusqu'à $+\infty$, on voit que la courbe part du pôle, autour duquel elle fait un nombre infini de tours en s'en éloignant sans borne; on arrive de cette manière à l'arc tracé en ligne pleine dans la figure 2 : on le considère d'ordinaire comme composant toute la courbe représentée par l'équation (4). Mais si après, on fait varier ω depuis 0 jusqu'à $-\infty$, on obtient sur le prolongement de chaque demi-droite un point de la courbe, et tous ces nouveaux points forment une nouvelle branche, symétrique de la précédente par rapport à l'axe polaire *secondaire* [1] : c'est la branche pointillée de la figure 2.

[1] Qu'il me soit permis pour abréger de donner ce nom à la demi-droite qui fait avec l'axe polaire dans le sens positif un angle droit.

Or il est évident qu'en voulant laisser à l'angle variable ω toute la liberté à laquelle il a droit, on devra le faire varier entre $-\infty$ et $+\infty$; en conséquence (contrairement à ce qu'on continue de faire) comme *représentation géométrique* COMPLÈTE de l'équation (4) nous considérons l'ensemble des deux branches qu'on voit tracées dans la figure 2. Nous voyons donc que *la spirale d'Archimède est douée d'une infinité de points doubles placés sur l'axe polaire secondaire ;* ils correspondent aux valeurs de ρ exprimées par $\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}a$, k étant un nombre entier nul ou positif.

On prouve d'une manière analogue que parmi les spirales représentées par l'équation

$$\rho = a\omega^n, \tag{5}$$

où n est un nombre entier positif, celles qui correspondent à n pair sont symétriques par rapport à l'axe polaire, tandis que les autres le sont par rapport à l'axe secondaire ; les premières ont au pôle un point de rebroussement et sur l'axe polaire ∞^1 points doubles, les autres ont ∞^1 points doubles sur l'axe secondaire.

Nous laissons aux jeunes lecteurs le soin d'énoncer les propriétés analogues des courbes comprises dans l'équation.

$$\rho^m = a^m\omega^n, \tag{6}$$

m et n étant des nombres entiers positifs ou négatifs ; et aussi de vérifier que la spirale logarithmique

$$\rho = ae^{b\omega} \tag{7}$$

est formée, en dehors de la branche continue que l'on considère d'ordinaire, d'une autre pointillée analogue à celle bien connue qui fait partie de la courbe logarithmique.

Les considérations précédentes, quoique très simples et élémentaires, m'ont semblé dignes d'être exposées ici, car elles se rapportent à un point de doctrine fondamentale dans l'étude de la Géométrie analytique appliquée aux courbes planes. Il est à peine nécessaire d'avertir qu'on pourrait les étendre à l'espace.

GINO LORIA (Gênes).

CHRONIQUE

Modèles pour l'enseignement des sciences mathématiques.

La maison L. Brill, à Darmstadt, vient de céder son édition de modèles pour l'enseignement des mathématiques supérieures à M. Martin Schilling, éditeur à Halle (a. S.). Ses premiers travaux ont été exécutés, il y a plus de vingt-deux ans sous la direction de M. A. Brill, alors professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich, avec la collaboration de M. le professeur F. Klein. A ces deux géomètres se sont joints, plus tard, MM. les professeurs Dyck, Finsterwalder, Kummer, Rodenberg, Rohn, Schoenflies, Schwarz, Chr. et H. Wiener et d'autres, qui ont largement contribué à augmenter la collection des modèles et à l'étendre aux domaines les plus divers des sciences mathématiques et physiques. Aujourd'hui on doit à la maison Brill une collection particulièrement riche en modèles concernant la théorie des courbes et des surfaces et la théorie des fonctions.

Le nouvel éditeur s'est adjoint pour la direction scientifique de son entreprise, un professeur à l'Université de Göttingue, M. le Dr F. Schilling, dont la compétence pour ce genre de travaux est bien connue. Il se propose d'apporter un soin tout particulier non seulement aux modèles qui se rattachent aux mathématiques pures, mais encore à ceux qui relèvent des mathématiques appliquées.

Dans ce domaine il y a certainement encore beaucoup à faire dans l'intérêt de l'enseignement; plusieurs branches sont encore presque entièrement dépourvues d'appareils de démonstration. Il faut donc espérer que MM. Schilling rencontrent l'appui dont ils ont besoin pour mener à bien cette utile entreprise à laquelle nous souhaitons tout le succès qu'elle mérite.

Congrès des mathématiciens allemands.

La prochaine réunion des mathématiciens allemands, qui doit avoir lieu à Munich, du 17 au 23 septembre, promet d'être fort brillante au point de vue des travaux qui y seront présentés.

La liste des communications annoncées pour la section I *Mathématiques et Astronomie*, qui sera présidée par M. le prof. Dr Bauer, ne contient pas moins de dix-sept numéros.

Deux de ces travaux font partie de la catégorie des *rapports* que la Deutsche mathematiker Vereinigung a coutume de proposer chaque année. L'un, intitulé : *Sur la théorie arithmétique analytique des fonctions algébriques*, sera présenté par M. K. Hensel (Berlin); l'autre, dû à M. Heun (Berlin), a pour titre : *Les problèmes cinétiques dans la technique scientifique*.

La section 17 (*enseignement des sciences mathématiques et naturelles*) sera présidée par M. le Dr Georg Kerschensteiner. Douze travaux ont été annoncés. Nous signalerons en première ligne le rapport de M. Weber (Strasbourg) et le contre-rapport de M. Hauck (Berlin) sur l'organisation de l'enseignement mathématique à l'Université en vertu du nouveau règlement prussien. Il était à prévoir que ce récent décret donnerait lieu à de nombreux commentaires. Trois autres communications se rapportent en effet à ce même sujet ; ce sont celles de MM. Rudel (Nürnberg), Schotten (Halle) et Treutlein (Karlsruhe).

M. Pietzker (Nordhausen), dont la compétence en matière pédagogique est bien connue, fera une conférence sur la place que doit occuper l'enseignement des sciences exactes dans le mouvement de réformes scolaires.

Figurent encore au programme les communications de M. Ducrue : sur la division décimale de l'angle; de M. Schülke (même sujet) et de M. Fischer : démonstration de modèles d'enseignement pour la mécanique.

Nous donnerons un compte rendu du congrès et tout particulièrement des travaux se rattachant à l'enseignement mathématique.

Prix Jablonowski pour l'an 1902.

La société Jablonowski accordera un prix de mille marks au meilleur travail ayant pour but de développer les recherches abordées par M. Poincaré dans son mémoire : *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet* [1].

Les mémoires destinés au concours doivent être déposés avant le 30 novembre 1902, au secrétariat de la Société, à Leipzig ; ils peuvent être rédigés en allemand, en latin ou en français.

Pour plus de détails voir le *Journal* de Crelle, t. 120, p. 276, ou les *Math. Annalen*, t. 52, p. 315.

---

[1] *Acta math.*, XX, 1896.

CORRESPONDANCE

Paris, le 31 juillet 1899.

Messieurs,

Dans son intéressant article sur la *classification des lignes et surfaces du second ordre* (*L'Enseignement mathématique*, n° 4), M. A. Poussart donne pour les quadriques de la première famille (ou sans point double), le tableau suivant :

Première famille	$\Delta_3 \lessgtr 0$	Espèce hyperbolique.	Hyperboloïde à une nappe.
$\Delta_4 \gtrless 0$	$AA' - B''^2 < 0$		Hyperboloïde à deux nappes.
Pas de point double	$\Delta_3 = 0$	Espèce parabolique.	Paraboloïde hyperbolique.
			Paraboloïde elliptique.
4 carrés	$A\Delta_3 > 0$	Espèce elliptique.	Ellipsoïde réel.
	$AA' - B''^2 > 0$		Ellipsoïde imaginaire.

Ce tableau est loin d'être complet. Non seulement il n'indique pas ce qui différencie les deux hyperboloïdes, paraboloïdes ou ellipsoïdes et ne mentionne pas le cas d'un hyperboloïde pour lequel on a $AA' - B''^2 = 0$; mais il fait abstraction de la plus grosse difficulté qui existe dans la question, c'est-à-dire du cas où, un hyperboloïde étant rapporté aux plans de trois sections elliptiques, on a : $A\Delta_3 < 0$, $A'A'' - B^2$, $A''A - B'^2$ et $AA' - B''^2 > 0$.

J'ai donné dans un article récent (*Nouvelles Annales*, 1898, p. 415) le tableau suivant qui est le résumé de la discussion *complète* de l'équation générale décomposée en carrés dans l'hypothèse $\Delta_4 \neq 0$:

$A\Delta_3 > 0$, $AA' - B''^2 > 0$	$\Delta_1 > 0$	Ellipsoïde imaginaire.
	$\Delta_1 < 0$	Ellipsoïde réel.
$A\Delta_3 < 0$, $AA' - B''^2 > 0$	$\Delta_1 > 0$	Hyperboloïde à une nappe.
$\Delta_3 \neq 0$, $AA' - B''^2 \leqq 0$	$\Delta_1 < 0$	Hyperboloïde à deux nappes.
$\Delta_3 = 0$	$\Delta_1 > 0$	Paraboloïde hyperbolique.
	$\Delta_1 < 0$	Paraboloïde elliptique.

Veuillez agréer, etc.

L. RIPERT (Paris).

BIBLIOGRAPHIE

Maurice d'Ocagne. — **Traité de Nomographie.** — Théorie des abaques : Applications pratiques. 1 vol. gr. in-8°, 480 p. : prix (broché) : 14 fr., relié en cuir souple, 17 fr. : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

La Nomographie est la théorie des abaques ; ceux-ci ont pour but la représentation graphique cotée des lois mathématiques définies par des équations à un nombre quelconque de variables. Telle est la définition que donne M. d'Ocagne dans l'introduction à son beau volume. Quoique le nom de cette nouvelle science ne date que de 1891, il y a certainement plus d'un siècle qu'on a commencé à construire des abaques. Petit à petit, la nécessité de méthodes graphiques se faisant sentir, le nombre des abaques devint de plus en plus grand ; des méthodes de transformation furent découvertes. Mais ces résultats étaient disséminés : dans un mémoire se trouvait un abaque utilisé par les ingénieurs, dans un autre un théorème fournissait une méthode nouvelle. La nécessité d'une théorie générale se faisait sentir. M. d'Ocagne a réuni ces travaux épars et, en y joignant ses propres recherches, en a fait un tout harmonieux, intéressant pour le mathématicien et très utile pour l'ingénieur. L'auteur, et c'est à notre avis son grand mérite, a constamment cherché à généraliser. Il faudrait, comme M. d'Ocagne, être ingénieur et mathématicien pour juger sainement ce livre ; car, outre une foule de résultats pratiques, il conduit à des méthodes théoriques générales.

Nous allons, par une brève analyse, chercher à donner une idée du contenu de ce volume de plus de 450 pages. L'auteur s'occupe tout d'abord des équations à 2 variables et de leur représentation par une échelle abaque qui constitue une échelle de fonction.

Les équations à 3 variables sont ensuite étudiées dans un deuxième chapitre. La théorie des abaques dits cartésiens est appliquée aux abaques de multiplication, de l'équation trinome du troisième degré et du poids de la vapeur d'eau contenue dans l'air. L'anamorphose, déjà introduite par un exemple, est développée et la forme des équations auxquelles cette transformation est applicable est obtenue ; citons parmi les applications un abaque de tir, celui des débits d'une rivière, des portées lumineuses, etc. L'emploi des transparents est généralisé et appliqué aux abaques dits hexagonaux. Le fractionnement des échelles permet de diminuer les dimensions de l'abaque. Au moyen de l'homographie on engendre tous les abaques à droites entrecroisées d'une équation donnée ; ceci permet en particulier de transformer le quadrilatère limitant la partie utile de l'abaque en un rectangle donné d'avance. La forme générale des équations représentables par des abaques à droites ou à cercles entre-croisés est établie ; tels sont, par exemple, l'abaque du tuit intérieur des murs de soutènement et celui des murs de soutènement pour des terres profilées suivant leur talus naturel. Le chapitre se termine

par l'introduction des coordonnées polaires et leur application aux abaques polaires.

Le chapitre III traite de l'importante théorie des points alignés basée sur le principe de dualité. Un fragment d'une table graphique pour l'arpentage des coupes, représentée au moyen de droites entre-croisées et de points alignés, montre clairement les avantages de cette dernière méthode. La construction directe des abaques à points alignés, leur transformation homographique et leur fractionnement sont établis. Les abaques à échelles rectilignes, parallèles, concourantes ou non concourantes, sont étudiés en général; les applications de cette théorie sont fort intéressantes, tels sont de nouveaux abaques de multiplication, celui des moments d'inertie des rectangles, des marches de troupes en colonnes, des distributions d'eau, de la correction barométrique, etc. Dans les abaques de l'équation du deuxième degré, des lentilles plan-convexe, du volume du ballast, de l'équation du trinome du troisième degré, de l'équation de Képler, etc., interviennent les échelles curvilignes. La méthode des points alignés peut aussi être appliquée à la représentation de lois empiriques : tels sont, par exemple, l'abaque de la vitesse d'un train, du tir de siège et des consommations théoriques d'une machine à vapeur.

Les abaques à double alignement permettent de représenter des équations à 4 variables; tels sont, par exemple, les abaques des poutres uniformément chargées, de l'écoulement des gaz par des tuyaux, du nivellement barométrique et de l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts. Les types d'équations représentables par des abaques à transversales circulaires, à équerre et à parallèles mobiles sont obtenus : tels sont les abaques des levers tachéométriques et des murs de soutènement.

Le chapitre IV traite des abaques accouplés et surtout de leur application au calcul des profils de remblai et de déblai.

Quoique divers modes de représentation d'équations à plus de 3 variables aient déjà été obtenus, ces équations font l'objet du chapitre V. Les points et les lignes à 2 cotes sont tout d'abord définis, ainsi que les échelles binaires. Les applications les plus intéressantes sont les abaques : de la prime des porte-mire du nivellement général, des annuités, de la formule de jauge de l'Union des yachts français, des intérêts composés et de l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique. La méthode des points alignés est appliquée aux points à 2 cotes dans les abaques des intérêts composés, de la distance sphérique, de la trigonométrie sphérique, des équations du troisième et du quatrième degré. En généralisant ce qui précède, l'auteur arrive aux éléments à n cotes et aux échelles multiples : l'abaque de la déviation du compas est une application de cette théorie. Dans une deuxième partie, les systèmes mobiles à translation et à rotation sont étudiés et appliqués à la règle à calcul pour la traction d'une locomotive, aux abaques de la correction des mires et de la lumière diffusée. L'anamorphose logarithmique fournit des abaques à translation : tels sont, par exemple, ceux des équations trinomes de degré quelconque et des équations complètes de degré 3, 4 et 5.

Par le nombre, la diversité et l'importance des applications, le chapitre V est des plus intéressants pour l'ingénieur. On voit clairement dans ce chapitre comment on pourra représenter par un abaque une équation à n variables.

Le chapitre VI et dernier contient la théorie générale des abaques. L'au-

teur les étudie tout d'abord au point de vue de leur structure : il définit les contacts et les abaques à plusieurs plans superposés, dont les abaques à alignement, à translation et à rotation ne sont que des cas particuliers. Puis les équations générales répondant aux principaux types d'abaques sont établies. Dans ces équations interviennent des fonctions arbitraires, qui sont appelées les composantes du type d'équation considéré. Pour terminer, M. d'Ocagne cherche comment on pourra former les fonctions composantes et à quelles conditions ces fonctions seront toutes réelles.

Ce chapitre VI, purement théorique, s'adresse avant tout aux mathématiciens et constitue la synthèse de l'ouvrage. Ainsi que le dit l'auteur dans son introduction, il englobe toutes les méthodes possibles de représentation plane des équations à un nombre quelconque de variables. M. d'Ocagne attire spécialement l'attention des mathématiciens sur ce chapitre « en raison des problèmes intéressants dont il peut leur fournir la matière ».

M. LACOMBE (Zurich).

Encyklopædie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. — Mit Unterstützung der kaiserlichen und kœniglichen Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der kœniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen : herausgegeben von Dr H. BURKHARDT, o. Professor der Mathematik an der Universität Zürich, und Dr W. FRANZ MEYER, o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr. En six volumes gr. in-8° (prix du volume : environ 20 francs) B. G. Teubner, Leipzig. 1899. — T. II. ANALYSIS, redigiert von H. BURKHARDT. Erstes Heft. (160 S.)

Nous avons déjà eu l'occasion d'indiquer (1), dans ses grandes lignes, le programme adopté pour cette importante publication et nous avons donné le plan détaillé du premier volume dont les deux premiers fascicules seuls ont paru. Grâce aux dispositions prises par MM. Meyer et Burkhardt les deux premiers volumes pourront paraître à peu près simultanément.

Le présent fascicule donne la série des chapitres du second volume, entièrement consacré à l'*Analyse*. Avant d'en donner le compte rendu nous reproduirons d'abord la liste des articles que doit comprendre ce volume, avec les noms des collaborateurs chargés de la rédaction de ses différentes parties.

A. ANALYSIS REELLER GRÖSSEN.

1. Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre : A. Pringsheim in München. — 2. Differential u. Integralrechn. : A. Voss i. Würzburg. — 3. Bestimmte Integrale : G. Brunel in Bordeaux. — 4. Gewöhnl. Differentialgleichgn. : P. Painlevé in Paris. — 5. Partielle Differentialgleichungen : E. v. Weber in München. — 6. Kontinnierliche Transformationsgruppen : L. Maurer in Tübingen. — 7. Randwertaufgaben : a) Gewöhnliche Differentialgleichungen : M. Bôcher in Cambridge, Mass : b) Partielle Differentialgleich. d. Potentialtheorie : H. Burkhardt in Zürich und W. Fr. Meyer in Königsberg : c) Andere partielle Differentialgleichungen : A. Sommerfeld in

(1) Voir *L'Enseignement mathématique*, n° 2, p. 141 à 144 ; 1899.

Clausthal. — 8. Reihenentwickelungen : H. Burkhardt in Zürich und A Sommerfeld in Clausthal. — 9. Variationsrechnung : A. Kneser in Dorpat.

B. Analysis komplexer Grössen.

1. Allgemeine Funktionentheorie : W. F. Osgood in Cambridge, Mass. — 2. Algebraische Funktionen und ihre Integrale : W. Wirtinger in Innsbruck. — 3. Bestimmte Integrale : H. Burkhardt in Zürich. — 4. Lineare Differentialgleich. : H. Burkhardt in Zürich. — 4 b. Kugelfunktionen u. dgl., A. Wangerin in Halle. — 5. Nichtlineare Differentialgleich. : P. Painlevé in Paris. — 6. Umkehrfunktionen : a) Elliptische Funktionen : W. Harkness in Bryn Mawr Coll., Pa ; b) Abel'sche Funktionen : W. Wirtinger i. Innsbruck ; c) Automorphe Funktionen : R. Fricke i. Braunschw. — 7. Thetafunktionen : A. Kraser in Strassburg und W. Wirtinger in Innsbruck. — 8. Funktional-Gleichungen u. Operationen : S. Pincherle in Bologna.

Ce fascicule comprend les trois premiers articles de la lettre A. Le premier (p. 1 à 53), consacré aux *notions fondamentales de l'étude des fonctions*, est rédigé par M. A. Pringsheim. Dans la partie historique l'auteur passe en revue les phases par lesquelles a passé la notion de fonction depuis le sens que lui a donné Euler jusqu'au cas tout à fait général défini par Dirichlet. Puis il examine successivement ce que l'on entend par valeur limite, valeur infinie, fonction continue, fonction différentiable et forme indéterminée. Viennent ensuite les définitions relatives aux discontinuités et aux singularités d'une fonction. L'article se termine par un paragraphe consacré au cas général d'une fonction de plusieurs variables.

Dans le second article M. A. Voss présente un résumé du *calcul différentiel et intégral*. Il expose d'abord la notion de dérivée d'une fonction d'une variable et le théorème des accroissements finis ; puis il passe au cas d'une fonction de plusieurs variables : dérivées partielles, différentielle totale, dérivées partielles d'ordre supérieur. Le paragraphe consacré aux applications contient les propriétés qui ont trait aux développements d'une fonction d'une ou de plusieurs variables ; dans cet exposé il est tenu compte des travaux récents de Scheeffer, Peano, Stolz, Dantzer et d'autres. On passe ensuite au calcul intégral. L'auteur résume, pour le cas des fonctions d'une variable, les propriétés fondamentales des intégrales indéfinies, puis celles des intégrales finies avec les deux théorèmes de la moyenne. Puis, il aborde le cas général d'une fonction de plusieurs variables. Les théorèmes de Green et de Stokes, et la différentiation à indices quelconques font l'objet d'un paragraphe spécial.

M. Voss n'a pas oublié de consacrer quelques pages aux intégrateurs, aux intégraphes et à l'analysateur harmonique (1). D'après lui l'intégrateur Amsler, dont le premier modèle remonte à l'année 1854, reste toujours le meilleur au point de vue de la simplicité et de l'élégance. C'est en effet aussi le plus répandu : on le trouve, en Allemagne surtout, entre les mains de

(1) Nous saisissons cette occasion pour exprimer notre étonnement au sujet de l'ignorance complète dans laquelle on laisse encore bien des étudiants, même dans les écoles techniques, pour tout ce qui concerne ces instruments. Il y a là des applications très simples des notions enseignées dans les cours d'analyse et de mécanique. Il est vrai que dans bien des établissements la collection des modèles et instruments destinés à l'enseignement mathématique ne se réduit encore guère qu'à un compas ! et encore !

beaucoup d'ingénieurs et d'architectes et dans bien des administrations pour le cadastre.

Ce fascicule se termine par la première partie du chapitre relatif aux *intégrales définies*. M. Brunel y fait l'exposé des théorèmes généraux concernant les intégrales définies, les intégrales définies généralisées d'après Riemann et Jordan, ainsi que les différentes définitions que l'on donne de la fonction $\Gamma(a)$.

Il n'est guère besoin d'ajouter que tous les théorèmes, ainsi que les auteurs cités sont accompagnés des indications bibliographiques destinées à permettre au lecteur de recourir aux mémoires originaux.

H. Fehr.

Bouty (E), professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Progrès de l'Electricité. Oscillations hertziennes. Rayons cathodiques et rayons X** (IIe Supplément au *Cours de physique de l'Ecole Polytechnique*, par Jamin et Bouty). In-8, avec 45 fig. et 2 pl.; 1899. 3 fr. 50.

Les progrès de l'électricité, dans ces dernières années, justifient, à coup sûr, ce Volume supplémentaire du *Cours de Physique* de Jamin et Bouty. L'Auteur a, du reste, traité la question d'une façon tout à fait indépendante du Cours lui-même, de sorte que c'est véritablement une situation de la Science électrique, à ce jour, qu'il a présentée au public. Il est inutile de dire que les oscillations hertziennes, les rayons cathodiques et les rayons X ont été étudiées comme il convient dans ce nouvel ouvrage.

Voici les titres des neuf chapitres que comprend ce volume :

I. Généralités. — II. Appareils et méthodes de mesures; systèmes d'unités. — III. Electrolytes, diélectriques. — IV. Magnétisme. — V. Courants alternatifs. Moteurs à courants alternatifs. — VI. Courants de haute fréquence. Vitesse de propagation des perturbations instantanées. — VII. Oscillations hertziennes. — VIII. Décharge disruptive. — IX. Les rayons cathodiques et les rayons X.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. CXXIX; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 1 (3 juillet). — L. Picart : Sur la suppression des essais, dans le calcul des orbites paraboliques. — E.-O. Lovett : Sur les transformations des droites. — C. Guichard : Sur les surfaces de M. Voss. — Le Vavasseur : Les groupes d'ordre $16p$, p étant un nombre premier impair. — P. Painlevé : Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynomes. — E. Goursat : Sur deux équations intégrales du second ordre. — J. Fredholm : Sur une classe d'équation aux dérivées partielles. — N. Saltykow : Considérations sur les travaux de MM. S. Lie et A. Mayer.

N° 2 (10 juillet). — P. Painlevé : Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables.

N° 3 (17 juillet). — E.-O. Lovett : Sur les transformations des droites. — C. Guichard : Sur la théorie générale des congruences de cercles et de sphères.

N° 4 (24 juillet). — N. Saltykow : Sur la théorie des équations aux dérivées partielles. — E. Maillet : Sur les équations indéterminées de la forme $x^{\lambda}+y^{\lambda}=cz^{\lambda}$. — A. Demoulin : Sur une correspondance entre deux espaces réglés.

N° 5 (31 juillet). — E. Vallier : Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. — E.-O. Lovett : Sur les équations de Pfaff. — H. Dulac : Sur les cols des équations différentielles.

N° 6 (7 août). — Appell : Sur les mouvements de roulement ; équations du mouvement analogues à celles de Lagrange.

Bulletin des Sciences mathématiques rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery ; 2e série, t. XXIII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 18 fr.; France et Union postale, 20 fr.; Paris, Gauthier-Villars.

Janvier. — E.-O. Lovett : Sur les inconvénients projectifs d'un système de $2n+1$ points dans l'espace à $n+1$ dimensions.

Février. — C. Cailler : Note sur l'équation différentielle de Laplace et sur une formule d'Abel.

Mars. — E. Lindelöf : Démonstration élémentaire de l'existence des fonctions implicites.

Avril. — C. Burali-Forti : Sur les rotations.

Mai. — N.-J. Hatzidakis : Trois formules très générales relatives aux courbes dans l'espace.

Juin. — E. Picard : Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — Tzitzéica : Sur la déformation des quadriques de révolution.

Bulletin de la Société mathématique de France ; t. XXVII, 1899.

Fasc. 2. — Andrade : Sur quelques paradoxes de statique non euclidienne. — C. Bourlet : Etude théorique sur la bicyclette (seconde partie). — Ch. Biocne : Mémoire sur les surfaces de troisième ordre qui admettent pour ligne asymptotique une cubique gauche. — De Montcheuil : Etude sur les surfaces réelles définies par l'équation $\sum \frac{IV}{a^2 a_i} = 0$. — Lémeray : Sur les équations fonctionnelles qui caractérisent les opérations associatives et les opérations distributives. — H. Dupont : Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie. — De Polignac : Sur un théorème de Tait. — E. Duporcq : Sur une généralisation de la transformation de Lie. — Painlevé : Sur le calcul des intégrales d'un système différentiel par la méthode de Cauchy-Lipschitz.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées sous les auspices du ministère de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de professeurs de mathématiques, de physique et de

chimie de la faculté. — 2e série, t. I, 1899. Paris, Gauthier-Villars : Toulouse, Ed. Privat.

2e fasc. — M. Servant : Essai sur les séries divergentes. — H. Bonasse : Sur les courbes de déformation des fils. — E. Delassus : Sur l'équilibre des systèmes articulés.

Nouvelles Annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales; à la licence et à l'agrégation, dirigé par C. A. Laisant et X. Antomari : 3e série, t. XVII. 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 15 fr. : départements et union postale, 17 fr.: autres pays, 20 fr.: Gauthier-Villars.

Mai. — R. Bricard : Deuxième concours des « Nouvelles Annales » pour 1898. — V. Nobile : Note de Géométrie cinématique. — H. Laurent : Sur les nombres premiers.

Juin. — F. Caspary : Applications des méthodes de Grassmann : vecteurs dans le plan ; définitions ; propriétés. — Genèse : Sur quelques intégrales. — Stuyvaert : Point remarquable dans le plan d'une cubique.

Juillet. — E. Lacour : Sur l'équation d'Euler $\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\varphi(x_1)}}$. — A. Pleskot : Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réelles. — L. Ripert : Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques de l'espace.

Août. — L. Autonne : Sur le rapport anharmonique. — Combeliac : Notions élémentaires sur les groupes de substitution. — O. Böklen : Note sur une surface étudiée par Painvin. — G. de Longchamps : Les courbes images et les courbes symétriques.

Bulletin de la Société Philomathique de Paris, fondée en 1788 : 9e série, t. I, n° 1 ; Paris, 1899.

G. Candido : Note de trigonométrie rectiligne.

Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg ; 2e série, t. IX, 1899. Prix d'abonnement annuel : Belgique, 7 fr. 50; étranger, 9 fr. Gand, A. Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Mai. — Jerabek : Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et des hypocycloïdes. — L. Orlando : Applications de l'inversion.

Juin. — P. Mansion : Continuité analytique et continuité vulgaire. — G. Loria : Généralisation d'un problème de minimum. — G. Gérard : Sur le point de Frégier.

Juillet. — Pirondini : Sur la spirale logarithmique. — A. Demoulin : Propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée. — L. Colondo : Sur le cercle tangent à trois cercles donnés.

Août-septembre. — G. Fontené : Construction du polygone de dix-sept côtés. — L. Ripert : Sur les transformations quadratiques involutives. — Delgueldre : Sur deux faisceaux de coniques.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par Ph. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeeman : t. VII (2e partie) : octobre 1898-avril 1899 ; Prix d'abonnement annuel : 4 Fl. 8 fr. 50; Amsterdam, Leipzig, Paris, Londres et Edimbourg.

Cette importante revue de bibliographie mathématique a pour but de « faire connaître, sans délai de quelque importance, le titre et le contenu principal des mémoires mathématiques publiés dans les principaux journaux scientifiques ». C'est un précieux instrument de travail, dont la publication fait le plus grand honneur à la Société mathématique d'Amsterdam. Les savants qui se sont consacrés à cette œuvre avec tant de dévouement y ont apporté un esprit de précision et de clarté qui ont pour résultat de rendre les recherches très faciles. La classification adoptée est celle du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.

Nous signalons avec d'autant plus d'intérêt la *Revue semestrielle* à l'attention des mathématiciens et des professeurs qu'elle n'est pas, nous semble-t-il, aussi connue qu'elle mériterait de l'être. En réalité, pas un homme s'occupant de la science mathématique par goût ou par profession, ne devrait se priver d'un pareil secours, s'il désire se tenir sans effort au courant des travaux qui se publient quotidiennement.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert : 23e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 5 fr.; étranger, 6 fr.; Paris, Nony.

La 23e année, qui se termine par le n° 20 (15 juillet) contient les articles que nous énumérons ci-dessous :

G. Fontené : Sur la division en arithmétique. — P. Barbier : Étude élémentaire sur les variations du trinome bicarré. — J. Girod : Variations de la fonction $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. — A. Moreaux : Comparaison géométrique de deux différences entre les trois moyennes arithmétique, géométrique et harmonique. — A. Vacquant : Sur l'existence du triangle équilatéral. — G. Fontené : Sur la théorie des parallèles. — J. Girod : Sur la démonstration du théorème de Ceva. — M. d'Ocagne : Sur les normales à l'ellipse. — Vogt : Sur la distinction des points d'une sécante intérieure ou extérieure à une conique. — Arnould : Sur les directions de Monge des cylindres de révolution. — Vogt : Réciproques des théorèmes de Dandelin. — Th. Caronnet : Etude géométrique de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné poli.

L'Éducation mathématique, journal publié par Ch. Biocm. et H. Vuibert : 1re année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 5 fr.; étranger, 6 fr.; Paris, Nony.

Le n° (15 juillet) termine la première année de cette intéressante publication. Parmi les notes publiées, nous relevons celles dont voici les titres :

Multiplication rapide d'un nombre par 11 et par 111. — Procédé de formation des caractères de divisibilité. — Sur la décomposition des polynomes en produits de facteurs. — Petites remarques sur le calcul des quantités

qui renferment des radicaux. — Petites remarques sur la résolution de l'équation du second degré. — Mise en équation des problèmes d'algèbre et en particulier de ceux se rapportant à la Géométrie. — La Géométrie est-elle « l'art de raisonner juste sur des figures fausses » ? — Remarques sur les relations métriques. — C. Couturier : Sur les constructions en Géométrie. — Sur les conditions de possibilité de construction d'un triangle. — Quelques propositions utiles dans la construction des triangles. — Mauriel : Construction géométrique des côtés des décagones réguliers. — Remarques relatives aux constructions géométriques. — Démonstration géométrique de l'identité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. — Lieux géométriques plans. — Remarques générales sur les démonstrations géométriques. — Remarques sur quelques méthodes générales employées en Géométrie.

Revue des mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier : 9e année, 1898-1899. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr.; étranger, 9 fr.; Paris, Nony.

N° 9 (juin 1899). — Ch. Méray : Sur un déterminant dont celui de Vandermonde n'est qu'un cas particulier.

N° 10 (juillet 1899). — G. Fontené : Enveloppe d'un côté d'un rectangle inscrit à un rectangle donné.

N° 11 (août 1899). — Note sur la correction de l'épure de Géométrie descriptive au concours d'admission à l'École polytechnique. — Ch. Méray : Sur la mesure de la zone sphérique. — J. Paoli : Sur l'abaissement des équations réciproques ; explication d'un artifice.

Bulletin de l'Enseignement technique, 2e année, 1899; Prix d'abonnement annuel : France, 6 fr.; étranger, 7 fr.; Paris, Nony.

Cette très utile publication, fondée en 1898, paraît en général tous les quinze jours. Elle renferme une précieuse collection de documents officiels, comprenant les arrêtés ministériels, les programmes, etc., et, dans une 2e partie, des études sur différentes sujets. Nous y relèverons à l'occasion ce qui pourra présenter de l'intérêt au point de vue mathématique.

Revue générale des sciences pures et appliquées, directeur L. Olivier : 10e année, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 20 fr.; départements, 22 fr.; union postale, 25 fr.; G. Carré et C. Naud.

Ce recueil, dont l'éloge n'est plus à faire, et dont la haute autorité scientifique est désormais établie, consacre à la science mathématique une importante partie de sa bibliographie. Les articles originaux sur les mathématiques sont plus rares. Nous ne manquerons pas de les signaler à l'occasion. Le n° 7 (15 avril) contient, de M. H. Poincaré et sous le titre : *Réflexions sur le calcul des probabilités*, une étude digne d'attirer à la fois l'attention des géomètres et des philosophes.

Jahrbuch ueber die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe. — T. 28, année 1897 (en 3 fascicules) ; 1er fascicule un vol. in-8° de 416 p. 1899, Georg Reimer, Berlin.

Nous attirons tout particulièrement l'attention de nos lecteurs sur cette

importante publication qui a déjà rendu de très grands services aux mathématiciens. Chaque volume du *Jahrbuch* donne le résumé de toutes les publications mathématiques, périodiques ou autres, parues dans l'intervalle d'une année. Les divers articles sont réunis par ordre de matière. Grâce à cette classification on peut se rendre compte, chaque année, des progrès réalisés dans les divers domaines.

Le tome 28 se rapporte aux publications parues en 1897. Le premier fascicule qui seul vient de paraître contient les sections suivantes :

I. Histoire, philosophie, pédagogie. — II. Algèbre. — III. Arithmétique élémentaire et supérieure. — IV. Analyse combinatoire et calcul des variations. — V. Séries. — VI. Calcul différentiel et intégral. — VII. Théorie des fonctions.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A.-L. Crelle, 1826, herausgegeben von L. Fuchs. Band 120, 1899. Georg Reimer, Berlin.

Heft 1. — Horn, J. : Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differential gleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. — Hermes, O. : Die Formen der Vielflache. — Neumann, Ernst : Zur Poisson schen Theorie der Elektrostatik.

Heft 2. — Hensel, K. : Ueber diejenigen algebraischen Körper welche aus zwei andern componirt sind. — Hauck, Guido : Nochmals die reciproken Figuren der graphischen Statik. — Wallenberg, G. : Ueber eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — Saalschütz, L. : Ueber einen besondern Kettenbruch mit negativen Theilzählern. — Craig, Thomas : Application of certain partial differential equations derived from Codazzis equations.

Heft 3. — Kötter, Fritz : Der Bodendruck von Sand in verticalen cylindrischen Gefässen. — Saalschütz, L. : Ueber einer besonderen Kettenbruch mit negativen Theilzählern. — Kneser, Ad. : Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werthen des Arguments. — Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1902 (1).

Mathematische Annalen. herausgegeben von F. Klein, W. Dyck, Ad. Mayer. t. 52, fasc. 1 mai, fasc. 2 et 3 (juillet) ; 1899, Teubner, Leipzig.

Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann ; 30e année, 1899. Teubner, Leipzig.

N° 5 (juillet). — G. Helm (Dresden) : Ueber das Rechnen mit Masseinheiten beim mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht.

Dans la partie bibliographique M. Dr. Quensen donne un compte rendu très détaillé (p. 377-382) du premier numéro de l'*Enseignement mathématique*. Nous lui présentons, ainsi qu'à M. le directeur Hoffmann, nos plus vifs remerciements pour l'accueil si bienveillant qu'ils ont fait à notre recueil.

---

(1) Voir plus haut, *Chronique*, p. 366.

Unterrichtsblaetter f. Mathematik u. Naturwissenschaft, herausgegeben von Prof. Dr B. Schwalbe und Prof. Fr. Pietzker; 5e année, n° 3, 1899. O. Salle, Berlin.

F. Pietzker : System und Methode im exaktwissenschaftlichen Unterricht. — C. Hildebrandt : Ueber die Behandlung des gebundenen Zeichnens auf den höheren Lehranstalten, besonders auf dem Realgymnasium. — F. Pietzker : Ueber die Bildung der algeleiteten physikalischen Begriffe.

Pædagogisches Archiv, herausgegeben von Prof. C. Dahn : 41e année, nos 7 et 8. 1899. Dürr, Leipzig.

Atti della Reale Academia dei Lincei, anno 296, série 5a, vol. VIII, 1° et 2° semestre, 1899; Rendiconti : Rome, tip. dell. R. acc. dei Lencei. Rendiconti dell'ordunanza Solenne del 4 Giugno 1899.

Fasc. 12 (18 juin). — Fano : Un teorema sulle varieta algebriche a tre dimensioni con infinite trasformazioni proiettive in se.

Fasc. 2 (16 juillet). — Banal : Sulla deformabilita delle superficie a tre dimensioni.

Fasc. 2 (16 juillet).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ; t. XIII, 1899.

Fasc. 3, 4 (mai, juin, juillet, août). — Alagna : Della congruenze binomie rispetto ad un modulo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ sia un numéro primo, ovvero il doppio d'un numero primo. — De Franchis : Riduzione dei sistemi lineari ∞^k di curve piane di genere 3, per $k > 1$. — Gerbaldi : Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. — De Franchis : Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2. — Bourlet : Sur la détermination de la surface d'une piste de vélodrome. — Lovett : Note on the contact Transformations of developable Surfaces.

Giornale di matematiche di Battaglini, continué par A. Capelli : vol. XXXVII, 1899. Prix d'abonnement annuel : union postale, 18 L.

Mars-avril. — E. Ciani : Sopra la configurazione di Kummer. — U. Scarpis : Una proprietà dei determinanti dedotta dal concetto di sortituzione. — Bruto Maboli : Di una classe di funzione finite e continue, non sviluppabili in serie di Fourier nel punto $x = 0$. — D. de Francesco : Sopra alcune formole elementari di Geometria non-euclidea. — Guelfo del Prete : Le omobraphie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. — A. da Porto : Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni.

Mai-juin. — A. da Porto : Sulla generazione, per stelle reciproche, delle quadriche ad un numero qualunque di dimensioni. — A. d'Alessandro : Sui gruppi Hamiltoniani. — F. de Astis : Sul sistemaditre forme quadratiche binarie. — F. Stasi : Sul sistema di due quartiche derivabili da una medesima quintica. — L. Sinigallia : Sulle superficie ad area minima applicabili su sè sterse. — Franz Meyer : Rapports sullo stato presente della Teoria degli invarianti.

El Progreso matematico, revista de matematicos puros y aplicadas; Director : D.-Z.-G. de Galdeano; serie 2ª, ano I, 1899 ; prix d'abonnement semestriel : Espagne, 5 pesetas; Etranger, 6 fr.; Coro, 99, Saragosse.

Nos 2 (juin) et 3 (juillet). — J.-J. Duran-Loriga : Sobre los circulos notables del triangulo. — J. Rius y Casas ; Relaciones formales entre dos objetos reciprocos. — Z.-G. de Galdeano : La matematica y su enseñanga. — Z.-G. de Galdeano : La moderna organizacio de la matematica. — Gino Loria. — Un problema di aritmetica que se encuentra en el estudio de las rodoneas.

American Journal of Mathematics, edited by S. Newcomb : Vol. XXI ; prix d'abonnement annuel : 5 dollars ; Baltimore, Johns Hopkins press, 1899.

N° 3 (juillet). — L.-E. Dickson : Détermination of the structure of all Linear Homogeneous Groups in a Galois Field which are defined by a quadratic Invariant. — E.-M. Blake : Upon the Ruled surfaces generated by the plane movements whose Centrodes are Congruent Conics Tangent at homologous points. — J.-C. Glashan : Quinquisection of the Cyclotomic Equation. — J.-C. Glashon : On the *m* Fold Section of the Cyclotomic Equation in the case of *m* Prime.

Ce numéro contient en outre la table générale des matières des tomes XI-XX.

Nieuw Archief voor Wiskunde, uitgegeven door het Wiskundig Genootsschap te Amsterdam, onder Redactie van J.-C. Kluyver. D.-J. Korteweg in P.-H. Schotte. Tweede Reeko, Deil IV, tweede stuk, 1899. Delsmann in Nolthenius, Amsterdam.

Wiskundige Opgaven mit de Oplossingen door de Leden van Het Wiskundig Genootschap. 7e partie, 7e fasc. et 8e partie, 1er fasc., 1899. Delsmann in Nolthenius, Amsterdam.

E. Bortolotti. — **Aritmetica pratica** per le Scuole secondarie inferiori, 1 vol. de 263 pages; prix : L. 1,80 : Rome, Società Editrice Dante Alighieri, 1899.

W.-W. Beman et D.-E. Smith. — **New plane and solid Geometry**; 1 vol. gr. in-12, IX-382 p.; Boston, Ginn et Cie, 1899.

G. Mittag-Leffler. — **Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène ;** in-4°, 20 p., extr. des acta mathematica, t. 23 : Stokcolm, 1899.

Léon Moreau. — **Sur les transformées des radicaux doubles réels ou imaginaires ;** 1 br. in-8° : 16 p.: Bruxelles, Royez : Paris, Giad et Brière, 1899.

Mario Pieri. — **Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo ;** Monografie del punto e del moto : in-4°, 51 p.: Turin, C. Clausen, 1899.

H. Pinet. — **Mémoire sur une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques ;** suivi d'un appendice donnant le détail des opérations, par E. Krauss : in-4°, 47 p. : Paris, Nony, 1899.

G. Tzitzéica. — **Sur les congruences cycliques et sur les systèmes, triplement conjugués** thèse de doctorat présentée à la faculté des sciences de Paris : in-4°, 56 p. : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

E. Landau. — **Neuer Beweis der Gleichung** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$; Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde von der phil. Facultät der Friedrich-Wilhelms-Univ. zu Berlin : 1 br. pet. in-4°, 16 p. : 1899.

Ed. Marrel. — **De l'enseignement des mathématiques élémentaires** (d'après un ouvrage récent ; 1 br. in-8°, 36 p. : Rolle, imp. Graf, 1899.

Matteo Martuscelli. — **Aritmetica ad uso delle scuole secondaire** contavole dei valori di $(1 + r)^n$ e dei logaritmi a 5 decimali fino a 1 000 : 2ª edizione : 1 vol. gr. in-8°, 144 p. Salerne tip. Fruscione e Negri, 1899.

Matteo Martuscelli. — **Sulla Teorica delle rette parallele ;** 1 br. gr. in-8°, 10 p. : Salerne, tip. Fruscione e Negri, 1899.

C. Juel. — **Indledning i Læren om de grafiske Kurver,** avec résumé en français : in-4°, 90 p. : Copenhague, A.-F. Host, 1899.

Ramon Escondon. — **Nueva teoria de las imaginerias en el espacos ;** 1 br. in-8°, 29 p. : Madrid, tip. de los hijos de M. G. Hernandez, 1898.

M. Frolov. — **La théorie des parallèles démontrée rigoureusement ;** essai sur le livre Ier des Eléments d'Euclide : 2e édition revue et complétée ; 1 br. gr. in-8°, 53 p. : Bâle et Genève, Georg ; Paris, Carré et Naud, 1899.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LES PRINCIPES FONDAMENTAUX
DES CONNAISSANCES HUMAINES

> Dans toutes les directions de la Pensée la Métaphysique commence où la clarté finit; elle offre ses services, aussitôt que la science refuse les siens.
>
> SULLY PRUDHOMME.)

Pour nous, le fait le plus certain, c'est que nous existons. Ce fait nous est révélé, non pas, comme le disait Descartes, parce que nous pensons, mais parce que nous sentons, parce que nous avons des sens, parce que nous avons de la *sensibilité*.

Nous avons en outre quelque chose qui nous fait conserver, ou qui fait que nous croyons conserver en nous l'impression des sensations déjà perçues, et cela dans l'ordre où elles ont été perçues; ce quelque chose est la *mémoire*, à laquelle est liée la notion du *temps*.

Ces impressions que nous croyons conserver sont des *idées*.

L'*intelligence* est le pouvoir que nous avons d'associer des idées, de les comparer, de conclure que nous pouvons ressentir des impressions analogues à celles que nous avons déjà éprouvées; les impressions que nous n'avons pas reçues et que nous concevons sont encore des idées. *Penser*, c'est avoir des idées et les combiner.

Nous pensons : 1° parce que nous avons de la sensibilité; 2° parce que nous avons de la mémoire; 3° parce que nous avons de l'intelligence; et en résumé parce que nous existons.

Je crois que l'origine de toutes nos idées se trouve dans nos sens. On a affirmé qu'il y avait des idées innées, c'est-à-dire ayant une autre origine. Je voudrais que l'on me citât une pareille idée. Pour ma part, je n'en connais pas; je ne peux pas prouver qu'il n'en existe pas, je me borne à dire que je n'en ai jamais eu

de pareilles ; et, qu'il en existe ou qu'il n'en existe pas, je n'aurai pas à m'en préoccuper dans la suite.

Jusqu'ici je n'ai fait que constater un état de choses évident : nous avons de la sensibilité, de la mémoire, de l'intelligence. Pour continuer, je vais faire des hypothèses ; rien ne prouve leur légitimité *a priori*, mais en les admettant j'expliquerai bien des choses sans rencontrer de contradictions.

Notre première hypothèse peut se formuler ainsi : nos sensations sont produites par des choses qui sont en dehors de nous, dont l'existence est indépendante de la nôtre ; les unes sont *matérielles* et impressionnent directement nos sens, les autres sont incapables d'impressionner directement nos sens et sont analogues au moi ; ce sont des choses qui, si je puis m'exprimer ainsi, sont d'autres moi.

Je ferai cette hypothèse que deux choses matérielles, ou, comme l'on dit, deux corps, occupent des positions distinctes, ce qui revient à admettre la notion de l'*espace ;* en outre, j'admettrai qu'un corps peut changer de place, c'est-à-dire peut être *déplacé.*

La notion de temps s'impose ; et lorsqu'un déplacement a lieu effectivement dans le temps et dans l'espace, il devient un *mouvement.*

Il est bien difficile de nier l'existence du temps ; on peut nier celle de l'espace ; mais ce qu'on ne peut pas me contester, c'est que j'ai le droit de tirer de l'hypothèse de leur existence les conclusions logiques qu'il me plaira d'en tirer, tant que ces conclusions ne seront pas contradictoires.

Il me semble que je puis agir sur la matière pour la déplacer, la transformer, comme il me semble qu'elle agit sur mes sens ; j'admets que cette action est réelle, ou, si vous préférez, quand je dirai que j'agis sur la matière ou que la matière agit sur moi, il faudra sous-entendre ces mots *il me semble que...*, ou *tout se passe pour moi comme si...*

Cela bien entendu, voyons quelle est la raison de nos actes. Sans que nous puissions précisément définir la jouissance ou la souffrance, nous savons qu'elles ont une existence très réelle et qu'elles sont susceptibles de plus et de moins ; quand nous allons

accomplir un acte nous croyons savoir qu'il va nous procurer des jouissances ou des souffrances ; nous croyons savoir également que si nous ne l'accomplissons pas il en résultera d'autres jouissances ou d'autres souffrances. Nous nous décidons dans le sens qui nous procure le plus de satisfaction ou le moins de désagrément ; ce qui fait que nous nous décidons est ce que j'appelle la *volonté*.

Nos actes peuvent-ils être prévus, notés à l'avance par une intelligence supérieure, comme nous prévoyons certains phénomènes, d'après ce que l'on appelle les lois de la nature ? Je n'en sais rien, c'est un mystère que je n'essaierai pas de pénétrer ; au surplus il n'y a là, je crois, qu'une querelle de mots, et pour ce qui va suivre, je n'aurai pas besoin de trancher la question.

Le but que je me propose dans ce qui va suivre est de montrer comment se forment et se développent les connaissances humaines et comment on peut arriver à la connaissance du plus grand nombre de vérités.

Le but des sciences est la recherche des vérités et leur classification dans un ordre méthodique, de manière à les retenir plus facilement. La Philosophie est la science par excellence, c'est l'ensemble de toutes les sciences : elle a pour but d'étudier leurs procédés généraux, leur classification, leurs affinités.

Et d'abord il faut bien nous rendre compte de ce que nous appelons une vérité. L'origine de nos connaissances se trouve dans nos sens ; or ces sens ne nous transmettent que des impressions dont la cause nous restera éternellement inconnue ; et pour classer ces impressions, bien plus que pour nous en rendre un compte exact, nous avons fait quelques hypothèses. J'appellerai *vérité* tout ce qui ressortira logiquement de ces hypothèses.

La vérité n'a donc rien d'absolu ; elle est toute relative à l'idée que l'on se fait d'un monde qui n'existe peut-être pas, et sur lequel nous avons certainement des idées fausses, ainsi que je le démontrerai, lorsque j'analyserai la notion que nous nous faisons de l'espace.

Descartes croit que nous pouvons connaître la vérité absolue parce que Dieu n'a pas voulu que nous fussions les jouets de per-

pétuelles illusions. Or sans faire profession d'athéisme, il sera bien permis de dire que l'idée de Dieu est une idée déjà très complexe, et qu'elle ne saurait intervenir *a priori* pour expliquer nos impressions premières ; et toute démonstration de l'existence de Dieu contiendra au fond les hypothèses fondamentales que nous avons été obligés de faire. Même en admettant la révélation et le miracle, il faut admettre que cette révélation et ce miracle ne sont pas des illusions. Il est vrai qu'en faisant de Dieu l'hypothèse fondamentale, on pourrait se passer de celles que nous avons faites ; c'est une autre manière d'envisager les choses ; mais Descartes lui-même n'acceptait évidemment pas ce point de vue.

Encore quelques mots d'explication : dans la suite nous serons obligés de faire de nouvelles hypothèses ; leurs conséquences seront encore des vérités, jusqu'au moment où, ayant reconnu quelque contradiction dans les conséquences de ces hypothèses, nous serons conduits à les rejeter. En résumé, la vérité ne peut se présenter à nous que sous une forme toute relative. Au fond, quand nous formulerons une affirmation, il y aura toujours un sous-entendu : c'est que nos hypothèses sont exactes.

Mais, dira-t-on, puisque la certitude n'existe pas, puisque les vérités sont purement relatives, à quoi bon nous livrer à l'étude des sciences ?

A cela je répondrai que nous faisons tous de la science à notre insu, comme monsieur Jourdain faisait de la prose. Instinctivement, la cuisinière qui met du sel dans sa soupe fait de la science ; elle applique cette vérité, à laquelle elle croit, pour l'avoir acquise, qu'une soupe sans sel ne procure qu'une médiocre jouissance à celui qui la mange ; elle n'est pas absolument sûre que celui qui mangera sa soupe sera un être réel, ni à plus forte raison qu'il éprouvera une jouissance réelle ; mais en faisant sa soupe, elle fait mentalement cette hypothèse, sans peut-être s'en rendre compte. Notre cuisinière est un tout petit savant ; nous sommes tous des savants malgré nous.

En second lieu, bien que les vérités acquises soient toutes relatives, elles sont pour nous une source de jouissances. Enfin, il y a des esprits curieux qui éprouvent le besoin, pour leur satisfaction

personnelle, de chercher la vérité pour elle-même. D'ailleurs beaucoup de vérités restées longtemps stériles ont fini par devenir des sources de jouissances pour l'humanité tout entière. La science n'est donc pas seulement un pur objet de curiosité.

La connaissance de la vérité relative étant une chose désirable, il se pose alors cette question qui, considérée au point de vue le plus général, est du ressort de la Philosophie. Comment peut-on parvenir à connaître la vérité ?

Il y a en général trois manières d'arriver à la connaissance de la vérité : la première toute rudimentaire et qui s'impose à l'homme le moins cultivé est l'*observation*, c'est-à-dire la classification dans la mémoire, des impressions laissées par les sens ; cette observation peut se borner à une simple réceptivité, et elle ne nous fait alors acquérir que des connaissances très élémentaires : elle peut être faite avec méthode, attentivement, et elle conduit ainsi à un plus grand nombre de vérités plus importantes.

L'observation, au lieu d'être en quelque sorte passive, peut se faire en provoquant l'apparition de phénomènes ; on fait alors ce que l'on appelle une *expérience*. Le jour où l'homme, après avoir constaté par l'observation que les arbres portaient des fruits utiles à sa nourriture, a eu l'idée de cultiver ces arbres pour étudier les conditions d'une meilleure récolte, il a fait une *expérience*. L'expérience, qui est un moyen de connaître la vérité, est l'observation faite d'un phénomène provoqué par l'homme et que la nature seule ne nous aurait pas permis de faire.

Enfin, on peut encore trouver des vérités en *raisonnant*, c'est-à-dire en cherchant les conséquences des phénomènes observés.

Ces trois manières de parvenir à la vérité donnent lieu à trois catégories de sciences : les sciences d'observation, les sciences expérimentales et les sciences de raisonnement. Cette classification n'est pas rigoureuse, car dans toutes les sciences on fait usage des trois moyens d'investigation dont nous venons de parler. Il y a plus : je démontrerai que toute science passe par trois phases successives : 1° la phase d'observation ; 2° la phase de raisonnement ; 3° la phase expérimentale.

Nous avons maintenant à examiner comment doivent être diri-

gées l'observation, l'expérience, le raisonnement, pour parvenir à la vérité.

D'abord, il convient d'observer que nous avons un moyen puissant de soulager notre mémoire et de retrouver la trace, l'image des phénomènes que nous avons observés ; c'est le langage ; et, bien que cette assertion paraisse assez évidente, il ne sera pas inutile de montrer à quoi cela tient ; nous verrons en même temps l'importance d'une langue bien faite sur le développement des idées, c'est-à-dire en définitive sur le développement de la science.

On peut créer une langue rudimentaire en représentant les objets dont l'existence nous est directement révélée par les sens, par des signes qui seront des images (des dessins) plus ou moins grossières rappelant ces objets. On peut avoir d'autres signes pour rappeler les sensations produites par ces objets ; adoptons un signe exprimant l'affirmation, un signe exprimant la négation, un signe exprimant un état passé, un signe exprimant un état présent, un signe exprimant un état futur ; cela suffira pour classer un nombre d'idées très supérieur au nombre des signes employés et pour soulager considérablement la mémoire ; supposons par exemple que les lettres A, B, C... désignent des objets matériels, a, b, c... des sensations, que

α soit le signe de l'affirmation,
ν soit le signe de la négation,
$-$ soit le signe du passé,
ω soit le signe du présent,
$+$ soit le signe du futur.

En supposant le nombre des lettres égal à 25, nous pourrons exprimer $25 \times 25 \times 5$, soit 3125 idées avec $25 + 25 + 5$ ou 55 signes. Si par exemple A est un chien, si a est la sensation produite par ce qui est chaud,

$$A\ \alpha\omega a$$

exprimera que le chien est chaud ;

$$A\ \alpha\omega a \quad A\nu + a$$

exprimera qu'il est chaud, mais qu'il ne le sera pas toujours, etc.

Une pareille langue hiéroglyphique est une langue primitive très rudimentaire et très mal faite ; elle ne peut permettre que l'expression d'un nombre très restreint d'idées, mais telle qu'elle est, elle peut déjà rendre d'immenses services.

Une langue bien faite doit remplir les conditions suivantes : 1° elle doit n'employer qu'un petit nombre de signes conventionnels ; 2° elle doit être pauvre, c'est-à-dire que toute idée nette et précise doit pouvoir se rendre simplement d'une manière, et d'une seule ; 3° des règles absolument fixes, et sans exception, doivent présider à la formation des signes qui représentent les idées.

Une pareille langue, dira-t-on, ne se prêtera ni aux développements oratoires, ni à l'expression des sentiments poétiques ; à cela je répondrai : vous n'en savez rien, l'expérience seule pouvant nous renseigner à cet égard ; et ensuite, cela m'est indifférent ; si une pareille langue existait, ce serait celle des savants, et qui sait ? peut-être aussi celle des poètes.

Il est certain que la langue très compliquée des Chinois a dû être la cause de l'arrêt complet qui s'est produit dans le développement de leur civilisation.

Je n'ai pas l'intention d'étudier la manière dont se sont formées les langues ; le temps, l'espace et surtout l'érudition me font défaut ; il me sera cependant permis de croire que l'alphabet, qui dérive sans doute des caractères hyéroglyphiques, a été l'une des inventions qui ont eu le plus d'influence sur le développement de la pensée.

Enfin je ferai cette remarque, qu'aucune langue existante n'est bien faite ; je n'en voudrais pour preuve que le besoin qu'ont éprouvé les géomètres de créer une langue universelle pour exprimer certaines idées, à la rigueur possibles, mais difficiles, à exprimer en langage ordinaire ; cette langue n'est autre que la notation algébrique ; la notation algébrique n'est sans doute pas parfaite, puisqu'elle s'est modifiée depuis son invention ; mais il faut croire qu'elle est singulièrement précise, puisqu'il s'est fondé en Italie une école philosophique qui emploie pour étayer ses raisonnements un mode de représentation de la pensée qui a de grandes analogies avec la notation algébrique.

Mais il est temps de fermer cette parenthèse, que nous avons ouverte à propos du langage, afin surtout de pouvoir expliquer pourquoi les savants ont été conduits à créer parfois un langage conventionnel.

Nous allons maintenant montrer comment on doit procéder pour faire des observations, des raisonnements, des expériences.

Une observation n'a de valeur scientifique que si sa description fait foi, c'est-à-dire que si tout le monde peut être assuré de l'exactitude de cette description. Pour cela, plusieurs conditions sont nécessaires : 1° il faut que le phénomène décrit soit possible en lui-même, c'est-à-dire ne soit pas en contradiction manifeste avec ce que nous savons pertinemment d'ailleurs : si l'on nous annonce que l'on a observé hier César et Pompée se promenant sur le boulevard des Italiens, ce fait, fût-il affirmé par les gens les plus dignes de foi, sera absolument sans valeur : 2° si le phénomène est possible en lui-même, il acquiert un degré équivalent à une quasi-certitude et devient une vérité, s'il peut être observé par celui qui en a lu ou entendu la description, à la condition qu'il aura convenablement fixé son attention en observant par lui-même ; 3° le témoignage de plusieurs personnes peut avoir la valeur d'une observation personnelle, quand ces personnes sont suffisamment nombreuses, quand leurs affirmations concordent, quand elles n'ont aucun intérêt à déguiser la vérité, enfin quand on a de bonnes raisons de croire qu'elles ne se sont pas trompées.

Il est plus difficile de donner des préceptes pour bien conduire un raisonnement (ce qui ne veut pas dire qu'il est plus difficile de bien raisonner que de bien observer). Les préceptes que les philosophes ont donnés à cet égard sont, tantôt d'une simplicité extrême, tantôt d'une complication si effrayante, qu'à les en croire, une petite élite serait seule capable de bien conduire ou comprendre le raisonnement le plus simple.

« Il sert de peu, dit Arnaud (*Art de penser*), de savoir les règles du Syllogisme..., mais le tout est de bien arranger ses pensées... »

Si ce précepte ne nous apprend rien au sujet de l'art de raisonner, il est au moins la condamnation des interminables discussions des logiciens sur les formes du syllogisme et des arguments en baroco et en baralypton.

Pascal donne un excellent conseil : « Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées. » Mais le conseil est plus facile à donner qu'à suivre.

Je ne crois pas qu'il existe d'autre manière d'apprendre à raisonner que de faire de nombreux raisonnements sous la direction d'un maître, ou de lire ceux qui ont été écrits par de bons auteurs. Cependant, au point de vue de la satisfaction de l'esprit, sinon au point de vue didactique, il peut être intéressant de rechercher quels sont les éléments d'un bon raisonnement.

1° Les éléments du raisonnement se réduisent à ce que l'on a appelé un syllogisme. Le syllogisme, d'après la remarque très juste de Duhamel, consiste en ceci : « quand il a été permis d'affirmer une chose d'un individu, on a le droit de la répéter ». On fait un syllogisme en remplaçant A,B,C, dans la phrase suivante par des objets déterminés :

Tout A *est un* B; *or tout* B *est un* C; *donc tout* A *est un* C. Cette phrase est composée de trois propositions : la première porte le nom de *majeure*, la seconde est la *mineure*, la dernière est la *conclusion*.

2° Le raisonnement prend encore une autre forme qui est celle-ci :

Ce qui est vrai pour A *est vrai pour les objets qui ne diffèrent en rien de* A.

Les fautes de raisonnement consistent donc à porter des jugements tels que *tout* A *est un* B, quand il n'en est pas ainsi; car il faudrait réellement le vouloir pour se tromper dans la conclusion, *donc tout* A *est un* C.

Ces fautes proviendront d'une observation mal faite, consistant à affirmer que tout A est un B, ou d'une conclusion antérieure inexacte. Le point de départ d'un raisonnement faux se trouve donc en général dans une observation mal faite. Sans doute quand Pascal dit : *ne s'appuyer que sur des axiomes très évidents*, il

entend par là qu'il faut faire les observations avec grand soin.

De cette petite discussion, il résulte déjà qu'il n'existe pas à proprement parler de science qui soit exclusivement une science de raisonnement : car le point de départ d'une science de raisonnement devra être un syllogisme dont la majeure sera une observation supposée bien faite.

Donner des règles pour bien diriger le raisonnement, ce n'est pas montrer comment on découvre la vérité, c'est montrer seulement comment on peut éviter l'erreur.

Il est plus difficile de dire comment on fait pour découvrir la vérité ; en réalité, le meilleur moyen de développer en soi l'esprit d'invention, c'est de lire et de méditer les écrits des grands maîtres, de ceux surtout qui ont exposé leurs recherches sans parti pris de cacher les méthodes qui les ont conduits à la vérité.

On peut cependant dire que les sciences de raisonnement font usage de deux méthodes que l'on appelle la synthèse et l'analyse. Je vais dire ce qu'*à mon avis*, on doit entendre par ces méthodes, dont on a donné les définitions les plus diverses. Il est évident que ces mots « analyse et synthèse » n'ont pas, pour tous ceux qui les ont employés, la même signification. Les mathématiciens appellent en général *analyse* l'Algèbre et le Calcul infinitésimal, et *synthèse* ce qui est du ressort de la Géométrie pure. Si l'on compare les méthodes employées le *plus souvent* en Algèbre et en Géométrie, on sera conduit à définir les méthodes analytiques, en disant que ce sont celles qui font découvrir les vérités, tandis que les méthodes synthétiques sont celles qui permettent d'établir solidement les faits que l'on soupçonne, et de décider si une chose est ou n'est pas.

En général, pour découvrir une vérité, on se pose un problème, c'est-à-dire une question à laquelle on essaye de répondre. Pour trouver la réponse, on fait dépendre la question posée d'autres plus simples, et celles-ci à leur tour de nouvelles questions de plus en plus simples, jusqu'à ce que l'on parvienne à des questions dont la réponse est immédiate, soit parce qu'elles sont connues, soit parce qu'elles sont évidentes. Chemin faisant, on

rencontre des vérités qui portent le nom de théorèmes. Le génie consiste à savoir poser ainsi une suite de problèmes intéressants, conduisant à des vérités importantes et surtout à savoir discerner, parmi les vérités que l'on rencontre, celles qui sont les plus fécondes, en mettant leur utilité en relief. Procéder ainsi, c'est, il me semble, faire de l'analyse.

On peut aussi découvrir la vérité au moyen d'hypothèses, de divinations plus ou moins ingénieuses, en généralisant des faits connus ; on énonce un théorème et l'on se propose d'en faire la démonstration ou d'en reconnaître la fausseté ; on peut pour cela suivre une marche progressive ou une marche régressive ; dans le premier cas, on va du simple au composé, en établissant des faits de plus en plus compliqués, conséquences de ceux d'où l'on est parti ou de ceux que l'on établit successivement, jusqu'à ce que l'on parvienne au théorème que l'on doit démontrer ou rejeter comme faux. Cette marche peut souvent conduire à d'autres vérités que celles que l'on cherche, mais présentant avec celles-ci des analogies ; cette manière de procéder, à mon avis, est encore analytique.

La marche régressive consiste au contraire à partir du théorème que l'on veut démontrer et à le remplacer par d'autres plus simples dont il serait une conséquence, jusqu'à ce que l'on parvienne à des résultats que l'on sait pertinemment être faux ou exacts. C'est dans cette manière, procédant du composé au simple, que consiste, pour moi, la synthèse.

En réalité, dans toute recherche il y a un mélange d'analyse et de synthèse, de divinations et de vérifications. On fait de l'analyse quand on découvre, on fait de la synthèse quand on vérifie. L'analyse est l'instrument créateur, la synthèse n'est qu'un moyen d'exposition.

Les auteurs qui emploient la forme synthétique pour exposer leurs découvertes ou celles des autres sont peut-être plus faciles à suivre, parce qu'en définitive ils ont, parmi les démonstrations qui s'offrent à eux, plus de choix et qu'ils peuvent être plus concis ; mais la lecture de leurs ouvrages est moins instructive, en ce sens qu'ils ne montrent pas comment on est arrivé aux vérités qu'ils rendent manifestes ; il y a, si j'ose m'exprimer ainsi,

un manque de franchise dans leur manière de procéder. Les auteurs qui emploient la méthode analytique sont plus séduisants, et malgré la complication apparente de la forme, ceux qui les lisent leur sont au fond reconnaissants de leur avoir montré le chemin qui les a conduits au but. En général, on retient mieux les démonstrations analytiques que les démonstrations synthétiques.

La méthode expérimentale est fondée sur ce que l'on appelle l'induction ; c'est à la fois une divination raisonnée et une hypothèse : c'est une opération qui consiste à présenter le syllogisme sous cette forme dubitative :

Si A est un B, comme tout B est un C, A sera un C :

Ou encore :

Si A est un B, et si tout B est un C, A sera un C.

Il reste à voir si A est un B et si tout B est un C, et l'expérience consiste à voir si en réalité dans la nature A paraît être un B et si tout B paraît être un C. L'écueil à éviter dans la méthode expérimentale est la tendance que l'on a d'atteindre un but déterminé à l'avance, tendance qui porte naturellement l'expérimentateur à négliger les observations qui ne viennent pas à l'appui de sa thèse et à exagérer l'importance des autres, au point même de les décrire inexactement.

J'arrive maintenant à la classification des connaissances humaines. Et puisque l'origine de nos connaissances se trouve dans notre sensibilité, il paraît naturel :

1° de définir une science en disant quelles sont les notions qu'elle emprunte au témoignage des sens ;

2° de ranger les sciences dans un ordre tel, que le nombre des notions empruntées au témoignage des sens aille en croissant ou en décroissant de l'une à l'autre.

En nous plaçant à ce point de vue, nous mettrons en première ligne la Mathématique ; de toutes les sciences c'est celle qui emprunte le moins de notions à l'observation, c'est-à-dire au témoignage des sens. *Un seul* syllogisme, énoncé ou sous-entendu, contient une affirmation empruntée à l'observation : *nous éprou-*

vons DES *sensations successives*. Pour édifier toute la Mathématique, il n'est même pas nécessaire de supposer l'existence de la matière, de l'espace; il suffit de posséder un seul sens, le plus imparfait de tous, si l'on veut, l'odorat. — En réalité, il vaut mieux supposer quelque chose de plus, mais seulement parce que l'on veut en définitive relier la Mathématique aux autres branches des connaissances humaines.

Pour expliquer en quoi consiste la Mathématique, je me placerai d'abord au point de vue le plus général : je supposerai que la Mathématique soit étudiée, non pour elle-même, mais comme une partie du savoir humain. Des objets sont distincts lorsqu'ils diffèrent l'un de l'autre par quelque propriété, par exemple par leur couleur, par leur position dans le temps ou dans l'espace, par leur goût, par leur odeur, etc.; des objets qui ne présentent aucun caractère qui ne leur soit pas commun constituent un seul et même objet, ou, comme l'on dit, des objets *identiques*. Et en effet s'ils ne constituaient pas un seul et même objet, ils auraient quelque propriété différente; par exemple ils n'occuperaient pas la même place, ils n'auraient pas la même existence simultanée, ...

Des objets très distincts, très différents à certains points de vue, sont dits égaux, à un certain point de vue, quand ils possèdent une propriété commune énoncée explicitement ou sous-entendue. Si dans un parc nous voyons un cheval, un bœuf et une poule, nous pouvons dire que dans ce parc il y a trois animaux, et qu'il y a seulement deux quadrupèdes. Dans le premier cas, le bœuf, le cheval et la poule sont des choses égales; dans le second, le bœuf est égal au cheval, mais n'est pas égal à la poule.

La notion d'égalité est donc fondée sur une *abstraction*, c'est-à-dire sur une convention que l'on fait de négliger toutes les propriétés d'un objet, pour ne tenir compte que d'une seule d'entre elles.

Ajouter des objets a, b, c, ... c'est former, avec ceux-ci, un objet S qui porte le nom de somme de a, b, c, ... et qui jouit des propriétés suivantes : en suivant une règle fixe, on combine a avec b, on obtient un objet B; en combinant B avec c et en sui-

vant cette règle, on obtient un objet C, et ainsi de suite ; et finalement on obtient l'objet S ; si la règle suivie est telle que l'on obtienne toujours S, quel que soit l'ordre dans lequel on considère a, b, c..., on dira que l'on a ajouté a, b, c...; S sera leur somme ; a, b, c... sont les *parties* de S. Si S ne dépend pas de l'objet a, c'est-à-dire si la somme de a, b, c ... est la même que la somme de b, c, ..., on dit que l'objet a est nul ou de nul effet.

Lorsqu'à propos d'une catégorie d'objets, on a défini l'égalité et l'addition, ces objets deviennent ce qu'on appelle des *quantités de même espèce.*

On dit qu'une quantité A est plus grande qu'une quantité B, de même espèce, quand on obtient A en ajoutant une certaine quantité à B ; on dit aussi que B est plus petit que A.

Peut-être ne sera-t-il pas mauvais de faire observer que ces propositions :

La somme est plus grande que ses parties ;

Les quantités égales à une autre sont égales entre elles ;

ne sont pas des *axiomes*, mais des *vérités de définition.*

Avant d'aller plus loin, que l'on me permette une petite digression pour justifier ce qui précède. J'ai donné des définitions de l'égalité et de l'addition. Il y a deux espèces de définitions : les unes ont pour but de préciser la notion de choses parfaitement connues ; ces définitions n'ont rien d'arbitraire ; elles s'appliquent à des objets connus, mais dont la notion n'est pas précise, elles doivent donner une description de l'objet en question, de manière à le distinguer nettement, sans ambiguïté, de tous les autres objets. D'autres définitions sont de pures conventions ; elles ont pour but de faire connaître des objets dont on est censé ignorer l'existence, et qui sont la création, pour ainsi dire, de celui qui définit. Ces définitions de l'égalité, de l'addition, de la quantité, sont des définitions de la première espèce ; bien des auteurs jugent ces définitions inutiles, et ne les donnent pas ; ils sont alors conduits à confondre des vérités qui peuvent se démontrer avec des axiomes [1].

---

[1] On objectera peut-être à ma définition de l'addition, qu'elle s'applique à la multiplication, puisqu'un produit de facteurs ne dépend pas de l'ordre des fac-

Je poursuis : *Mesurer* une quantité, c'est la désigner avec précision de manière à ce que l'on ne puisse pas la confondre avec celles qui sont plus grandes ou plus petites; cette mesure se fait à l'aide d'un *nombre*.

Un *nombre* est une locution ou un signe qui sert à désigner avec précision une quantité et *toutes celles qui lui sont égales*, de manière à les distinguer de celles qui sont plus grandes ou plus petites; on prouve que cette désignation peut se faire.

La *Mathématique pure* peut se définir : la science qui a pour but la comparaison des quantités ; et comme les quantités sont représentées par des nombres, on peut dire aussi que la Mathématique est la théorie des nombres.

Je n'ai pas à dire comment on a procédé pour dénommer tous les nombres; je n'écris pas un cours de mathématiques, je veux simplement constater la manière dont se sont formées les sciences, et plus exactement comment elles peuvent se développer.

Un grand nombre de mes collègues critiqueront peut-être la définition que j'ai donnée du nombre et vous diront que le nombre peut être défini indépendamment de la quantité. En cela ils ont raison ; et leur raison satisfera certainement quelques philosophes, qui verront sans doute avec plaisir que la notion de nombre, loin de reposer sur une application générale de nos sens, repose en définitive sur ce seul postulat, que nous avons conscience d'impressions successives. Ma notion du nombre repose sur l'existence des choses, la leur seulement sur l'existence des impressions.

Mais en se plaçant à leur point de vue qui est surtout celui des géomètres allemands, il est impossible d'établir des relations entre la Mathématique pure et les autres sciences, sans faire une opération qui revient à la définition que j'ai donnée du nombre.

Au point de vue didactique, ma définition, moins abstraite, ils sont obligés de l'avouer, est la seule qui soit accessible à de jeunes intelligences, et moi à mon tour je leur ferai cette concession que leur définition doit trouver sa place dans cette partie de la théorie des nombres qui porte le nom d'Arithmologie ou

---

teurs. A cela je répondrai que la multiplication est effectivement une des formes de l'addition, dans laquelle l'*unité* est l'objet nul et de nul effet.

d'Arithmétique supérieure, et qui est, en quelque sorte, la partie esthétique de la Mathématique pure, où le nombre est considéré en lui-même, indépendamment des applications que l'on peut en faire.

J'ai dit que la Mathématique était la théorie des quantités ou des nombres, c'est-à-dire, en définitive, l'étude et le développement de la double notion de l'égalité et de l'addition. On conçoit les applications de cette notion, et elles semblent d'abord assez limitées. Plus limité encore semble le champ des développements de cette idée en dehors de toute application. Toutefois, il faut l'avouer, de même que c'est du *grossier mécanisme des sens* que naissent les plus belles idées, de même les plus belles théories de la Mathématique pure ont leur origine dans le besoin que l'homme a éprouvé de résoudre des questions d'un ordre très matériel. Les sciences sont nées du besoin que nous avons de satisfaire nos sens; elles se développent en réagissant les unes sur les autres, et l'attrait des difficultés à vaincre nous pousse à les cultiver pour elles-mêmes et sans avoir en vue les applications immédiates. C'est le besoin de résoudre un ensemble de questions très pratiques, très terre à terre, si je puis m'exprimer ainsi, qui a donné naissance au Calcul infinitésimal, la plus belle invention de l'esprit humain, après celle des lettres, et cette invention s'est ensuite développée sans avoir pour but immédiat les applications. Et cependant les théories sont journellement appliquées dans un but utile par des personnes qui n'ont qu'une connaissance imparfaite de ces théories, qu'elles auraient été souvent incapables d'édifier.

S'il n'est pas possible ici de donner un aperçu détaillé des matières dont traite la Mathématique pure, nous pouvons et nous devons même indiquer l'esprit de la méthode employée dans cette science pour découvrir la vérité. La Mathématique procède successivement par abstraction et par généralisation; elle débute, comme nous l'avons vu, par une abstraction, car l'idée de nombre est évidemment née de l'abstraction que l'on est obligé de faire pour définir l'égalité. L'Algèbre, ou plutôt l'Analyse algébrique, est fondée sur une abstraction qui consiste à ne retenir des nombres que cette seule propriété commune à chacun

d'eux de représenter des quantités; ainsi en Algèbre une lettre a représente non plus un nombre, une quantité déterminée, mais un nombre quelconque jouant un rôle déterminé, rôle qui pourra être joué par tous les nombres ou par toute une catégorie de nombres déterminés. On va même jusqu'à raisonner sur des catégories d'opérations, faisant abstraction d'une foule de leurs propriétés pour ne retenir qu'une seule d'entre elles qui est loin d'être une opération. Les grandes découvertes ne sont souvent que des généralisations, suggérées par des indications bien dirigées. Le Calcul différentiel, qui a été toute une révolution dans le monde scientifique, est né de la généralisation de l'idée si simple des tangentes au cercle (de ces lignes qui touchent un rond sans le couper, sans le traverser). Disons enfin que c'est en perfectionnant le langage ordinaire, par l'introduction de nouveaux symboles pour condenser et mieux fixer les idées, que l'on arrive le plus souvent à découvrir des faits nouveaux en classant mieux les faits connus.

La Mathématique a son origine dans le témoignage des sens, dans l'observation; cela est évident; mais le rôle de l'observation est tout à fait secondaire. Il n'en est pas de même de l'expérience, bien que la théorie des nombres se suffise à elle-même. On peut en effet exposer la doctrine, sans montrer tout ce que la Mathématique pure a emprunté aux autres sciences: au point de vue philosophique, c'est peut-être mauvais, parce qu'il n'est pas bon de tromper ceux qui cherchent à s'instruire: on peut faire des raisonnements sans en donner des vérifications matérielles; c'est théoriquement inutile, s'ils sont bien faits. Mais si l'on réfléchit, on ne tarde pas à s'avouer à soi-même combien de fois l'on s'est trompé en raisonnant, et l'on éprouvera le besoin de vérifier expérimentalement les faits découverts par le raisonnement. Les plus grands géomètres font des fautes de calcul; ils font souvent des fautes dans de simples additions: au fond ce sont des fautes de raisonnement qui consistent dans des propositions fausses telles que deux et trois font sept.

Le rôle de l'expérience consistera souvent à employer d'autres méthodes pour retrouver les vérités révélées d'une certaine

manière, ou à voir si les faits restent exacts dans les cas particuliers dont la proposition trouvée est la généralisation (n'oublions pas en effet que la vérité se découvre surtout par généralisation).

La science des nombres, la Mathématique domine toutes les autres sciences : elle se suffit à elle-même ; aucune autre, comme je le démontrerai, ne pourrait se passer de son concours direct ou indirect ; je laisse de côté la philosophie qui n'est pas une science, mais la science par excellence, considérée dans son ensemble. Le rôle des sens dans le développement des connaissances mathématiques pures est presque nul ; aucun sens en particulier n'y joue un rôle spécial et ce rôle est tout à fait abstrait. Quand le rôle des sens devient concret dans une science, celle-ci devient une science physique ou naturelle. A ce point de vue la Géométrie, dont nous allons parler, est une science physique, parce qu'elle emprunte au témoignage des sens la notion de l'*espace* et la notion de *déplacement* (je ne dis pas *mouvement*, c'est-à-dire déplacement effectif, et qui suppose la notion de *temps*).

Comme toutes les sciences physiques, la Géométrie a débuté par être une science d'observation ; il est bien clair en effet qu'avant de spéculer sur ces figures que l'on appelle points, lignes, surfaces, volumes, lignes droites, cercles ou ronds, carrés, rectangles ou carrés longs, triangles, sphères ou boules, etc., les hommes avaient tracé ou construit plus ou moins grossièrement de pareilles figures et en avaient *observé* les propriétés essentielles. Pour ceux qui ne se sont pas livrés à l'étude des sciences, le point, c'est la trace laissée par un crayon que l'on a simplement appuyé sur le papier ; et pour le praticien, c'est un peu cela aussi : la ligne, c'est la trace laissée par le crayon que l'on déplace, et c'est souvent cela aussi pour le savant (il faut l'avouer) ; ce qui étonne surtout les commençants, c'est quand, à grands renforts d'arguments, on vient leur prouver des choses qu'ils croyaient savoir, pour les avoir observées cent fois.

Aussi devrait-on, à mon avis, enseigner la Géométrie en suivant la marche que l'on adopte dans l'enseignement de la Physique, et énoncer des faits, sans chercher tout d'abord à les

démontrer ; plus tard, on sentira la nécessité des démonstrations et il sera temps de procéder scientifiquement en faisant nettement la part laissée à l'hypothèse.

Il vient en effet un moment où, après avoir procédé expérimentalement, c'est-à-dire après avoir tracé des figures sur le papier, il vient un moment, dis-je, où l'on constate que les vérités soupçonnées ainsi ne s'appliquent pas précisément aux figures grossières que l'on a tracées au crayon, mais à des êtres de raison, à des êtres abstraits, qui n'ont qu'une existence idéale et qui sont en quelque sorte la perfection des figures tangibles que l'on a tracées.

On s'aperçoit bientôt que le raisonnement permet de découvrir, autrement que par des observations faites au hasard, certaines propriétés des figures ; et pour diriger ce raisonnement et le rendre satisfaisant pour l'esprit, on éprouve alors le besoin de donner des définitions précises des êtres de raison que l'on a conçus.

La Géométrie est la science qui s'occupe des êtres de raison dont la notion nous est imposée par le sentiment que nous avons de l'espace et de la forme ; c'est, si l'on veut, la science qui s'occupe des relations de forme et de position des objets dans l'espace.

Depuis longtemps on sait que les premières propositions de la Géométrie sont assises sur des démonstrations tout à fait insuffisantes, et les postulatums qu'il faut admettre sont en réalité en bien plus grand nombre qu'on ne l'avait cru jusque dans ces dernières années.

Il s'est fait pour la Géométrie ce qui s'était fait antérieurement pour les autres sciences physiques : on s'est demandé quelles étaient les hypothèses fondamentales nécessaires et suffisantes pour expliquer tous les phénomènes *apparents* de la Géométrie. Voici la voie que l'on a suivie et qui jette un jour tout nouveau sur la nature, ou, pour mieux dire, sur l'*essence* de l'espace ; et nous allons montrer comment on a résolu, peut-être pour la première fois, une véritable question de métaphysique.

Le lecteur, pour bien me comprendre, devra oublier le sens

qu'il attache aux mots *point*, *ligne*, *surface*... et en général à tous les mots que nous employons pour désigner des formes; je le prie de vouloir bien oublier la notion de l'espace, en faire abstraction complète.

Cela posé, j'appelle *point*, l'ensemble de trois nombres quelconques. Quand ces nombres varient, on dit que le point représenté par ces nombres se *déplace ;* suivant la manière dont ces nombres varient, le point se déplace en décrivant une *ligne* ou une *surface;* et à l'aide de définitions et de considérations *exclusivement* empruntées à la Mathématique pure, on parvient à construire une science très curieuse. Cette science ne dépend d'aucune hypothèse étrangère à la science des nombres ; elle est une branche de la mathématique pure et se subdivise elle-même en plusieurs autres; cette science est la Pangéométrie.

L'une de ses branches contient une infinité de propositions dont les énoncés sont, exactement, sans changer un seul mot, les énoncés des propositions que l'on rencontre en Géométrie. Par exemple on y énonce cette proposition : *les diagonales d'un carré se coupent en parties égales.* Seulement les mots *diagonale*, *carré*, *couper*, ont des significations absolument différentes de celles qu'elles ont en Géométrie ou dans le langage ordinaire. Cette coïncidence n'est certainement pas fortuite, et elle jette un jour tout nouveau sur la conception que l'on peut se faire de l'espace.

Il suffit en effet pour identifier la Géométrie vraie avec cette science, qui en est en quelque sorte son *sosie*, d'admettre :

1° Que nous avons la notion du point, notion abstraite, que je ne puis définir qu'imparfaitement, en disant que c'est l'élément primordial de l'espace, que c'est l'espace, auquel on a enlevé toutes ses qualités, excepté la seule qui fait que c'est un espace; que c'est l'être abstrait et parfait dont l'image grossière est la marque laissée par un crayon simplement appuyé sur une feuille de papier.

2° Qu'à tout point de l'espace, on peut faire correspondre trois nombres, et cela de telle sorte que trois nombres quelconques déterminent un point et un seul. A cela il faut joindre une définition du déplacement, et de la distance.

Mais (et c'est en cela surtout que la Pangéométrie doit intéresser les métaphysiciens et les philosophes et les engager à cultiver les mathématiques suivant la manière dont il plaira au théoricien de définir la *distance* et le *déplacement des figures sans changement de forme*, la Géométrie et la notion de l'espace revêtiront des aspects très différents. Cela nous montre que nous pouvons concevoir l'espace tout autrement qu'on ne le fait ordinairement par suite de l'*éducation qui nous a été donnée* et des préjugés qu'elle a enracinés en nous. Je vais essayer de mieux me faire comprendre.

Transportons-nous par la pensée dans un monde idéal, avec les notions que nous avons de l'espace (j'entends avec les notions qui résultent de l'éducation que nous avons reçue : ce monde est constitué de la manière suivante : tous les objets matériels diminuent de volume à tel point qu'ils finissent par s'anéantir en s'approchant d'un point fixe que j'appellerai le centre du monde : (cette hypothèse, en soi, n'a rien d'absurde : on sait en effet que tous les corps diminuent de volume en se refroidissant et que leur volume finirait par se réduire à rien pour un froid suffisamment intense) : supposons les volumes des corps sensiblement proportionnels à leurs distances au centre du monde. Que seront dans un pareil monde deux corps égaux, pour des êtres qui ne jugent des dimensions des corps qu'en les comparant ? Nous jugeons que deux corps sont égaux quand on peut faire coïncider leurs dimensions linéaires. Or pour établir une coïncidence, il faut effectuer au moins un déplacement, pendant lequel les dimensions du corps déplacé vont changer. L'égalité, dans le monde idéal dont nous venons de parler, la notion de la distance, ne seront pas les mêmes que pour nous.

Renversons les rôles : c'est l'être idéal qui nous observe ; pour lui, nous avons une notion fausse de la distance. Qui a raison ? La Pangéométrie nous répond que tout le monde a raison, elle nous dit ceci : En concevant l'espace comme vous l'avez fait, en créant une Géométrie toute particulière, vous avez employé un langage qui vous a permis d'exprimer des relations de la manière qui vous a paru la plus simple.

Encore quelques mots pour me faire mieux comprendre : considérons une mappemonde en verre, plaçons notre œil en un

point de cette mappemonde et regardons au travers une feuille de papier blanc ; avec un crayon nous pourrons sur le papier tracer une image des contours des continents, des fleuves, etc., de telle sorte que l'image de ces contours sur la mappemonde semble recouvrir leur image sur le papier. L'image sur le papier sera une perspective de l'image tracée sur la sphère, ce sera une carte de géographie. Cela posé, désignons par le même mot ou par la même locution une figure de la mappemonde et son image sur la carte de géographie, et conservons les dénominations usuelles pour les figures tracées sur la carte. Nous aurons une Géométrie absolument vraie sur la mappemonde, mais qui s'exprimera dans un langage bien choquant. Par exemple si nous disons (ce qui est vrai d'une figure tracée sur la carte) : les diagonales d'un carré se coupent en parties égales, cette proposition sera encore vraie pour la figure correspondante de la mappemonde ; seulement l'égalité ne se définira pas de la même manière pour les figures de la mappemonde et celles de la carte.

Or, supposons que la mappemonde soit la terre elle-même et supposons nos sens construits de telle façon qu'ils ne perçoivent que les images des phénomènes qui se passent sur la terre ; voilà notre Géométrie usuelle remplacée par une autre bien bizarre et qui cependant pourra s'exposer avec les mêmes formes de langage que la nôtre. Or qui peut affirmer que nos sens ne perçoivent pas quelque image des phénomènes réels ? Descartes prétend que ce n'est guère possible, parce que Dieu n'a pas voulu que nous soyons jouets d'illusions. C'est d'abord une affirmation sans preuve ; quant au mot illusion, il faudrait savoir jusqu'à quel point il est juste.

En définitive, nos sens ne font que nous donner des impressions ou, si l'on veut, des images des objets réels. La mappemonde est une image, la carte en est une autre ; quelle est la bonne ? L'une et l'autre, car l'une et l'autre nous font en définitive connaître ou enregistrer les mêmes vérités relatives, les seules que nous puissions connaître en dehors de nous-mêmes.

Demander si l'espace est limité ou ne l'est pas ne comporte pas de réponse positive ; c'est comme l'on voudra ; la sphère a une étendue limitée, son image a une étendue illimitée ; entre les deux nous pouvons choisir. Voilà, je crois, une question de

Métaphysique qui se trouve résolue, et qui l'aurait cru ? par des mathématiciens.

La Pangéométrie a reçu une généralisation bien remarquable, car elle touche encore de très près à des questions de Métaphysique. On peut appeler point l'ensemble de quatre nombres, et dire que quand ces nombres varient, le point qu'ils représentent décrit une figure dans l'espace à quatre dimensions. On peut ainsi édifier à l'aide de quelques nouvelles définitions une science qui est une extension de la Géométrie, ou plutôt de la Pangéométrie, et que l'on appelle quelquefois Géométrie à quatre dimensions. On a même inventé des Géométries à cinq, six... dimensions. Ces Géométries sont-elles susceptibles d'applications, ou bien sont-elles un objet de pure curiosité ? J'ai déjà fait observer qu'il n'y a pas à proprement parler de vérité de pure curiosité, et que l'on pouvait toujours espérer quelque résultat utile d'une vérité. Mais dès à présent on peut dire que la considération des espaces à plus de trois dimensions a rendu de réels services à l'Analyse mathématique ; au fond, dans ces considérations, il n'y a qu'une forme donnée au langage pour exprimer la pensée d'une façon plus concise ; mais nous avons déjà vu combien il était important de symboliser la pensée et de la condenser.

La Géométrie est à une, deux, trois... dimensions quand la position d'un point peut être déterminée en se donnant un, deux, trois... nombres. Si l'on fait de la Géométrie vraie et non de la Pangéométrie et si l'on ne s'occupe que des points situés sur une ligne, en se donnant la distance d'un point A sur cette ligne à un point fixe O, le point A se trouve déterminé ; on fait alors de la Géométrie à une dimension.

Si l'on ne s'occupe que des points situés sur un plan (une feuille de papier) ou sur une sphère (une boule, une mappemonde) deux nombres suffiront pour déterminer ce point ; par exemple sur la mappemonde un point est déterminé dès qu'on connaît sa longitude et sa latitude ; sur le plan sa position est déterminée quand on connaît sa distance à deux lignes droites fixes perpendiculaires l'une sur l'autre ; on fait alors de la Géométrie à deux dimensions.

Si l'on s'occupe de tous les points possibles, accessibles à nos sens, on pourra déterminer la position d'un point quelconque en se donnant par exemple : 1° sa hauteur au-dessus du sol, et 2° la longitude et la latitude du point où il tomberait, si, supposé pesant, on l'abandonnait à lui-même : en d'autres termes, un point situé sur le sol et sur la même ligne verticale que lui ; trois nombres sont nécessaires et suffisants pour déterminer la position d'un point ; dans ce dernier cas, on dit alors que l'on fait de la Géométrie à trois dimensions. Nos sens sont organisés de telle sorte qu'ils ne nous donnent pas la sensation d'un espace à plus de trois dimensions.

Et cependant l'existence d'un espace à quatre dimensions n'est pas théoriquement impossible. En faisant l'hypothèse qu'un pareil espace existe réellement, on peut expliquer bien des phénomènes inexplicables sans cela. Et d'abord, pour bien nous faire une idée de ce que peut être un espace à quatre dimensions, considérons une portion de surface plane (un petit fragment de papier susceptible de glisser sur une grande feuille de papier) assujettie à rester dans le même plan, mais capable de se mouvoir d'ailleurs en tout sens : supposons qu'une bonne fée anime tout à coup cette petite portion de surface en lui donnant des sens qui lui permettent de se rendre compte de tout ce qui se passe dans son plan (sur la feuille de papier), mais qui lui laissent non seulement ignorer ce qui existe en dehors, mais qui ne lui permettent même pas de soupçonner l'existence du dehors. Cette petite portion de surface ne pourra faire que de la Géométrie à deux dimensions ; notre Géométrie à trois dimensions lui paraîtra aussi absurde qu'à nous la Géométrie à quatre dimensions.

Que l'espace à quatre dimensions ait une existence réelle, il n'y a donc à cela aucune impossibilité ; admettons qu'il existe, jusqu'à preuve du contraire ; nous n'en sommes pas à notre première hypothèse, ni à la dernière.

Le je ne sais quoi, qui n'est certainement pas notre corps, ce qui ne sera pas notre cadavre après notre mort, cette chose qui a de la sensibilité, de la mémoire, de l'intelligence et de la vérité et qui est ce que j'appellerai notre âme, vit

peut-être dans l'espace à quatre dimensions; elle agit sur notre corps comme nous agissons sur une feuille de papier que nous faisons glisser sur une table. Rien ne nous empêche d'ailleurs, au moyen d'une fiction, de placer dans un espace à quatre dimensions des choses qui, comme l'âme, ont une existence réelle, sans que nous puissions les trouver dans notre espace cognoscible. Dans l'état de vie, l'âme humaine repose sur notre espace, comme le doigt qui s'appuie sur la feuille de papier pour la faire glisser sur une table ; dans l'état de mort, l'âme cesse de toucher notre espace à trois dimensions à l'endroit où est notre corps. Quelque chimérique que paraisse cette idée de l'existence effective de la quatrième dimension, il était bon, je crois, de la mentionner, ne fût-ce qu'à cause des services effectifs qu'elle rend à la science.

En parlant de la Géométrie et de ses affinités avec la Pangéométrie, nous n'avons guère quitté le domaine de la Mathématique pure ; et avant d'abandonner complètement ce domaine, il faut mentionner une méthode qui a exercé une influence des plus considérables sur le développement de la science ; je veux parler de la méthode infinitésimale.

Lorsque l'on veut étudier un phénomène, il est évident qu'il est plus facile de faire cette étude dans une faible portion de son parcours que dans son ensemble: et cette remarque seule ne présente pas un grand intérêt ; mais ce qui constitue une découverte merveilleuse, c'est que dans une petite portion du parcours d'un phénomène quelconque, quelque petite que soit cette portion, certaines relations entre les éléments qui constituent le phénomène se conservent intactes. L'étude de ces relations, généralement assez facile, est du ressort de ce que l'on appelle le Calcul différentiel ; quand je dis que cette étude est facile, j'entends qu'elle est facile pour nous, hommes du XIX^e^ siècle, mais il fallait du génie pour énoncer le principe fondamental du Calcul différentiel. Il est bien remarquable que l'on enseigne en France dans nos lycées le Calcul différentiel, sans que les élèves se doutent de l'existence du principe même qui lui sert de base et qui lui a donné naissance. On peut savoir beaucoup de mathématiques sans être philosophe et *vice versa*, malheureusement

d'ailleurs; les mathématiciens et les philosophes gagneraient à mieux se connaître.

Mais je reviens à mon sujet : lorsque l'on est parvenu, ce qui est, je le répète, en général assez facile, à trouver les relations permanentes entre les éléments d'un phénomène, on peut quelquefois pratiquement, théoriquement toujours, en déduire par l'Analyse mathématique toutes les lois du phénomène, et cela au moyen d'un instrument merveilleux que l'on appelle le Calcul intégral, qui a le seul inconvénient d'être un outil encore mal connu. Les mathématiciens les plus dignes de ce titre aujourd'hui sont ceux qui directement ou indirectement dirigent leurs recherches en vue de perfectionner le Calcul intégral; ceux-là seuls, en effet, sont de vrais philosophes.

Nous avons vu comment la Géométrie, née de l'observation, devenue une science de raisonnement, était entrée dans une phase expérimentale, seulement dans ces derniers temps, et comment cette dernière phase avait amené les mathématiciens, sinon à connaître la véritable essence de l'espace, au moins à reconnaître la valeur des hypothèses qu'ils avaient été obligés de faire pour édifier la science.

Il faut croire que la notion de temps est plus nette que celle de l'espace, car la phoronomie ou Cinématique, qui est la science du mouvement considéré en lui-même, n'a donné lieu à aucun de ces doutes qui ont si longtemps plané sur les principes fondamentaux de la Géométrie; et je ne mentionne que pour le constater le fait que l'on a soutenu sans écho sérieux qu'il n'était pas possible de mesurer le temps, parce qu'il était impossible de donner la notion de deux temps égaux. Sans doute d'une façon absolue cela est impossible; d'une façon relative c'est possible, et cela, en vertu d'une hypothèse très plausible, qui est celle-ci : lorsque nous voyons deux phénomènes d'ailleurs identiques s'effectuer à des époques différentes, ils s'effectuent dans le même temps. Il y a là une hypothèse ou une fiction analogue à celle que nous faisons en disant que les objets matériels peuvent se déplacer sans que leurs dimensions changent.

La Cinématique sert d'introduction à la Mécanique proprement dite, mais il y a une autre science qui lui sert également d'introduction et que l'on a des tendances aujourd'hui à déduire de la Mécanique ; je veux parler de la Statique. Etudier la Statique après les éléments de la Mécanique c'est, au point de vue philosophique, placer la charrue avant les bœufs ; c'est méconnaître l'instrument créateur, c'est faire abstraction de la manière dont se sont posés les principes fondamentaux, logiquement et historiquement, ainsi que je vais le démontrer.

Bien avant de soupçonner les lois de la gravitation universelle qui aujourd'hui encore ne sont bien connues que par les savants, l'homme a eu le sentiment de sa *force ;* l'homme le plus illettré sait que, dans la plupart des actes de la vie matérielle, il lui faut plus ou moins de vigueur ou de force pour vaincre les obstacles de la nature. Qu'il s'agisse de soulever un poids ou d'arracher un clou, il sait bien trois choses : 1° qu'il lui faudra déployer pour cela une force plus ou moins grande suivant les circonstances ; 2° que l'effort qu'il va déployer, que cette force, doit s'exercer dans une certaine direction ; ce n'est pas en poussant le clou vers le mur qu'il l'arrachera ; 3° qu'il peut soulever le poids, arracher le clou en exerçant son action au moyen d'un cordon dont la longueur est indifférente, mais dont la meilleure direction est déterminée. La Statique est la science qui étudie ces efforts ou forces ; elle n'a pas besoin d'autres principes pour s'édifier que ces trois remarques dont nous venons de parler et que tout le monde a pu faire ; ces remarques fort simples sont les principes fondamentaux de la Statique ; elle n'en invoque pas d'autres ; avec les principes de la Géométrie et de la théorie des nombres elle se suffit à elle-même. Science d'observation au début, elle est rationnelle dans la façon dont elle se développe ; mais pour entrer dans la phase définitive et expérimentale, elle a besoin de se fondre avec la Mécanique générale dont nous allons parler.

La Mécanique est, à proprement parler, l'étude des lois qui régissent la matière en mouvement ; pour connaître ces lois il a fallu d'abord observer les faits ; la Mécanique a d'abord été une

science d'observation. Mais contrairement à ce qui a eu lieu en Géométrie, on a peu essayé, je crois, de rechercher quels phénomènes devaient être fondamentaux, les autres étant conséquences forcées de ceux-ci : la phase rationnelle a été courte, mais elle a dû sans doute exister, et l'on est entré immédiatement dans cette phase expérimentale qui consiste à faire des hypothèses et à voir si ces hypothèses suffiraient à expliquer les faits acquis et à en prévoir d'autres, vérifiés par des expériences faites *a posteriori*.

Or il arrive que les hypothèses ou principes fondamentaux de la Mécanique, non seulement expliquent et prévoient tous les phénomènes observés sur la matière en mouvement, mais qu'ils expliquent aussi les résultats obtenus rationnellement en Statique. L'étude de la Statique à ce point de vue n'a donc pas été stérile; elle a été en quelque sorte, la phase rationnelle de la Mécanique; elle devait philosophiquement précéder celle de la Mécanique.

Disons, pour en finir avec la Mécanique, que comme la Géométrie elle ne s'applique qu'à des êtres de raison, qui sont le point matériel et la force.

Toutes les sciences dont nous venons de nous occuper sont des sciences exactes : elles doivent ce caractère à ce qu'elles spéculent sur des êtres abstraits, sur des êtres de raison que nous avons façonnés de manière à ce que leurs propriétés, absolument précises, fussent facilement accessibles à un raisonnement, irréprochable au point de vue de la rigueur des conclusions. Nous allons maintenant entrer dans le domaine de sciences qui seront loin de présenter les mêmes caractères.

Les sciences physiques ont pour but l'étude de la manière dont la matière inanimée se conduit vis-à-vis de la matière inanimée. A ce point de vue, la Mécanique se distingue surtout de la Physique, en ce sens qu'elle ne s'occupe que d'êtres de raison, tandis que la Physique s'occupe surtout d'êtres réels ou qui ont la prétention d'être réels.

L'observation nous montre qu'un corps, sans cesser d'être lui-même, c'est-à-dire sans cesser de ressembler foncièrement à ce

qu'il était à un instant donné, peut, suivant les circonstances, se présenter sous trois états :

1° Il peut être solide, liquide ou gazeux : une étude purement mécanique des corps sous ces trois états fait partie de la Mécanique rationnelle, mais en Mécanique ces trois états sont nettement définis comme des êtres de raison, et en Physique ils sont constatés et observés. Les trois états considérés en Mécanique sont des états parfaits, au même titre que la ligne en Géométrie est l'état parfait du trait laissé par le crayon sur une feuille de papier.

2° Les corps peuvent changer de forme sous diverses influences extérieures ; l'étude de ces changements de forme considérés en eux-mêmes est du ressort de la théorie de l'élasticité, théorie déjà entrée dans sa troisième phase ; on explique en effet les phénomènes élastiques par l'Analyse mathématique et les principes de la Mécanique, au moyen d'hypothèses qui aujourd'hui semblent assez bien justifiées.

3° La capillarité, l'endosmose sont des phénomènes du même ordre, ou probablement ; ces phénomènes, bien étudiés pour les liquides, sont encore mal connus pour les solides et les gaz ; on les explique par des moyens analogues à ceux qui ont servi à expliquer l'élasticité.

4° On remarque que les corps sont susceptibles de s'échauffer et de se refroidir. Sous l'influence du chaud et du froid, il se produit une foule de phénomènes que l'on observe, que l'on a déjà reliés entre eux ; ces phénomènes constituent la théorie de la chaleur.

5° Les corps peuvent devenir sonores.

6° Ils peuvent devenir lumineux.

7° Enfin ils peuvent affecter un état particulier dans lequel ils sont dits électrisés.

Chacun des états dont nous venons de parler donne lieu à une branche de la Physique.

Les corps peuvent au contraire subir en présence les uns des autres des modifications profondes à la suite desquelles on ne saurait les ramener à leur état primitif. La Chimie a pour but l'étude de ces modifications.

Tous les phénomènes dont nous venons de parler sont probablement, comme les phénomènes célestes, dus à la même cause, à la *gravitation universelle*, et les efforts des chimistes aussi bien que des physiciens tendent vers ce but : ramener tout à l'attraction universelle.

Qu'est-ce que le principe de la gravitation universelle ? On admet que la matière, je dis la *matière* et non pas l'espace, n'est pas divisible indéfiniment et qu'il existe dans tout corps un nombre très grand de particules, séparées les unes des autres par des intervalles très petits, mais très grands par rapport aux volumes de ces particules qui constituent ce que l'on appelle des *atomes;* les atomes en se groupant forment de petits mondes analogues à notre système planétaire, qui sont ce que l'on appelle des molécules ; tous ces petit mondes nagent dans un corps très subtil que l'on appelle l'éther, lui-même formé de molécules bien plus ténues que celles des corps matériels. Et maintenant tous ces petits corpuscules seraient pour ainsi dire animés de sentiments d'amour et de haine (je parle au figuré), en vertu desquels ils tendraient à se porter les uns vers les autres ou à s'éloigner, et ces petits êtres capricieux seraient en mouvement perpétuel par suite des sentiments opposés qu'ils éprouvent, ne différant des êtres animés que parce que ces sentiments de haine et d'amour, au lieu d'être guidés par la volonté, obéissent à des lois fixes qui dépendent en général de leurs positions respectives.

Quelle chimère, dira-t-on ! Il n'en est pas moins vrai que cette hypothèse, non seulement a permis de relier entre eux les phénomènes les plus divers, mais qu'elle a encore permis d'en découvrir une foule de nouveaux. Je ne citerai qu'un fait entre mille, pour convaincre le lecteur. Un grand géomètre, Poisson, se refusait à admettre de pareilles hypothèses et, pour les réduire une bonne fois à néant, il fit de fort beaux calculs, dont la conséquence était qu'en plaçant un écran dans des circonstances déterminées devant une source lumineuse, au lieu de porter ombre, cet écran devait renforcer l'éclat de la lumière ; la théorie semblait condamnée. Un autre savant, qui était un grand physicien, Fresnel, eut l'idée de faire l'expérience qui confirma les prévisions du géomètre ; la cause était jugée. Poisson venait

d'éprouver la plus glorieuse défaite qu'homme ait jamais subie.

Il ne faudrait cependant pas croire que l'hypothèse ou que la théorie de l'attraction universelle et que la théorie des ondulations qui en est une conséquence, rendent facilement compte de tous les faits observés. S'il en était ainsi, la Physique serait une science achevée; l'hypothèse moléculaire ne se suffit pas à elle-même, et l'on a été obligé de lui adjoindre successivement un grand nombre d'hypothèses, qui ont disparu pour faire place à d'autres expliquant mieux et plus complètement les faits. Les sciences physiques diffèrent en cela des sciences mathématiques pures; dans celles-ci les hypothèses sont restées les mêmes depuis leur origine jusqu'à nos jours, tandis qu'elles ont varié constamment en suivant le développement des sciences physiques.

Arrêtons-nous ici pour jeter un coup d'œil en arrière, car le caractère de la science va se modifier profondément. Toutes les sciences dont nous venons de parler se sont développées parallèlement: presque toutes les grandes découvertes effectuées dans l'une d'elles ont été l'occasion, le point de départ de nouvelles découvertes effectuées dans les autres. La Géométrie se serait difficilement développée sans le concours de la théorie des nombres, et les plus belles propriétés de l'étendue seraient restées éternellement cachées sans l'application que l'on a faite à la Géométrie des méthodes empruntées à la Mathématique pure, sous le nom de Géométrie analytique. La Géométrie à son tour a fait surgir une foule de questions qui ne se seraient pas posées et qui sont du ressort exclusif de la théorie des nombres.

C'est l'Analyse mathématique et la Géométrie qui ont permis de mettre en œuvre les hypothèses sur lesquelles repose la Mécanique et d'en contrôler le bien fondé, sinon l'exactitude. En revanche, un des plus beaux résultats acquis au Calcul intégral a son origine dans la solution du problème le plus général que se pose la Mécanique.

La Physique a également fortement réagi sur le développement des sciences mathématiques; ce sont des astronomes observateurs et des physiciens qui ont posé les principes qui ont servi de base à la Dynamique; et c'est une question de Physique, la recherche

des lois du mouvement des cordes vibrantes, qui a fait naître toute une branche du Calcul intégral et la plus difficile. Il est à peine nécessaire de dire que l'Analyse mathématique a dominé presque toutes les branches des sciences physiques. Le jour n'est peut-être pas éloigné où les questions de Chimie pure, les réactions des corps les uns sur les autres dans des circonstances données, pourront être mathématiquement prévues avant toute expérience.

La Mathématique pure est un instrument qui se perfectionne en s'adaptant aux circonstances, et si l'on conçoit que la science des nombres puisse à la rigueur se suffire à elle-même, et se développer sans le concours des autres sciences, pratiquement elle ne ferait et n'a fait effectivement des progrès réels, qu'avec le concours de la Géométrie, de la Mécanique et de la Physique.

J'ai dit, en commençant cette analyse, que l'on pouvait édifier la science des nombres en supposant que nos sens se bornent à nous faire subir des impressions successives, de telle sorte que nous puissions simplement concevoir la notion de ce que l'on appelle *une fois* et encore *une fois*, ce qui suffit pour avoir la notion du nombre entier. Mais cette idée serait évidemment restée stérile, si l'on n'avait pas eu le langage à sa disposition, ce qui suppose un usage et une application déjà très attentive de tous les sens, c'est-à-dire une connaissance relativement assez étendue des sciences autres que la théorie des nombres. L'idée du nombre fractionnaire, l'idée du nombre $\frac{1}{2}$ a dû précéder de beaucoup l'idée d'une théorie de la division des nombres entiers, et par suite l'idée très abstraite que les Allemands se font d'un symbole $\frac{1}{2}$ comme représentant une division impossible. Par ce simple exemple, on voit comment des questions en apparence étrangères à la théorie des nombres ont pu être l'occasion de perfectionnements ultérieurs, qui très probablement ne se seraient jamais accomplis si ces occasions ne s'étaient pas présentées.

On a la mauvaise habitude, à mon avis, de considérer la Géologie et la Minéralogie comme des sciences naturelles; leur définition rentre dans celle des sciences physiques, elles en ont le

caractère au même titre que l'Astronomie physique. En effet, cette science observe les mouvements des astres, leurs figures; elle étudie leur constitution physique et chimique, leurs transformations, leur histoire. La Géologie ne fait pas autre chose; ce n'est qu'une partie de l'Astronomie physique, puisqu'elle s'occupe de l'un des corps dont s'occupe l'Astronomie et, sinon par les mêmes procédés, au moins dans le même but.

J'ai défini les sciences physiques comme ayant pour but l'étude de la manière dont se conduit la matière inanimée à l'égard de la matière inanimée; j'aurais dû ajouter aussi à l'égard de la matière animée, puisque c'est en définitive à l'aide de nos sens que nous faisons cette étude. Mais dans les sciences physiques proprement dites, et c'est en cela qu'elles se distinguent des sciences naturelles, on n'étudie pas la matière animée en elle-même, on n'étudie pas ses modifications essentielles.

On pourrait dire que les sciences naturelles proprement dites s'occupent des modifications de la matière animée ou plus exactement vivante, et de l'action de la matière inanimée sur la matière animée. J'ai dit en commençant que nos sens nous révélaient l'existence d'êtres doués de sensibilité, de mémoire, d'intelligence et de volonté; j'ai voulu parler des hommes. Mais à côté de l'homme, il existe des êtres qui semblent doués de ces facultés à un moindre degré: ce sont les animaux et les plantes. Les naturalistes séparent ces êtres de l'homme et les considèrent seulement comme des êtres vivants, en leur refusant l'intelligence et souvent la mémoire et la sensibilité. Cette opération ne me semble pas justifiée, par la bonne raison que, n'ayant aucun moyen de la vérifier, nous ne pouvons rien dire à cet égard. Je ne suis pas naturaliste; mais j'ai le droit de le devenir et j'ai le droit de discuter avec les maîtres en cette matière les principes fondamentaux de la science qu'ils ont la prétention de m'enseigner, absolument comme je reconnais le droit, à l'élève auquel j'enseigne les éléments des mathématiques, de discuter avec moi sur le bien fondé des principes sur lesquels je vais m'appuyer. Les animaux, dit-on, n'ont pas inventé de langage, ils ne sont donc pas intelligents; à cela je répondrai: 1° vous n'en savez rien; 2° il n'est pas prouvé qu'en plaçant des enfants dans une île déserte et en

les laissant se développer loin des autres hommes, ils inventeraient le langage; il ne m'est pas prouvé que les hommes de l'âge de pierre parlaient. Le meilleur argument que l'on ait invoqué en faveur de l'intelligence de l'homme est que l'homme s'est perfectionné, c'est-à-dire qu'il a su à la longue augmenter son action sur les choses, et que jamais l'animal ne s'est perfectionné à ce point de vue. Or, avant de se perfectionner, il a fallu que l'homme ait eu l'idée de se perfectionner, et cette idée lui est peut-être venue fortuitement; nous ne savons pas combien de temps il a vécu à l'état de véritable animal, et nous ne savons pas non plus ce que ferait un enfant absolument séparé du reste de l'humanité. Mais, dira-t-on enfin, l'homme est susceptible d'éducation, son intelligence peut être développée au contact de l'homme; à cela je répondrai encore : le chien pourrait se perfectionner au contact du chien, si *un* chien avait eu l'idée de se perfectionner; le hasard qui a fait naître cette idée chez *un* homme, ne l'a pas fait naître chez le chien.

Quoi qu'il en soit, on ne refusera pas à certains êtres la sensibilité, la mémoire et la volonté; ces êtres sont les animaux. Ces êtres ont cela de commun avec les végétaux qu'ils sont capables d'engendrer des êtres de même espèce; ils sont vivants. La distinction en animaux et végétaux ne me paraît scientifiquement possible qu'en vertu d'une classification méthodique, car il me semble bien difficile de prouver que les végétaux sont dépourvus des facultés que nous accordons aux animaux et nous devons, pour agir sagement, nous maintenir à cet égard dans le doute. C'est l'observation qui, dans les sciences naturelles, joue le rôle prépondérant; ce ne sont ni des sciences de raisonnement, ni des sciences expérimentales. Je voudrais cependant que l'on ne se méprît pas sur la manière dont je considère les choses; en disant que les sciences naturelles ne sont ni des sciences de raisonnement, ni des sciences expérimentales, je ne veux pas dire que les naturalistes n'ont pas besoin de raisonner pour bien observer, classer et chercher; je ne veux même pas dire que parfois ils n'auront pas besoin de faire de véritables expériences; je veux simplement dire que l'observation est et sera, encore longtemps, le moyen, l'instrument le plus sûr pour trouver la vérité. Cependant la Chimie et la Physique prêtent un concours efficace aux

sciences naturelles et par suite indirectement les mathématiques. N'est-il pas permis de penser qu'un jour, ces sciences entreront dans une phase rationnelle et expérimentale ?

Les sciences sociologiques ont pour but l'étude de l'action de l'homme sur l'homme et sur les choses ; elles présentent ce caractère particulier que l'observation y a joué, y joue et y jouera continuellement un rôle important. Le raisonnement y joue un rôle également important, mais l'expérience y est presque impossible. C'est dans l'Histoire surtout, dans la Statistique, dans la Géographie, qu'elle trouve le point d'appui de ses conclusions. L'Histoire n'est pas une science ; c'est le commencement d'une science, c'est la phase d'observation de la Sociologie. Rien n'est plus fastidieux, à mon avis, que l'étude de l'Histoire considérée en elle-même, si l'on ne doit pas en tirer des conclusions ; rien n'est plus agaçant que ces petits pédants que leurs parents exhibent avec orgueil, parce qu'ils peuvent donner immédiatement la date de l'avènement ou de la mort d'un roi plus ou moins chevelu, plus ou moins réel, appelé aujourd'hui Pharamond ou Mérovée ; parce qu'ils connaissent la date d'un traité dont ils ignorent l'influence sur le sort de l'humanité. La description pure et simple des faits historiques me produit l'effet d'un roman trop long, mal conçu et peu intéressant.

Considérée à un point de vue plus élevé, l'Histoire illumine non seulement la Sociologie, mais même, les sciences les plus abstraites ; les mathématiciens eux-mêmes ont beaucoup d'enseignements à tirer de l'Histoire ; c'est en effet la lecture des anciens auteurs qui nous apprend comment se sont développées les connaissances humaines, quelles ont été les idées vraiment fécondes, quels ont été les procédés plus ou moins parfaits qui ont conduit les inventeurs à la recherche de la vérité.

Si les sciences naturelles nous font connaître l'homme en tant qu'animal, l'Histoire nous fait connaître son caractère et ses qualités intellectuelles et morales ; sachant ce qu'il a fait dans des circonstances déterminées, on peut prévoir par analogie ce qu'il fera dans des circonstances analogues. Enfin, et c'est là un des buts de la Sociologie, on peut se demander quels sont les mobiles qui font agir les hommes isolés ou pris en masse.

Disons maintenant quelques mots des méthodes que l'on emploie en Sociologie : un grand nombre d'observations, les observations statistiques se traduisent par des chiffres, qui, sans être faux, ne sont pas, ne peuvent pas être d'une exactitude absolue. Il faut savoir discuter ces chiffres, il faut savoir diriger leur évaluation. Cela exige du statisticien une connaissance approfondie du *calcul des probabilités* et ce que l'on peut appeler des *habitudes* scientifiques. Tout le monde ne sait pas observer. On apprend à observer comme on apprend à chanter; tout le monde sait fredonner; pour savoir chanter il faut avoir étudié. De même tout le monde peut voir; regarder est déjà plus difficile; observer ne peut se faire qu'à la suite d'une certaine éducation. Il faut aussi savoir ce qu'il est utile d'observer, et ne pas observer ce qui est insignifiant. Comme dans le public on connaît fort mal la science que je désigne sous le nom de Sociologie, je vais parler de quelques résultats dont elle s'est enrichie dans notre siècle. Elle a découvert les causes non pas de l'intérêt de l'argent, mais de la manière (règle d'intérêt) dont se percevait cet intérêt; elle a déterminé et comparé les effets de l'impôt sur le capital et sur le revenu. Elle a averti dans ces derniers temps une foule de sociétés de prévoyance qu'elles marchaient à une catastrophe, en les arrêtant sur la pente le long de laquelle elles glissaient. On est parvenu récemment à découvrir une loi d'après laquelle se répartissent les revenus dans un pays, et l'on peut en déduire, par un calcul assez simple, la manière de faire rendre à un impôt, suivant une loi donnée, le même chiffre qu'à un impôt établi sur d'autres bases. Cette loi n'a pu être formulée qu'à la suite d'examens de statistiques qui ont été concordantes, quoique effectuées dans des pays très différents, par des individus qui ne se connaissaient pas et qui ne se doutaient guère des conclusions qu'on en tirerait au fond d'un cabinet, etc.

J'ai évité avec soin jusqu'ici de parler de l'âme et de la divinité, c'est-à-dire des sciences théologiques. Les règles à suivre pour arriver à la connaissance des vérités théologiques ne doivent évidemment pas différer de celles que l'on suit dans les autres sciences, mais l'application de ces règles est beaucoup plus difficile. Etudions le rôle de l'observation, du raisonnement

et de l'expérience. Rappelons ce que nous avons dit plus haut : une observation n'est bonne : 1° que si le fait observé par un tiers est possible ; 2° que si elle a été faite avec attention ; 3° que si les observateurs sont dignes de foi et ne se contredisent pas. Enfin nous avons dit combien il fallait se méfier d'une démonstration, lorsque nous avons le désir de voir la vérité revêtir une forme déterminée à l'avance.

Or, l'Histoire religieuse en général contient à sa base une foule d'observations de faits qui sont des miracles, c'est-à-dire qui sont en contradiction avec ce qui se passe journellement devant nous; ces faits sont observés par des hommes primitifs, jamais par des savants; les histoires des religions diffèrent énormément entre elles; enfin, en matière religieuse, chacun veut prouver que la tradition de ses ancêtres est la bonne. On ne peut donc pas prendre l'histoire pour base de la théologie.

Je n'ai pas l'intention ici de prouver quoi que ce soit ; je veux étudier seulement les principes fondamentaux sur lesquels reposent les sciences. Je n'ai donc à prouver ni l'existence de Dieu ni celle de l'âme. Je ne crois pas qu'il soit possible de démontrer péremptoirement *a priori* l'existence de Dieu, aucune des preuves que l'on a données ne présentant les caractères de rigueur que l'on exige dans les sciences réellement dignes de ce nom. Quand Laplace a dit : Dieu est une hypothèse dont je n'ai pas besoin, il s'est placé sur un terrain vraiment scientifique, et nous a indiqué implicitement la marche à suivre dans les sciences théologiques.

Et, en effet, on peut poser comme hypothèse fondamentale l'existence de Dieu et de l'âme : en regardant la divinité comme la cause primordiale de l'énergie répandue dans l'univers, en attribuant à cette énergie certaines propriétés, on peut, en suivant les méthodes générales que nous avons esquissées, chercher les conséquences des hypothèses que l'on a faites et voir si elles sont d'accord avec les phénomènes que l'on observe. On peut surtout examiner si au point de vue pratique les hypothèses que l'on a faites conduisent à des résultats utiles, et c'est peut-être là ce qui a fait dire avec raison : si Dieu n'existait pas, il faudrait l'inventer.

L'éther, dont les physiciens ont fait un si heureux usage, n'existe peut-être pas, mais sa notion a été si utile que ce serait folie de renoncer à en admettre l'existence. Ne pas admettre l'existence de Dieu, c'est dans un autre ordre d'idées se priver d'une hypothèse qui a rendu de grands services à l'humanité. On a fait, dira-t-on, beaucoup de mal en prenant Dieu pour prétexte ; c'est vrai ; mais on peut raisonner fort mal sur une hypothèse qui, discutée avec soin, ne conduit qu'à de bons résultats.

Et maintenant, messieurs les philosophes, je m'adresse à ceux d'entre vous qui ont daigné lire ces quelques pensées sorties du cerveau d'un mathématicien ; peut-être consentirez-vous à lui accorder que les sciences exactes sont de nature à concourir au but que vous poursuivez, soit en vous faisant connaître des faits, soit en vous initiant à des méthodes que vous connaissez sans doute, mais, comment dirais-je sans vous offenser, ... sans les connaître dans toute leur... plénitude. Quant aux savants, ils fermeront le livre, après avoir lu les premières pages ; je ne leur apprends rien qu'ils ne connaissent déjà !

Ne se dégage-t-il pas cependant de ce qui précède que savants, philosophes et économistes, qui concourent par des moyens si différents en apparence au bonheur de l'humanité, auraient besoin de s'entendre et de marcher fraternellement la main dans la main ?

Le domaine de la science est si vaste, dira-t-on, qu'un pareil vœu est une chimère ; l'intelligence humaine est incapable aujourd'hui d'embrasser toutes les branches du savoir ; voyons quelle est la valeur de cette objection.

Ce qui m'étonnait prodigieusement quand j'étais jeune (bien qu'ayant complètement terminé mes études), c'est qu'en demandant des explications à de vieux savants, à d'illustres savants, ils ne pouvaient pas me les donner, bien que souvent ces explications fussent consignées dans plusieurs ouvrages ; j'ai appris depuis la raison fort simple de ce fait : pour être un savant, il n'est pas nécessaire de tout savoir, et le plus grand savant n'est pas celui qui a le plus d'érudition, mais bien celui qui connaît le mieux les méthodes de la science et qui sait le mieux en tirer parti.

Bien qu'il soit nécessaire de consacrer du temps à l'étude des méthodes, il n'est pas impossible de parcourir le cycle des connaissances humaines de manière à en saisir l'esprit et à en comprendre les méthodes. C'est dans ce sens que je voudrais que l'éducation des jeunes Français fût dirigée : je voudrais en résumé que l'on n'étudiât pas une science sans étudier toutes les autres, car toutes se tiennent et toutes concourent au même but : le vrai, le bien et peut-être le beau.

Pour parvenir à ce but si désirable, il faudrait que notre enseignement fût plus libéral, que l'État renonçât une fois pour toutes à voir dans l'enseignement libre un ennemi ; il faudrait qu'il renonçât à façonner tous les petits Français dans un même moule, laissant aux aptitudes individuelles la liberté de se développer suivant leurs instincts naturels. Il faudrait abolir cette sanction illusoire que l'on appelle le baccalauréat et qui est en réalité une entrave au libre développement des aptitudes de l'individu [1]. Le salut de la France est-il donc intéressé à ce qu'un fonctionnaire ait su, à un moment de sa vie, un peu de latin ou de mathématiques, s'il ne doit plus lui en rester le moindre souvenir au bout de quelques années? Je dis fonctionnaire, car nous voulons tous le devenir.

Oui ! l'État, au lieu de détruire l'enseignement libre, comme il l'a fait, à son profit et au profit des congrégations religieuses, ferait mieux de renoncer à donner lui-même l'enseignement secondaire, en se bornant à exercer une surveillance *active* et *effective* sur les établissements libres. L'État fait toujours plus mal que les individus, c'est un fait connu depuis longtemps; mais il peut mieux surveiller ; qu'il borne donc son rôle à celui de gardien vigilant de nos intérêts.

H. Laurent (Paris).

---

[1] Car il constate que vous avez appris des faits, non que vous vous êtes assimilé des méthodes, ce qui est bien plus important, car les faits s'oublient, les méthodes se retiennent.

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN RUSSIE

ÉTAT ACTUEL. — ENSEIGNEMENT PRIMAIRE

Nous avons déjà cité dans notre « Aperçu historique [1] » les résultats obtenus quant à l'enseignement mathématique, les tendances civilisatrices qui se réveillèrent dans les sphères gouvernementales et dans la société russe pendant les dix premières années du XIX^e^ siècle. Actuellement, nous sommes témoins d'un mouvement dans le même sens, encore plus remarquable par son intensité et par sa durée. Depuis l'époque des réformes exécutées par l'empereur Alexandre II, de 1860 à 1870, ce mouvement ne s'est pas ralenti et il dure encore. Voici les plus importants de ses résultats.

Dans le domaine de l'enseignement primaire : un grand accroissement s'est produit, en comparaison avec le passé, dans le nombre des écoles de ville et de village (au 1^er^ janvier 1894, ce nombre atteignait 43 894 d'après les recherches de la Libre Société Impériale économique) ; leur organisation régulière date de 1874 ; il faut citer aussi la fondation des écoles du dimanche, qui remonte à 1859, et des classes itératives pour les grands ; l'organisation de tout un système d'établissements préparatoires pour les futurs maîtres des écoles élémentaires, qui se traduisit par la fondation des instituts pédagogiques (1872) et des séminaires de maîtres (1870), et par l'organisation des examens (1868) pour les personnes désirant obtenir le droit d'enseigner dans les écoles élémentaires, mais n'ayant pas terminé leur éducation dans les établissements pédagogiques ci-dessus mentionnés ; enfin, la fondation des écoles techniques inférieures et des écoles des métiers (1889).

---

[1] Voir l'*Enseignement mathematique*, 1^re^ année, 1899, p. 77.

Dans le domaine de l'enseignement secondaire, nous mentionnerons : la fondation des écoles réales et des progymnases (1872) ; l'accroissement considérable du nombre des gymnases ; l'organisation de tout un système d'enseignement secondaire pour les femmes (1870), représenté par la fondation des gymnases, des progymnases et des écoles de diocèse pour les filles ; la fondation des écoles techniques secondaires (1889).

Enfin, dans le domaine de l'enseignement supérieur, nous devons rappeler : l'introduction, par le règlement de l'Université (1863), de l'enseignement des privat-docents, qui eut pour effet de laisser pénétrer dans les universités russes les sciences non introduites par le règlement ; la fondation de l'Université à Tomsk et de nouveaux établissements spéciaux : des instituts technologiques et agronomiques ; le commencement de l'organisation de l'enseignement supérieur des femmes qui s'est traduit par la fondation des cours supérieurs pour les femmes dans plusieurs villes universitaires et de l'institut de médecine à Saint-Pétersbourg ; la création d'une université libre : jusqu'à présent elle est représentée seulement par un système régulièrement organisé de publication « des programmes pour la lecture à domicile » et « pour l'instruction de soi-même » et par l'édition de manuels et de moyens classiques correspondant à ces programmes.

Dans cette étude, nous nous occuperons exclusivement de l'enseignement primaire.

Des écoles élémentaires existent en Russie, soit sous l'autorité du ministère de l'instruction publique, soit sous celle du clergé. Les écoles paroissiales, fondées par le clergé, et celles de village, relevant du ministère de l'instruction publique, composent le degré inférieur de ce système d'écoles. Elles se divisent en deux genres : les unes n'ont qu'une seule classe, et les autres en ont deux. Dans les premières, les cours durent deux ans (dans les écoles paroissiales ecclésiastiques) ou trois ans (dans celles de village) ; dans les écoles à deux classes, la durée est de quatre ans (dans les écoles paroissiales) ou de cinq ans (dans celles de village). Le rapport de ces deux genres d'écoles s'exprime par ce fait que les écoles n'ayant qu'une seule classe représentent la première classe de celles qui en ont deux.

L'enseignement de l'Arithmétique dans les *écoles paroissiales* ecclésiastiques de deux classes suit le programme officiel suivant, publié en 1886 :

Première année (6 leçons par semaine).

1. Les exercices oraux dans les limites de la première dizaine. Le calcul jusqu'à dix. Les calculs ; l'addition et la soustraction par unités et par groupes ; la composition d'un nombre par l'addition de parties égales et la décomposition d'un nombre en parties égales. La résolution de problèmes.

2. La connaissance des chiffres, des signes des opérations et de leurs dénominations. Les exercices écrits avec des nombres de la première dizaine.

3. Le calcul par des dizaines entières jusqu'à cent. Les opérations avec les dizaines dans les limites de la première centaine. Les calculs écrits et oraux. La résolution de problèmes.

4. Le calcul continuel jusqu'à cent. Les dénominations des nombres jusqu'à cent et leur indication par écrit. Les exercices oraux et écrits sur les quatre opérations avec les nombres, et la résolution de problèmes. La connaissance des tables d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. L'étude par cœur de la table de multiplication.

5. La connaissance des dénominations généralement usitées qui entrent dans chacune des quatre opérations (les nombres ajoutés, la somme, etc.) et des procédés pour les calculs oraux.

Deuxième année (6 leçons par semaine).

1. La numération jusqu'à un million. Les opérations par écrit avec des nombres jusqu'à un million. La déduction des règles générales pour les quatre opérations, avec des nombres entiers et abstraits. L'addition et la soustraction sur les bouliers.

2. La solution des problèmes à l'aide des quatre opérations. Les nombres complexes. La connaissance des mesures russes de poids, de longueur, de temps, des corps liquides, des matières sèches, des monnaies. Les opérations sur les nombres complexes.

Les règles des opérations sur les nombres complexes. La résolution de problèmes.

3. La connaissance des nombres fractionnaires les plus simples : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$.

Troisième année (4 leçons par semaine).

1. La résolution écrite de problèmes plus compliqués avec des nombres quelconques.

2. Les tables de mesures russes. Les exemples et les problèmes.

3. Les mesures de superficie et de volume. Les exemples de calcul des aires et des volumes dans les cas les plus simples.

4. La recherche d'une partie d'un nombre entier donné et d'un nombre entier dont une partie est donnée. Les opérations sur les fractions simples. Les problèmes oraux et écrits.

Quatrième année (4 leçons par semaine).

1. La répétition du cours précédent.

2. Les problèmes oraux et écrits, résolus par la réduction à l'unité.

3. Les premières notions de la chronologie et des problèmes qui la concernent.

Le programme officiel de l'enseignement de l'Arithmétique dans les *écoles de village* publié par le Ministère de l'Instruction publique le 31 mai 1869, est loin d'être détaillé. Le voici :

Première classe. *Première année* (5 leçons par semaine). — L'explication graduelle et intuitive (anschauend) de la composition des dix premiers nombres au moyen de la simple vue (contemplation) des objets visibles. Les enfants reçoivent en même temps aussi, au moyen de la simple vue, l'idée de l'addition, de la multiplication, de la soustraction et de la division. Les chiffres qui servent à marquer ces nombres. L'idée au moyen de la simple vue de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$. Les nombres de dix jusqu'à

cent d'après le même système. Immédiatement après l'explication d'un nouveau nombre, le maître propose aux élèves des problèmes, faciles et pratiques, dans lesquels intervient ce nombre. Les quatre opérations trouvent leur place dans ces problèmes. Tous ces problèmes doivent être résolus mentalement et avec les explications nécessaires.

Seconde année (5 leçons par semaine) et *troisième année* (6 leçons par semaine). — Les nombres jusqu'à un million. Les problèmes résolus mentalement et par écrit. L'emploi des bouliers. Dans la première classe les enfants doivent peu à peu acquérir la connaissance (au moyen de la simple vue) des monnaies, des mesures de poids, de temps, de longueur, etc. .

Seconde classe. *Quatrième et cinquième années* (6 leçons par semaine). — Les fractions simples ; les quatre opérations sur les fractions. La solution des problèmes concernant la règle de trois, les questions relatives aux alliages, la règle de société, les intérêts simples, sans l'aide des proportions. Outre l'Arithmétique on a introduit dans le cours de cette classe *les notions élémentaires de Géométrie :* les principaux fondements de la planimétrie et le lever des plans, de même que le dessin linéaire, dont les applications commencent déjà dès la troisième année de la première classe avec quatre leçons par semaine.

Mais le programme du ministère de l'Instruction publique ne donne pas de notions plus précises en ce qui concerne l'étendue de cette partie du cours des écoles de village consacrée à la Géométrie, laissant apparemment aux administrations des arrondissements scolaires la mise en œuvre détaillée de ces indications générales.

Effectivement cette mise en œuvre fut entreprise par les administrations des arrondissements scolaires, sous l'influence des exigences de la pratique, mais ce ne fut pas tout de suite. Par exemple, dans l'arrondissement scolaire de Moscou, il s'écoula vingt-six ans depuis la publication du programme du ministère de l'Instruction publique (31 mai 1869) jusqu'à la publication, par l'administration de l'arrondissement, des « programmes d'enseignement dans les écoles d'une ou de deux classes fondées

près des séminaires de maîtres » (15 mai 1895). En outre, il est nécessaire de remarquer que les programmes de l'arrondissement ne sont composés que pour les écoles-modèles, destinées aux exercices pratiques de l'enseignement donné aux futurs maîtres. Pour toutes les autres écoles de village, ils ne servent qu'à indiquer la plus large étendue dans laquelle l'enseignement mathématique peut y être introduit. Il est nécessaire de citer en entier les programmes dont nous venons de parler; ils peuvent servir d'exemple pour une application détaillée des indications du ministère de l'Instruction publique, par les arrondissements scolaires.

Arithmétique. — Première classe. Première année. — *Les opérations sur les nombres de la première dizaine.* — Le calcul direct et inverse. L'addition et la soustraction par groupes d'unités. La comparaison des nombres d'après leurs différences. Le calcul par groupes égaux. La division en parties égales. La comparaison des nombres d'après leurs rapports. La solution orale des problèmes sur les quatre opérations. La connaissance des chiffres et des signes d'opérations. Le calcul des formules. *Les opérations sur les nombres de la première centaine.* La dizaine comme unité de calcul. Le calcul par dizaines et les opérations sur les dizaines entières. L'indication des dizaines. La numération écrite et la numération parlée. La formation et l'étude de la table d'addition. Le procédé normal de l'addition orale. La formation et l'étude de la table de soustraction. Le procédé normal de la soustraction orale. La formation et l'étude de la table de multiplication. Le procédé normal de la multiplication orale. La généralisation des deux cas de division. La formation et l'étude de la table de division. Le procédé normal de la division orale. La résolution orale de problèmes sur toutes les opérations.

Deuxième année. — *Les opérations sur les nombres dans les limites d'un millier.* — La numération parlée et la numération écrite. L'extension des procédés normaux de l'exécution orale des quatre opérations sur les nombres dans les limites d'un millier. La connaissance des termes. Les procédés particuliers d'exécution des opérations. La résolution orale de problèmes et

d'exemples avec l'inscription de la marche suivie. Les fractions les plus simples.

Troisième année. — La numération des nombres des trois premières classes. Les règles de l'exécution par écrit des quatre opérations. La notion de la mesure des grandeurs. Les tables des mesures russes. Les nombres concrets et les nombres complexes. La réduction ascendante et la réduction descendante. Les opérations sur les nombres concrets. Les problèmes sur le calcul du temps. Les mesures de superficie et de volume. Les fractions les plus simples.

Seconde classe. Première année. — La répétition de l'Arithmétique des nombres entiers. La divisibilité des nombres. Les nombres premiers et les nombres non premiers. La notion du diviseur et du multiple d'un nombre donné. Les conditions de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 et 25. Décomposition des nombres en facteurs premiers. La notion du plus grand commun diviseur, la recherche de ce diviseur par la décomposition des nombres donnés en facteurs premiers. La recherche du plus petit commun multiple. Les fractions. L'origine des fractions, du mesurage et de la division. Les fractions inférieures et supérieures à l'unité. La réduction d'un entier joint à une fraction, à une fraction supérieure à l'unité, et réciproquement. Le changement des fractions par l'augmentation et la diminution de celles-ci en un certain nombre de fois. La recherche de quelques parties d'un nombre donné et la recherche de nombres dont les parties sont données. La réduction d'une fraction à sa plus simple expression. La réduction descendante d'une fraction. La réduction de plusieurs fractions au plus petit dénominateur commun. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des fractions et des entiers joints aux fractions. La réduction ascendante et la réduction descendante des nombres concrets fractionnaires. Les opérations sur les nombres concrets fractionnaires. La résolution orale et écrite de problèmes sur les nombres fractionnaires.

Seconde année. — La base principale du système décimal de numération. Les fractions décimales. La manière d'écrire une fraction décimale. La manière d'énoncer une fraction décimale

écrite. La multiplication et la division des fractions décimales par 10, 100, 1000... La réduction des fractions décimales au même dénominateur. L'addition, la soustraction, la multiplication et la division des fractions décimales. La réduction des fractions ordinaires en décimales exactes. La solution des problèmes relatifs à toutes les opérations sur les fractions décimales. La notion des grandeurs proportionnelles. La solution des questions qui se rapportent aux règles de trois, aux intérêts simples, à l'escompte commercial, aux partages proportionnels et aux alliages.

Dessin linéaire en connexion avec les connaissances géométriques. — La déduction des notions géométriques fondamentales, résultant de la considération des solides : le corps géométrique ; la surface et ses deux espèces ; les plans et les surfaces courbes ; la ligne ; les lignes droites et les lignes courbes ; le point ; les dimensions des solides, des surfaces et des lignes. Le but de la Géométrie. Les lignes. Les propriétés de la ligne droite ; le tracé des lignes droites et les opérations qui s'y rapportent ; le compas ; le mesurage des lignes droites ; l'échelle linéaire. Les lignes courbes et les lignes brisées, la rectification des lignes courbes et des lignes brisées. — Les angles. La comparaison des angles d'après leur grandeur ; le tracé des angles et les opérations qui s'y rapportent. Les angles adjacents ; les angles droits, obtus et aigus. La propriété des angles adjacents et des angles formés autour d'un point par plusieurs droites. Les angles opposés. Les propriétés de la perpendiculaire et des obliques. L'équerre. Les verticales et les lignes horizontales ; le fil à plomb. — La circonférence. Les notions de la circonférence, du rayon, du diamètre, de l'arc, de la corde, de la tangente. La notion de l'angle au centre ; le mesurage des angles par les arcs ; le rapporteur. La construction du centre d'une circonférence donnée ; la construction d'une circonférence d'après trois points donnés. — Les lignes parallèles. La notion des lignes parallèles. Les propriétés des angles formés par deux lignes parallèles rencontrées par une sécante. La construction des lignes parallèles. — Les figures. La notion de la figure. Les figures rectilignes et curvilignes ; la notion du cercle. Les

espèces de figures rectilignes. Les espèces de triangles. La somme des angles d'un triangle, et de chaque espèce de polygone. Les conditions de l'égalité des triangles, et la construction des triangles d'après des éléments donnés. Les problèmes résolus à l'aide de l'égalité des triangles : mener une perpendiculaire à une droite donnée, par un point pris sur cette droite ou en dehors ; diviser une droite en deux parties égales ; construire un angle égal à un angle donné et diviser un angle donné en deux parties égales. Les espèces de quadrilatères. La propriété des diagonales d'un parallélogramme. La construction des quadrilatères d'après des éléments donnés. La division des lignes en plusieurs parties égales. Les polygones réguliers ; la valeur de l'angle intérieur d'un polygone régulier. La construction des polygones réguliers. Les polygones réguliers circonscrits et inscrits dans le cercle. La longueur de la circonférence. — La similitude des figures. La notion des triangles et des polygones semblables ; la proportionnalité des côtés homologues. L'échelle décimale. La construction des figures semblables. — Le mesurage des aires. L'aire de la figure ; les mesures des aires. Les figures équivalentes. L'aire du rectangle et du carré. La notion de l'arpentage. L'aire du parallélogramme ; les conditions de l'équivalence des parallélogrammes. L'aire du triangle ; les conditions de l'équivalence des triangles. L'aire du trapèze et du polygone régulier. Faire un triangle équivalent à un polygone donné. L'aire du cercle. — La solution des problèmes sur le terrain. Les instruments les plus simples que l'on emploie pour les opérations sur le terrain : chaîne d'arpenteur, corde, équerre d'arpenteur, graphomètre, planchette. Le tracé des lignes droites sur la surface de la terre. Le mesurage des lignes et des angles. Le tracé des lignes parallèles et perpendiculaires. Trouver la distance de deux points dans différents cas. Trouver la hauteur d'un objet. La notion du lever des plans. Le lever d'un plan à l'aide de l'équerre d'arpenteur, du graphomètre et de la planchette. Le lever du plan d'un terrain qui a pour limites des lignes courbes. L'arpentage du terrain d'après un plan. Les notions du plan et de la façade d'un édifice. Le mesurage des surfaces et volumes : du cube, du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône et de la sphère.

On emploie dans les écoles paroissiales ecclésiastiques trois recueils de problèmes d'Arithmétique, qui sont officiellement recommandés. Dans l'un de ces recueils « les données » sont prises principalement dans la vie rustique. En outre, pendant les répétitions, il est permis aux élèves de profiter d'un manuel spécialement édité dans ce but, intitulé « Cours itératif d'Arithmétique, destiné aux écoles élémentaires du peuple ». Quant au programme du Ministère de l'Instruction publique il ne contient aucune indication précise ni de manuels ni de ressources classiques. Les programmes édités par les arrondissements scolaires, comme on peut le voir d'après celui de Moscou mentionné ci-dessus, contiennent des indications de ce genre. Cinq recueils de problèmes d'Arithmétique sont indiqués par ce programme, et deux, dans ce nombre, sont aussi recommandés pour les écoles paroissiales ecclésiastiques. Ces deux livres sont : « Recueil de problèmes et d'exemples pour l'enseignement de l'Arithmétique élémentaire », par A. Goldenberg, en deux livraisons ; et un autre, ci-dessus indiqué « Recueil de problèmes d'Arithmétique », dont les données sont prises de préférence dans la vie rustique, par F. Loubenetz. Ces recueils sont édités tous deux depuis longtemps, et de nombreuses éditions nouvelles n'ont cessé d'en être publiées jusqu'à présent.

Il arrive aux pédagogues des écoles russes de village de rencontrer beaucoup de particularités importantes qui exigent d'eux une originalité complète dans la manière d'enseigner. Le besoin, créé par des conditions de la vie du village russe, d'employer les enfants en qualité d'ouvriers, du moins pendant la saison chaude, fait que l'on doit abréger l'année scolaire, qui ne dure, du reste, que sept mois. De la sorte, on cesse d'enseigner dans les écoles de village, à l'exception peut-être des écoles-modèles, pendant cinq mois, soit du 1er mai au 1er octobre.

Une autre particularité importante, du moins pour l'enseignement de l'Arithmétique dans les écoles de village, est le penchant national des Russes pour l'étude et l'exploration des mathématiques dans la direction arithmético-algébrique. Ce penchant est indiqué dans notre « Aperçu historique ». Actuellement, un grand nombre de problèmes très compliqués

circulent parmi les paysans russes. Ils ont été créés par le milieu lui-même, sans aucune participation extérieure, alors qu'il n'y avait personne parmi eux sachant lire ou écrire. Beaucoup de ces problèmes se rapportent à l'Analyse indéterminée. Comme exemples les plus remarquables de ces derniers, on peut citer les deux suivants : « Une volée de corneilles passait près de quelques chênes. Si les corneilles se posent deux à deux sur chaque arbre, il n'y aura pas assez d'oiseaux ; si au contraire chacune d'elles occupe un chêne, il en manquera un seul. Combien y avait-il de corneilles et de chênes ? » « Il faut acheter 100 bestiaux pour 100 roubles ; les prix sont 10 roubles et 50 kopecks. Combien de bêtes de chaque prix aura-t-on ? » Parmi un grand nombre de variantes de ces problèmes, la suivante est bien digne d'attention ; elle forme tout un problème déterminé. « Une volée d'oiseaux s'approche d'un bosquet ; ils se posent deux à deux sur chaque arbre, mais un arbre reste inoccupé. Que faire ? Chaque oiseau occupe un arbre, mais il en manque un. Combien y avait-il d'arbres et d'oiseaux ? » Comme exemple d'un problème compliqué et déterminé on peut indiquer le suivant : « Il passe une compagnie d'oies, un jars vient à leur rencontre. Bonjour cent oies, dit-il ! — Non, tu te trompes, notre compagnie ne contient pas cent oies : s'il y en avait encore autant que tu en vois ici, et la moitié de ce nombre et le quart et toi, jars, alors nous aurions été cent. Combien d'oies passait-il ? » On résout tous ces problèmes et les semblables, avec ou sans discernement, au moyen de la méthode des tâtonnements [1]. Un garçon de onze ans, Jean Pétroff, calculateur russe prodige, qui sortait d'une pauvre famille de paysans du gouvernement de Kostroma et qui ne savait ni lire ni écrire, se distinguait par la faculté excessivement développée d'employer cette méthode tout à fait inconsciemment [2]. Il résolvait non seulement toutes sortes de problèmes d'Arithmétique, mais ceux d'Algèbre réductibles à la solution des équations du premier et du second degré, et des équations indéterminées du premier degré, avec une rapidité

---

[1] V. Bobynin, *Sur les méthodes primitives qui ont servi à résoudre des questions arithmétiques*. Bibliotheca mathematica, VIII, 1895, p. 55-60.

[2] *Ibid.*

étonnante, sans connaissance de ce qu'il faisait. Grâce à la propagation générale du calcul digital dans le peuple russe, le système décimal devint si familier aux paysans russes que le proverbe suivant apparut dans ce milieu depuis un temps immémorial, beaucoup avant l'apparition des hommes sachant lire et écrire : « Sans dizaines, point de calcul ».

Un état si élevé dans la culture du calcul chez le peuple russe, uni au penchant national pour les occupations mathématiques dans la direction arithmético-algébrique, qui a amené cet état, crée, quant à l'enseignement mathématique dans l'école russe de village, un milieu d'élèves très développé d'esprit. Ce milieu est très enclin à la critique, et possède non seulement un niveau très élevé des connaissances arithmétiques, mais des penchants et des tendances exprimés d'une manière plus ou moins distincte. C'est aux écrivains autorisés et aux observateurs attentifs de l'école russe de village, que nous devons des révélations à ce sujet. On peut citer, notamment le comte Léon Tolstoï et le célèbre travailleur, qui s'est consacré avec tant d'abnégation à l'instruction des paysans russes, S.-A. Ratchinsky, jadis professeur à l'Université de Moscou. Les observations dont ils nous font part [1] nous amènent aux déductions suivantes : 1) A leur entrée à l'école, les enfants de village comprennent le système décimal jusqu'à vingt, dans un plus grand nombre de cas jusqu'à cent et même encore au delà ; 2) la plupart des élèves, à l'exception de ceux qui sont le moins doués de la nature, savent résoudre les problèmes d'oiseaux et d'arbres, de bétail acheté, d'oies, ci-dessus mentionnés. Quelques-uns sont même en état de donner une complète explication de leurs solutions ; 3) tous ces élèves, à la même exception près, montrent un penchant remarquable, poussé quelquefois jusqu'à la passion, pour le calcul mental et le calcul écrit des grands nombres ; 4) la plupart montrent une habileté extrême dans les opérations sur les nombres et le plus vif intérêt pour les nombres et leurs combinaisons.

---

[1] Comte L. Tolstoï, *De l'instruction du peuple*. Œuvres complètes, t. IV, p. 373-455. — S.-A. Ratchinsky, *École de village*, Troisième édition. Saint-Pétersbourg, 1898, p. 69-75.

Le manque de temps pour l'étude et les conditions qu'offre le milieu d'élèves de l'école de village russe, que nous venons d'indiquer, rendent nécessaire pour l'enseignement de l'Arithmétique la réalisation des exigences et des principes suivants : 1) Ne pas enseigner aux élèves ce qu'ils connaissent déjà en entrant à l'école ; 2) donner place à une application large de la méthode des tâtonnements, de même qu'à la règle de fausse position, qui en résulte. Ces deux méthodes sont universelles, propres à fournir la solution de toutes sortes de problèmes et non seulement de groupes détachés, comme toutes les autres qu'on emploie actuellement dans les manuels et dans l'enseignement ; 3) fonder la composition des programmes et l'organisation de toute la marche de l'enseignement sur les indications de l'histoire des mathématiques et en cas de pénurie de ces dernières ou de leur absence complète, sur des témoignages directs de l'expérience et de l'observation. Il est connu qu'au XVI^e^ siècle, grâce à ce procédé, l'enseignement de l'Arithmétique a atteint un état florissant en Allemagne, à tel point que son principal représentant, Adam Riese, devint, comme maître de calcul, un personnage légendaire dans le peuple allemand, parmi les simples. Jamais rien de pareil ne se produisit, ni avant, ni après.

Mais la réalisation de tous ces principes et de toutes ces exigences est une affaire très difficile. Pour l'accomplir, il est nécessaire d'étudier personnellement et directement le milieu d'élèves et de savoir à fond l'Histoire et la Philosophie des Mathématiques. Un grand talent est aussi nécessaire pour l'organisation de l'enseignement de l'Arithmétique sur de nouveaux fondements et pour la composition des manuels qui doivent exposer ce système aux maîtres. Les pédagogues russes officiels choisirent un chemin plus facile. Ignorant la réalité et ses exigences dans leurs cabinets et chancelleries, ignorant aussi la science représentée par l'Histoire et la Philosophie des Mathématiques, ils se contentèrent d'un simple emprunt ; ils prirent à l'Allemagne des principes d'enseignement complètement fantastiques qui se développèrent sur le sol de la métaphysique, tout cela au lieu de créer des méthodes et des procédés originaux. Ainsi de 1860 à 1870, le principe inventé par Grube fut intro-

duit dans l'enseignement russe élémentaire de l'Arithmétique. Ce principe consiste en un examen complet des nombres. Le programme d'Arithmétique du Ministère de l'Instruction publique, ci-dessus mentionné, est composé d'après ce principe, comme le montrent clairement beaucoup d'expressions que l'on y rencontre ; par exemple, « la connaissance de la structure des dix premiers nombres », « chaque fois qu'on étudie un nouveau nombre la proposition de problèmes faciles et pratiques, contenant les quatre opérations sur ce nombre ». Malgré ses qualités négatives : son insuffisance, le manque de correspondance avec le but, sa lenteur ennuyeuse, assommante, son influence qui rendait stupides les élèves, le principe de Grube fut propagé en Russie d'une manière générale, grâce aux ordonnances et aux prescriptions des autorités supérieures. Il ne fut abandonné sans réserve que lors de sa complète destruction par la critique russe et étrangère. Examinons donc les autres principes et les autres méthodes d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire qui sont introduits par les deux autres programmes ci-dessus mentionnés.

La méthode d'enseignement de l'Arithmétique élémentaire acceptée par ces programmes est appelée dans les notes explicatives jointes à ces derniers, de même que dans quelques autres papiers officiels « la méthode de l'étude des opérations du calcul ». On peut voir distinctement dans le texte de ces deux programmes, que cette méthode tire son origine de la réunion du principe de calcul (das Zählprincip), renouvelé en Allemagne en 1884, avec le principe de l'élargissement concentrique du domaine d'étude, qui a de même une origine allemande. Les pédagogues allemands, Tank et Knilling renouvelèrent ce principe ; mais les limites de 1 jusqu'à 100, dans lesquelles devait être renfermée l'étude de l'Arithmétique, parurent aux Russes trop étroites. C'est pourquoi ils étendirent l'application de ce système à tous les nombres entiers. Le principe de calcul qui occupa la place de la méthode de Grube en Russie, de même qu'en Allemagne, lui emprunta beaucoup, et surtout sa lenteur insupportable. Par exemple, Tank et Knilling exigent dans leurs plans d'étude deux ans pour l'application de leur principe à l'enseignement élémentaire. La première année est destinée d'après leur programme à l'étude du calcul dans les limites de 1 à 10, la

seconde de 1 à 100. Il est douteux que l'on puisse remplir un si grand espace de temps sans l'emploi de l'étude complète de tous les nombres ou de plusieurs, renfermés dans les limites indiquées. Tank ne le cache point, car il termine la première année d'enseignement dans son plan d'étude par « la répétition d'après la méthode de Grube » (Wiederholung nach Grube's Manier).

Partageant tous les vices des programmes originaux, les programmes cités y ajoutent encore un certain manque de suite. Comme la plus grave de pareilles fautes, on peut indiquer la translation de l'emploi de bouliers de la première année à la seconde, tandis que l'emploi des ressources classiques, telles que de petits bâtons, des cubes, etc., qui rendent l'explication plus claire, occupe, d'après les mêmes programmes, une place très en vue pendant l'étude du calcul. L'auteur du programme de l'arrondissement scolaire de Moscou porta son attention sur ce défaut et le corrigea, quoique cela ne fût que pour les écoles-modèles de village.

L'étendue du programme de dessin linéaire et des premières notions géométriques, la nouveauté de cet objet et sa difficulté pour ceux qui commencent, toutes ces causes, paraît-il, devraient exiger de la part des auteurs du programme une attention considérable portée sur la création et le développement des méthodes d'enseignement. Mais, en réalité, il n'en est pas ainsi. Dans le programme même on ne peut trouver qu'une seule indication relative à cet objet, encore est-elle exprimée d'une manière très vague (« la déduction des notions géométriques fondamentales de l'examen des corps »). La note explicative qui accompagne le programme nous fournit des indications nécessaires, et très édifiantes. On y rencontre les remarques suivantes, relatives à l'objet dont il s'agit :

1) « Le théorème lui-même et son application pratique sont beaucoup plus importants pour les écoles primaires que sa démonstration scientifique; c'est ce qui justement est pris en considération lorsqu'on choisit les théorèmes.

2) « Il va sans dire que les vérités géométriques doivent être étudiées avec entendement dans les écoles primaires, c'est-à-dire que le maître doit les accompagner des éclaircissements néces-

saires et des démonstrations indispensables ; ainsi leur appropriation aura une fonction instructive. Sans doute, pour la plupart, on ne peut pas employer dans les écoles primaires des démonstrations de théorèmes purement scientifiques, car le temps manque et les élèves sont en général encore trop peu développés ; c'est pourquoi le maître doit employer des démonstrations intuitives le plus souvent possible, par exemple : la superposition directe, le mesurage et le dessin linéaire principalement.

3) « Le cours commence par l'examen du cube, des prismes, des pyramides, du cylindre, du cône et de la sphère. Faisant l'examen de ces corps, outre la connaissance des formes plus simples et la déduction des notions indiquées par le programme, les élèves prennent aussi connaissance de la position réciproque des lignes, des espèces d'angles et de figures. Dans la suite du cours on doit prendre en considération que pendant la première année, outre la connaissance de lignes, d'angles et de figures, les élèves étudient principalement les moyens de les construire et la résolution des problèmes de construction ; c'est pourquoi presque toutes les occupations pendant cette année consistent dans le dessin linéaire. On fait surtout attention à l'application pratique des connaissances géométriques pendant la deuxième année et les élèves apprennent à connaître les propriétés des figures, nécessaires à la solution raisonnée des problèmes sur la localité. Pendant cette année on peut employer dans certains cas, outre celles qui sont intuitives, des démonstrations en forme de raisonnements, lorsque ces derniers n'offrent pas de difficultés pour les élèves. Quelques connaissances doivent être enseignées sans aucune démonstration (la détermination de la longueur de la circonférence, des volumes). Pourtant le maître, à l'aide des éclaircissements nécessaires, doit rendre ces connaissances compréhensibles aux élèves d'une manière tout à fait régulière et dans la suite tâcher de les affermir dans leur mémoire par la solution d'un nombre considérable de problèmes de calcul.

La première de ces remarques contient, quoique sous une forme masquée, l'expression de la thèse fondamentale que les partisans de la méthode dogmatique préconisaient aux temps passés pour son affermissement dans l'enseignement mathématique. Les deux autres s'occupent principalement de la restau-

ration en pleine vigueur du procédé par lequel la méthode dogmatique remplacait les démonstrations et les explications. Ce procédé consistait en une vérification d'affirmations à l'aide de la superposition du dessin linéaire et du mesurage direct. De cette manière tout ce que nous venons de citer n'est autre chose que la restauration de la méthode dogmatique (depuis longtemps abandonnée) en son ancienne vigueur et avec tous ses attributs. Impossible d'exécuter l'affaire avec plus de négligence. Il est facile de prévoir les résultats. L'étendue du programme, même dans le meilleur cas, ne peut pas, avec l'emploi de la méthode dogmatique d'exposition, être à la portée des élèves, surtout lorsqu'on ne dispose que de peu de temps pour l'enseignement. En effet, comme le dit M. Ratchinsky, « l'enseignement des objets supplémentaires (et de la Géométrie au nombre de ces dernières) n'atteint pas son but dans la seconde classe de ces écoles, à cause de la complexité du programme, de l'insuffisance des connaissances des élèves, mal préparés par la première classe, et à cause du manque de temps et du manque de savoir de la part des maîtres [1] ». « Cet enseignement superficiel de la Géométrie, que l'on pratique à présent dans les écoles de deux classes n'est que de la perte de temps [2]. » L'école paroissiale ecclésiastique a évité ces tristes résultats en écartant complètement de son cours le dessin linéaire et les notions géométriques. Malheureusement ce moyen ne consiste pas à vaincre les obstacles, mais au contraire à s'en éloigner.

Les écoles du dimanche pour les adultes forment le second type des écoles inférieures en Russie. Les pédagogues, d'aucune manière, ne peuvent nier chez les élèves de ces écoles les connaissances arithmétiques acquises par l'usage quotidien. Par conséquent, les procédés désespérément lents de la méthode concentrique pour l'étude de la numération et des opérations arithmétiques d'après les schèmes artificiellement inventés deviennent inapplicables. De plus, il y a nécessité de se hâter, en raison du manque de temps chez des gens de travail. Il faut y ajouter

---

[1] S. A. Ratchinsky, *École de village*, p. 84.

[2] *Ibid.*, p. 87.

aussi les opinions critiques des élèves sur les actions des pédagogues. Voici un exemple excellent du raisonnement d'un paysan russe dans une conversation avec un certain pédagogue. « Ce qu'il y a de pis, disait ce paysan en parlant de son fils, qui avait fait ses études dans une école de village, c'est que mon fils n'est pas fort en calcul, et qu'il ne sait pas calculer sur les bouliers. Il ne me sert à rien. Peut-être leur enseigne-t-on mal ? Est-il manqué ? Dieu sait ! Moi, un ignorant en comparaison avec lui, je peux compter tout de même cahin-caha tout ce qui m'est nécessaire, tandis que mon fils ne fait que cligner les yeux. Il ne sait se passer de papier ni de crayon, voyez-vous. Sa tête est entièrement incapable de compter, il n'a point d'esprit de combinaison. Quant aux bouliers, il n'en a aucune idée. Ils résolvent toutes sortes de problèmes dans les écoles, y compris les problèmes sur les courriers, les bassins et les autres, que sais-je, mais dès qu'ils se mettent à travailler, adieu ! Sans papier et sans crayon il ne peut calculer même combien je dois payer à un paysan pour un achat de blé. Est-ce qu'on les instruit dans l'intérêt de leur état ? Jugez vous-même. C'est bien possible que ces problèmes sur les courriers et les bassins soient plus fins que les nôtres, mais nous n'en avons pas du tout besoin, voilà ! Nous avons besoin d'esprit de combinaison. Ils doivent savoir calculer vite sans papier, sans crayon ; nous devons tout faire à la hâte. Si l'on manque d'esprit de combinaison, si l'on comprend mal, hé ! qu'on se serve de bouliers. »

Toutes les circonstances indiquées ont obligé les pédagogues des écoles du dimanche à s'occuper de la résolution indépendante des questions concernant l'objet de l'enseignement du calcul dans les écoles primaires et les moyens de réalisation. Dans ce but ils ont choisi le même chemin empirique, qui était toujours admis au temps passé par les maîtres de calcul, et qu'on suivait dans la pratique, en l'absence des indications de l'histoire de la science. Il est certain que ce chemin fut suivi jusqu'à la nouvelle ère, marquée par l'entraînement des hypothèses arbitraires et des constructions fantastiques : elle apparut sous l'influence des différents systèmes de la philosophie métaphysique. Les pédagogues des écoles du dimanche acceptèrent cette thèse comme

leur principe dirigeant : « Le programme des connaissances arithmétiques doit être élaboré selon les exigences de la vie quotidienne, par conséquent les buts doivent être indiqués d'abord, et ensuite on pourra trouver le programme lui-même. » Le premier résultat atteint dans cette voie fut l'aveu que le calcul sur les bouliers est justement la forme de calcul « qui satisfait le plus aux exigences de l'enseignement de l'Arithmétique durant la première année ». Ainsi la réalité elle-même met les pédagogues des écoles du dimanche d'accord avec les indications de l'histoire du calcul.

D'après le résultat atteint et selon les données de l'expérience, la commission des maîtres des écoles du dimanche de Moscou élabora un programme complet de l'enseignement de calcul sur les bouliers et composa un recueil de problèmes adaptés aux exigences de ce programme. L'un et l'autre sont insérés dans l'article « Sur l'enseignement de l'Arithmétique dans les écoles du dimanche » par *S. J. Lapchine* (voir le recueil d'articles intitulé « Initiative privée dans le domaine de l'instruction du peuple » ; Moscou 1894, p. 213-289).

Quant à l'enseignement de la Géométrie, en général, il n'entre pas dans le cours des écoles du dimanche. Quelques-unes en font par exception. Et dans celles-ci cet enseignement n'est ni déterminé, ni établi solidement. Dans quelques-unes on expose pendant les leçons d'Arithmétique le calcul des aires du rectangle, du triangle, du polygone irrégulier et ensuite des surfaces et des volumes ; dans les autres les élèves apprennent le mesurage des parts territoriales et leur partage, de même que le calcul des surfaces et des volumes, pendant les mêmes leçons d'Arithmétique ; les troisièmes enfin ont des leçons particulières de dessin linéaire.

Comme type particulier d'école primaire en Russie, on doit encore signaler les écoles de métiers, dont le règlement fut édicté par le Ministère de l'Instruction publique pour la première fois en 1889. On y accepte comme élèves ceux qui ont terminé le cours dans l'école primaire d'une seule classe. Dans l'école de métiers, composée en général de trois classes, on assigne à la

première classe trois heures par semaine pour l'Arithmétique et la tenue des livres, ainsi que trois heures pour la Géométrie et le dessin linéaire ; dans la seconde classe, pour les mêmes sciences on assigne trois et deux heures, et dans la troisième, deux heures pour l'Arithmétique et la tenue des livres. Les programmes et les plans d'étude de ces sciences ne sont pas donnés dans les écoles de métiers par le règlement général, le Ministère ayant conservé le droit de les composer séparément pour chaque cas particulier, conformément aux circonstances spéciales.

Les écoles de ville, instituées depuis 1872 à la place des anciennes écoles de district, fermées peu à peu, établissent un type transitoire entre les écoles inférieures et les moyennes. Une école de ville complète se compose de six classes : le cours de chaque classe dure un an. Mais en raison des exigences et des conditions locales, ces écoles peuvent être composées de cinq, quatre, trois, deux classes et même d'une classe seule. Outre l'Arithmétique et la Géométrie, la Physique entre dans le cours de ces écoles. Les deux premières de ces sciences sont enseignées d'après les programmes suivants, édictés par le Ministère de l'Instruction publique le 8 janvier 1877.

Programme d'Arithmétique. — *Première année* (4 leçons par semaine). — 1. L'étude des nombres des trois premières dizaines. — 2. L'indication de ces nombres par des chiffres. — 3. Le remplacement des mots, exprimant les différentes combinaisons des nombres, par des signes. — 4. Les problèmes écrits et oraux dans les limites de ces nombres.

Deuxième année (4 leçons par semaine). — 1. Le calcul, l'indication et les différentes relations parmi les nombres de la première centaine. — 2. Table de multiplication. — 3. La séparation des quatre opérations et les cas d'application de chaque opération à la résolution des problèmes. La séparation et la définition des éléments de chaque opération. Les changements que subissent les résultats des opérations en conséquence de changements des éléments. — 4. Les problèmes écrits et oraux dans les limites de la première centaine.

Troisième année (6 leçons par semaine). — 1. La notion des

nombres concrets. L'étude des mesures employées en Russie ; les rapports d'unités plus petites que 100. — 2. L'exécution par écrit des opérations sur les nombres complexes dans les limites de la première centaine, comme application de l'étude des nombres de ce groupe. — 3. Le calcul et la numération écrite dans les limites du premier millier. L'étude des nombres de ce groupe au moyen de la résolution de problèmes. — 4. Le mécanisme des quatre opérations sur les nombres abstraits de ce groupe, par analogie avec les nombres complexes. — 5. La connaissance de simples bouliers russes : l'addition et la soustraction sur les bouliers.

Quatrième année 6 leçons par semaine . — 1. La numération dans le cas des nombres de toutes les grandeurs. — 2. Les quatre opérations sur les nombres de toutes les grandeurs. — 3. Les mesures des surfaces et des volumes, de même que les quatre opérations sur les nombres de ces mêmes mesures. — 4. Le cours élémentaire des fractions ordinaires ; l'origine des fractions ; l'augmentation et la diminution des fractions : la réduction des fractions à leur plus simple expression, l'addition et la soustraction des fractions ; la recherche d'une seule ou de plusieurs parties d'un nombre donné ; la recherche du tout d'après ses parties données ; le contenu des fractions dans un nombre entier ou fractionnaire. — *Remarque.* On considère ici les fractions dont les dénominateurs ne surpassent pas 100. Les dénominateurs, obtenus comme résultat des opérations sur ces fractions, ne doivent pas surpasser non plus cette limite. — 5. La résolution orale et écrite de problèmes concernant les règles étudiées.

Cinquième année 5 leçons par semaine . — 1. Les conditions de divisibilité des nombres et la décomposition des nombres en facteurs premiers. — 2. La recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple. — 3. Le cours systématique des fractions ordinaires. Les opérations sur les nombres concrets fractionnaires. — 4. Les fractions décimales et les opérations sur ces dernières. Le changement des fractions ordinaires en décimales, et vice versa. Les conditions de division infinie en cas du changement des fractions ordinaires en décimales. Les fractions décimales périodiques et leur changement en fractions

ordinaires. La réunion des opérations sur les fractions ordinaires et décimales, abstraites et concrètes. Le système métrique de mesures et sa supériorité sur les autres systèmes. — 5. La résolution écrite et orale de problèmes relatifs aux règles étudiées. La résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, au moyen de la méthode de réduction à l'unité.

Sixième année (6 leçons par semaine). — 1. Les rapports et les proportions. La résolution de problèmes relatifs à la règle de trois, aux intérêts, à l'escompte, à la règle de société et aux alliages, employant les proportions. — 2. La composition de la formule de solution d'un problème au moyen de l'indication des opérations sur tous les nombres donnés dans ce problème. — 3. La revision de tout le cours d'Arithmétique. — 4. Résolution de problèmes simples conduisant à des équations du premier degré à une ou à deux inconnues.

Programme de Géométrie. — *Troisième année.* — Entretiens sur les corps géométriques : sur le cube, les prismes, les pyramides, le cylindre, le cône et la sphère. Le but de ces entretiens doit consister : *a* en acquisition de connaissances suffisantes en Géométrie, en vue d'une étude utile du cours ultérieur ; *b* en éclaircissements aux élèves des notions géométriques fondamentales : corps, surface, ligne et point ; *c* en appropriation de l'habitude de la langue géométrique exacte et concise. Les entretiens peuvent se faire d'après le programme suivant : 1. Le cube : ses arêtes, ses faces et ses sommets. L'arrangement de ces éléments dans différentes positions du cube. — 2. Le prisme régulier, droit et quadrangulaire. La répétition des notions ci-dessus mentionnées et l'éclaircissement de la notion de l'angle. Les angles trièdres et dièdres. L'angle que font entre elles les deux perpendiculaires menées dans chacun de deux plans au même point de l'intersection commune. — 3. Le prisme régulier droit et triangulaire. Avec cela, outre la répétition des notions ci-dessus mentionnées, on éclaircit aux élèves les notions des angles droits, aigus et obtus et les notions des figures : du quadrilatère, du rectangle, du carré et du triangle. — 4. Le prisme régulier hexagonal. La répétition des notions précédentes et l'éclaircissement des notions des lignes et des faces paral-

lèles. — 5. Le prisme quadrangulaire oblique. La notion des différentes positions de la ligne relativement à un seul plan ou à deux. Les plans et les lignes horizontales et verticales. La notion générale du prisme. — 6. Les pyramides. La notion des différentes espèces de triangles et la notion de l'angle solide. — 7. Le cylindre. La circonférence et le cercle. Les surfaces planes et les surfaces courbes. La formation du cylindre par la rotation du rectangle autour de l'un de ses côtés. — 8. Le cône et la sphère d'après le même programme. — 9. La déduction des notions géométriques fondamentales. Le cours doit être accompagné du tracé à la main de toutes les figures expliquées, et, quand cela se peut, à l'aide des instruments : d'une règle, d'une équerre et d'un compas. Les élèves doivent s'occuper aussi d'autres exercices de tracé des figures rectilignes.

Quatrième année. — Durant cette année, les élèves étudient d'une manière plus détaillée quelques-unes des formes géométriques déjà connues. Ils apprennent les procédés du mesurage des aires et des volumes. Le cours doit suivre le programme que voici : — 1. Les lignes droites et courbes (la circonférence), la propriété de la ligne droite ; le tracé des lignes droites ; la mesure des lignes droites. L'addition, la soustraction et la multiplication des lignes droites. — 2. La position respective de deux lignes droites. L'angle. La comparaison des angles. L'addition, la soustraction et la multiplication des angles. Les angles adjacents et les angles droits. La propriété de l'angle droit. L'angle droit, considéré comme une mesure des angles. Les angles aigus et les angles obtus. La propriété des angles adjacents. Les angles opposés et leur propriété. — 3. La perpendiculaire et les obliques. La propriété de la perpendiculaire : d'un point donné on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à la droite donnée. — 4. La perpendiculaire est plus courte que toute oblique menée d'un même point. La propriété des obliques, menées à des distances égales et à des distances inégales de la base de la perpendiculaire. La propriété des points de la perpendiculaire, élevée par le milieu d'une droite. Le tracé des perpendiculaires à l'aide d'un compas et d'une règle, fondé sur les théorèmes précédents. — 5. Les lignes parallèles. Deux

lignes, qui sont perpendiculaires à une troisième, sont parallèles. Les axiomes de la perpendiculaire et de l'oblique, menées à une même droite. La distance entre les lignes parallèles. Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à la droite donnée. Le tracé des lignes parallèles à l'aide d'un compas et d'une règle, fondé sur les théorèmes étudiés. Le tracé des droites sur le terrain ; connaissance des instruments géodésiques les plus importants et de ceux du lever des plans (pieux, jalons, corde d'arpenteur, chaîne d'arpenteur, fil à plomb, niveau de charpentier, équerre, etc.). La solution des principaux problèmes de localité : le tracé et la mesure des lignes droites, la construction d'angles égaux à des angles donnés ; le tracé des perpendiculaires, des obliques et des parallèles ; la solution des problèmes de localité les plus simples, par exemple, la détermination des distances des objets accessibles et inaccessibles, la mesure de la hauteur des objets, etc. — 6. Le rectangle. La propriété de ses côtés. Les conditions de l'égalité des rectangles. La construction du rectangle égal à un rectangle donné. La construction des rectangles d'après une hauteur et une base données. Le rapport des aires des rectangles de hauteurs différentes et de bases égales, ou de bases différentes et de hauteurs égales. — 6. La construction des rectangles, pris plusieurs fois plus grands que les données. — 7. Le carré. La construction du carré. Le carré, comme mesure des aires. L'aire du rectangle. L'aire du carré. Les figures égales et celles dont les aires sont égales. — 8. Les notions des polygones semblables. La construction des polygones semblables. La notion de l'échelle et du plan. Le lever du plan des localités rectangulaires : de la classe, de l'école, de la cour d'école, etc. — 9. Le parallélépipède rectangle. Les conditions d'égalité des parallélépipèdes rectangles. Le rapport des volumes des parallélépipèdes de différentes hauteurs et de bases égales, de bases différentes et de hauteurs égales. — 10. Le cube, comme mesure des volumes. Le volume du parallélépipède rectangle. Le volume du cube. Le cours doit être accompagné autant que possible de la solution des problèmes de calcul et de quelques problèmes de construction.

Cinquième et sixième années. — 1. Le rapport des angles dont le sommet est au centre, et des arcs qui leur correspondent. La

mesure des angles. — 2. La répétition de ce qu'on a appris des lignes parallèles dans la classe précédente. Les angles que font deux parallèles avec une sécante. La propriété de ces angles. Les angles dont les côtés sont respectivement parallèles et perpendiculaires. — 3. Le triangle. La propriété de ses angles et de ses côtés. Les différentes espèces des triangles. Les conditions d'égalité des triangles. La dépendance entre les côtés et les angles des triangles. — 4. Les différentes espèces de polygones. La somme des angles d'un polygone. Les polygones réguliers. — 5. Les espèces de quadrilatères. La propriété des parallélogrammes. — 6. La circonférence et les lignes droites qui s'y rattachent. La dépendance entre les arcs et les cordes et leurs distances au centre. La propriété de la tangente. La position respective de deux circonférences. Les angles inscrits dans un cercle. Les figures, inscrites dans un cercle, circonscrites à un cercle. La détermination de la longueur d'une circonférence. — 7. Les triangles semblables. Les propriétés des côtés homologues. Les polygones semblables. L'échelle. Le lever des plans. La planchette, l'astrolabe. — 8. La mesure des aires. L'aire du parallélogramme, du triangle, du trapèze, du polygone et du cercle. Le rapport des aires. Le théorème de Pythagore. Le changement d'un polygone en un triangle. Le changement des figures en un carré. L'augmentation et la diminution des figures. — 9. Des lignes et des plans dans l'espace. Les angles dièdres. Les angles polyèdres. — 10. Les corps solides : la pyramide, le prisme, le parallélépipède, le cylindre, le cône et la sphère. — 11. Surfaces de la pyramide régulière, entière ou tronquée, du prisme droit, du cylindre, du cône et de la sphère. — 12. La mesure des volumes : du parallélépipède, du prisme, de la pyramide, du cylindre, du cône et de la sphère. L'aperçu général du cours de Géométrie : l'application aux opérations sur le terrain. La notion du nivellement. Le cours doit être accompagné de la solution des problèmes de calcul et de construction. Le cours abrégé d'Arithmétique et de Géométrie.

La méthode d'enseignement de l'Arithmétique dans les écoles de ville, établie par le Ministère de l'Instruction publique, est la méthode de Grube (de l'examen complet des nombres), comme

le montre le programme. On devait s'y attendre, en raison de la coïncidence de la composition du programme avec l'époque de la grande faveur de la méthode de Grube en Russie.

Quant aux livres employés pour l'Arithmétique, on ne se sert d'abord que de recueils de problèmes jusqu'à la quatrième classe des écoles de ville). Il n'y a que le « Recueil de problèmes d'Arithmétique et d'exemples numériques » par M. Evtouchevsky (1re partie), qui soit commun avec les écoles de village; il a eu beaucoup d'éditions. Dès la quatrième classe on commence à employer des manuels et des recueils de problèmes conformes à ces manuels. Parmi les livres élémentaires de diverses espèces que l'on emploie en pratique, il suffit de citer le « Manuel d'Arithmétique » par Bougaiev, en deux livres (« Arithmétique des nombres entiers » et « Arithmétique des nombres fractionnaires »), le « Manuel d'Arithmétique dans les limites du cours des classes inférieures des gymnases » par M. Latichefl', et la seconde partie du « Recueil de problèmes etc., » par Evtouchevsky.

L'absence d'une note explicative accompagnant le programme de Géométrie des écoles de ville, ainsi que le manque d'indications quant à la méthode, rendent impossible la solution directe de la question de l'emploi de la méthode dogmatique dans l'enseignement de la Géométrie. L'emploi exclusif du cours de Géométrie de la troisième classe à la déduction des notions géométriques fondamentales au moyen de la considération des corps géométriques, ou au cours nommé préparatoire; l'absence dans le programme de ce cours de tout ce qui exige des démonstrations; et enfin l'emploi perpétuel des manuels, durant tout le temps de l'enseignement de la Géométrie, font croire cependant que l'emploi de la méthode démonstrative, dans ses formes habituelles, suit directement le cours préparatoire. En général, sous ce rapport, de même que par sa structure, son caractère et l'emploi constant des manuels, on peut dire que l'enseignement de la Géométrie dans les écoles de ville s'approche beaucoup plus du type de l'enseignement moyen que de l'enseignement inférieur. Les différences que l'on observe dans l'enseignement moyen et dans celui des écoles de ville ne sont pas graves, et s'expriment principalement par la brièveté assez considérable

de la partie théorique et par l'introduction d'un plus grand nombre de notions pratiques en raison des besoins du milieu. L'étendue de ces connaissances, malgré le temps plus prolongé des études, est beaucoup moindre que celle qui est déterminée par le programme des écoles modèles de village ci-dessus cité. L'absence des indications correspondantes dans les sources officielles ne permet pas malheureusement de décider si ce fait intéressant, que nous venons d'indiquer, s'est produit par suite de considérations pédagogiques ou par une raison très différente, nous voulons dire l'importance bien plus grande des connaissances d'arpentage pour chaque habitant de village que pour celui de la ville, au point de vue pratique.

Les manuels de Géométrie, que l'on emploie dans les écoles de ville, peuvent être partagés en trois groupes : 1) les cours préparatoires, 2) les petits cours systématiques et 3) les cours consacrés à la Géométrie pratique. Les premiers s'emploient exclusivement dans la troisième classe, les autres dans la quatrième et la cinquième. La littérature russe n'est point pauvre en manuels de ces trois espèces, mais on n'en pourrait pas citer qui soient originaux ou dignes d'attention.

L'instruction inférieure des femmes ne diffère pas de celle des hommes en Russie. Elle profite des mêmes types d'établissements et des mêmes programmes. Dans les écoles de ville et dans les écoles inférieures privées, on pratique ordinairement l'enseignement en commun des garçons et des filles. On n'accepte pas ce système dans les écoles de ville ; aussi ces dernières se partagent-elles en écoles de garçons et en écoles de filles.

V. V. Bobynin (Moscou).

LA PRÉPARATION MATHÉMATIQUE

DE L'ACTUAIRE

« Il est agréable de constater que depuis un certain nombre d'années on témoigne chez nous [1] une attention toute spéciale aux bases théoriques des affaires d'assurances. Tout récemment nos plus hautes écoles de l'État ont ouvert leurs portes aux branches qui s'y rapportent, reconnaissant ainsi que les fonctions d'actuaire doivent être comptées parmi les vocations savantes. C'est là une conséquence toute naturelle de l'importance que prennent les affaires d'assurances sous les formes les plus diverses. On constate par ce fait qu'une institution à laquelle on confie, dans un but déterminé, des sommes si considérables doit être dirigée non pas d'une façon empirique, mais d'après des bases scientifiques. »

C'est ainsi que s'exprime dans un récent article [2], M. E. Czuber, professeur à l'École technique supérieure de Vienne. Notre éminent collaborateur signale ainsi précisément la raison la plus importante qui doit décider les divers États à s'occuper de la préparation mathématique des personnes qui peuvent être appelées à la direction technique des compagnies d'assurances.

La création d'un enseignement spécial destiné à former des actuaires a été examinée à plusieurs reprises, soit dans les sociétés d'actuaires, soit dans des réunions de mathématiciens. Parmi ces derniers, M. L. Kiepert, professeur à l'École technique de Hanovre, s'est tout particulièrement occupé de cette importante question. Dans une conférence [3] qu'il fit à la réunion annuelle

---

[1] En Autriche. (Réd.)

[2] *Mitteilungen des Verbandes oestr. und ung. Versicherungs-Techniker*, Heft 1, p. 22, 1899, Prochaska, Teschen.

[3] Voir le *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. IV, p. 116, 121, 1894-95.

de la *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* tenue à Vienne en 1894, il émit le vœu que parmi les diverses branches des mathématiques appliquées inscrites dans les programmes universitaires, il soit également fait une place à la science de l'actuaire. Nous exposerons d'abord les divers motifs que M. Kiepert donne à l'appui de ce projet et nous les ferons suivre de quelques renseignements sur ce qui se fait actuellement dans ce sens à Vienne et à Göttingue.

En donnant aux étudiants en mathématiques quelques notions du calcul des assurances on fournirait une carrière à ceux qui, faute de places vacantes, ne pourraient entrer dans l'enseignement. Ces notions seraient souvent d'un grand profit même à ceux qui professent dans les écoles. Elles leur procureraient un gain supplémentaire qui serait certainement plus important que celui auquel ils sont souvent obligés d'avoir recours en donnant des leçons particulières ou en prenant des pensionnaires. De plus, on permettrait ainsi aux professeurs de s'intéresser à la direction des Caisses de prévoyance que l'on trouve même dans les petites localités.

D'ailleurs ces caisses sont souvent appelées à présenter une expertise mathématique. Jusqu'ici le nombre des personnes compétentes pour un pareil travail a toujours été très restreint. De ce côté aussi le mathématicien pourrait se rendre utile à ses concitoyens.

Toutefois il n'y aurait là que des motifs d'ordre secondaire. L'institution des assurances envisagée en elle-même doit passer avant les intérêts personnels du maître. Si l'on songe au nombre de plus en plus considérable des assurés et aux capitaux énormes confiés aux compagnies, on est en droit de se demander si les personnes qui peuvent être appelées à la direction technique des compagnies sont suffisamment préparées pour une carrière qui offre de si grosses responsabilités.

Jusqu'ici les actuaires en étaient réduits à eux-mêmes pour tout ce qui est de la préparation mathématique. Quand il s'agit d'un emploi dans une grande compagnie, le travail en vaut certes la peine. Bien des mathématiciens se sont engagés dans cette voie et sont devenus des actuaires d'un grand mérite. Mais ils

ne sont que trop peu nombreux. Ce sont surtout les petites compagnies, les caisses de retraite, les sociétés de prévoyance, qui ont à subir les conséquences souvent très graves du manque de personnes compétentes en matière d'assurances.

D'autre part un cours universitaire sur les calculs d'assurances serait aussi d'une grande utilité aux étudiants en droit. Les avocats sont souvent appelés à examiner des cas en litige entre les compagnies et les assurés. Comment peuvent-ils intervenir d'une façon utile, s'ils n'ont aucune notion sur ce qu'on entend, par exemple, par *réserve d'un contrat*? Comment un juge peut-il se prononcer sur le rachat d'un contrat, s'il n'a aucune idée du calcul qui s'y rattache?

Il est vrai qu'en pareille matière on peut avoir recours à des experts; mais il s'agit encore de comprendre leur rapport, et cela n'est possible que si l'on possède des notions du calcul des assurances.

M. Kiepert estime que pour une première initiation il suffit d'un cours semestriel de deux heures par semaine. Ce cours, mis à la portée des étudiants en droit, leur permettrait de se familiariser avec les bases du calcul des assurances. Quant aux étudiants en mathématiques, ils se trouveraient ainsi en possession des notions fondamentales qu'il leur sera facile de compléter par des recherches personnelles. Ce ne serait là que le commencement d'une organisation plus complète s'étendant sur un ensemble de cours.

La préparation mathématique de l'actuaire doit-elle être confiée aux Universités ou aux Ecoles techniques supérieures? D'après M. Kiepert cet enseignement doit être rattaché aux Universités, qui seules possèdent déjà les cours secondaires indispensables à l'actuaire. Nous croyons toutefois que, si l'on se borne aux connaissances fondamentales, la science de l'actuaire doit figurer aussi bien dans les programmes des Ecoles polytechniques que dans ceux des Universités. Il y a tout avantage à multiplier le plus possible cet enseignement. C'est d'ailleurs ce qui se fait à Vienne où la théorie des assurances est enseignée à l'Université et à l'Ecole technique supérieure.

Les démarches qui ont été faites ces dernières années en faveur

de la création d'un diplôme d'actuaire ont déjà donné d'excellents résultats. Un pareil diplôme existe actuellement dans divers pays. Les connaissances exigées des candidats et l'organisation des cours varient d'un pays à un autre. Nous examinerons ici le programme autrichien et celui de l'Université de Göttingue.

En Autriche, le diplôme d'actuaire a été établi par décision du Ministère de l'Intérieur, en date du 3 février 1895. Les candidats ont à subir deux examens, l'un écrit, l'autre oral, et portant sur les branches suivantes :

1. — *Mathématiques générales :* connaissance de l'Algèbre, du Calcul différentiel et intégral, et des principes du Calcul des probabilités.

2. — *Théorie mathématique des assurances et Statistique mathématique :* connaissance des principes et des méthodes du calcul des assurances ; habileté dans les applications au calcul des primes et des réserves, et dans l'établissement de projets d'assurances et d'expertises. Connaissance des principes essentiels de la Statistique mathématique, de la construction des tables et de leur emploi. Connaissance des éléments de tenue de livres et notamment de la comptabilité des compagnies d'assurances.

3. — *Droit relatif à l'assurance et Economie politique :* connaissance des lois autrichiennes concernant le domaine de l'assurance public ou privé ; connaissance de l'Economie politique.

Les examens ont lieu devant une commission désignée par le ministère de l'Intérieur.

Ne sont admis aux examens que les citoyens autrichiens pouvant justifier :

1° Qu'ils ont fréquenté une école moyenne ;

2° Qu'ils ont suivi les cours de mathématiques dans une école supérieure ;

3° Qu'ils possèdent une certaine pratique dans le domaine des affaires d'assurances.

La préparation aux examens peut se faire soit à l'Université, soit à l'École technique supérieure de Vienne. Chacun de ces établissements présente un ensemble très complet de cours auxquels se rattachent des leçons spécialement consacrées aux exercices pratiques.

Voici maintenant le règlement [1] actuellement en vigueur au

[1] Vorläufige Statuten des Königl. Seminars für Versicherungswissenschaft an der Universität Göttingen.

Séminaire de la science de l'actuaire récemment créé à l'Université de Göttingue.

1. — Le séminaire de la science de l'actuaire a pour but de fournir la préparation scientifique nécessaire à ceux qui désirent se vouer aux fonctions de mathématiciens ou d'administrateurs dans le domaine de l'assurance publique ou privée.

2. — A cet effet, le séminaire organise des exercices dans les différentes branches de la science de l'actuaire, à savoir :

Exercices dans les sciences mathématiques, économiques, dans la statistique ; exercices sur les questions de droit relatif à l'assurance. Parmi ces exercices les uns se rattachent aux cours correspondants professés à l'Université, les autres sont particuliers au séminaire. Le séminaire possède une bibliothèque et une salle de lecture.

3. — Le séminaire est autorisé à faire subir des examens et à délivrer des diplômes à ceux qui ont passé avec succès les différentes épreuves. Ce diplôme certifie chez le porteur les connaissances générales en matière d'assurances, soit dans la direction purement mathématique, soit dans la direction administrative.

4. — Le séminaire se compose de membres réguliers et de membres libres. Les membres réguliers sont tenus d'entreprendre pendant chaque semestre, au moins un travail d'une certaine importance. Les membres libres ne prennent part aux exercices qu'en qualité d'auditeurs.

5. — Peuvent être admis en qualité de membres réguliers : a) les étudiants immatriculés qui sont au moins à leur troisième semestre universitaire ; b) les personnes autorisées à suivre les cours universitaires et qui, sur l'avis du directeur, possèdent la préparation nécessaire.

6. — Ne sont admis aux examens du diplôme que les candidats ayant fréquenté le séminaire pendant au moins un an en qualité de membre régulier et pouvant justifier d'avoir assisté aux cours suivants :

Calcul des assurances.

Sciences économique et statistique relatives à l'assurance.

Droit relatif à l'assurance.

Economie politique théorique.

Economie politique pratique.

Droit relatif au commerce, au change et à la marine.

L'examen comprend, pour les deux catégories de candidats : le calcul des assurances, les sciences économique et statistique relatives aux assurances, économie politique théorique et pratique. Il y a de plus, pour les mathématiciens, une épreuve de mathématiques, et, pour les candidats de la classe administrative, une épreuve de Droit relatif à l'assurance.

Pour plus de détails voir le règlement des examens.

7. — Tous les membres du séminaire payent une cotisation semestrielle de cinq marks ; cette cotisation leur donne le droit d'utiliser la bibliothèque et la salle de lecture.

8. — L'administration du séminaire est confiée à un directeur nommé par le Ministre de l'Instruction. Les examens sont subis devant une commission nommée par le Ministre et choisie parmi les professeurs appartenant au séminaire, ou dont les cours se rattachent à celui-ci.

Ces plans d'études répondent bien aux exigences actuelles. Ils montrent que l'on a bien compris que pour qu'un diplôme d'actuaire puisse offrir une certaine garantie, il était indispensable d'accorder une place importante aux travaux pratiques.

Nous pouvons ajouter que, dès le début, la fréquentation de ces nouveaux cours a été très forte. Ce succès prouve d'une façon évidente que cet enseignement répondait à un réel besoin. Il faut espérer que dans les divers pays, les hautes écoles ne tarderont pas à imiter ce qui se fait à Vienne et à Gottingue en ouvrant leurs portes aux cours relatifs à la science de l'actuaire.

H. Fehr.

CERCLE ET ELLIPSE

CERCLES CONCENTRIQUES ET ELLIPSES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES [1]

La dépendance mutuelle des figures géométriques, telle qu'elle est étudiée dans la Géométrie de position, offre souvent l'avantage de déduire, de propriétés ou de propositions connues, d'autres qui leur sont analogues. Grâce à elle, les élèves de nos établissements secondaires dans lesquels on enseigne les principes fondamentaux de la Géométrie de position ont toute facilité d'approfondir et de compléter les connaissances acquises. La méthode que nous employons dans cette Note fournit la preuve de notre affirmation. Nous nous bornons, pour le moment, au cas du plan ; dans une Note ultérieure nous examinerons la question analogue pour l'espace.

Dans deux systèmes alliés ou en affinité, à tout point à l'infini

[1] Reye, *Geometrie der Lage*. 1. Abthlg. 4. Auflage ; Vortrag 16. 2. Abthlg. 3. Aufl. ; Vortrag 7.

de l'un des systèmes correspond un point à l'infini de l'autre ; aux lignes parallèles de l'un des systèmes correspondent des lignes parallèles de l'autre ; à tout parallélogramme un parallélogramme, à toute ponctuelle une ponctuelle projective semblable.

Deux figures quelconques de l'un des systèmes sont entre elles dans le même rapport que les figures correspondantes de l'autre ; et par suite à deux figures égales de l'un des systèmes correspondent deux figures égales de l'autre.

Si deux courbes du second ordre sont alliées, tout système de cordes parallèles de l'une des courbes a pour correspondant un système de cordes parallèles de l'autre courbe ; et si deux tangentes de l'une des courbes sont parallèles, les correspondantes de l'autre sont également parallèles. Il en résulte que dans deux ellipses ou dans deux hyperboles alliées, les diamètres se correspondent entre eux et par conséquent aussi les centres, et de plus, tout couple de diamètres conjugués de l'une des courbes a pour correspondant un couple de diamètres conjugués de l'autre.

Un cercle quelconque peut être allié à une ellipse, et les deux courbes peuvent être regardées comme courbes homologues des systèmes plans alliés. Soient donnés le cercle k et l'ellipse k_1, et supposons que ce soient deux courbes homologues des systèmes plans alliés τ et τ_1. Alors on peut facilement faire dériver des théorèmes élémentaires connus du cercle, des théorèmes correspondants concernant l'ellipse.

Nous jugeons à propos de placer deux théorèmes correspondants en regard l'un de l'autre.

Des théorèmes de gauche, nous concluons de droite :

a) Tout parallélogramme circonscrit au cercle k étant un losange ou un carré, les diagonales sont perpendiculaires ; elles représentent par conséquent un couple de diamètres conjugués.	*a'*) Dans tout parallélogramme circonscrit à l'ellipse k_1 les diagonales sont deux diamètres conjugués.
b) Le parallélogramme inscrit au cercle k étant un rectangle ou un carré, ses côtés seront parallèles à deux diamètres conjugués.	*b'*) Dans tout parallélogramme inscrit à l'ellipse k_1, les côtés sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Les théorèmes précédents peuvent aussi s'énoncer comme il suit :

Les deux cordes qui joignent un	Les deux cordes qui joignent un

point quelconque de la circonférence k aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles à deux diamètres conjugués.

point quelconque de l'ellipse k_1 aux extrémités d'un diamètre, sont parallèles à deux diamètres conjugués.

Nous ajouterons encore :

c) Les points milieux de toutes les cordes du cercle k qui passent par un seul et même point P, sont situés sur une même circonférence l. La droite qui joint P au centre de l passe aussi par le centre de k.

c') Les points milieux de toutes les cordes de l'ellipse k, qui passent par un seul et même point P_1 sont tous situés sur une ellipse l_1 (1). La droite qui joint P_1 au centre de l_1 passe aussi par le centre de k_1.

Cette discusssion du cercle et de l'ellipse devient encore plus intéressante si l'on examine les cercles concentriques et les ellipses concentriques homothétiques.

Soient donnés le cercle k et l'ellipse k_1 appartenant respectivement aux systèmes alliés τ et τ_1 ; soit de plus c un cercle concentrique à k ; alors la courbe correspondante de τ_1 sera une ellipse c_1 concentrique à k_1, parce que dans un cercle deux diamètres conjugués sont perpendiculaires l'un à l'autre et que par conséquent, tout couple de diamètres conjugués de k coïncide avec un couple de diamètres conjugués de c ; ils s'ensuit donc que les couples de diamètres conjugués de même que les axes des ellipses k_1 et c_1 coïncident. On nomme k_1 et c_1 « ellipses concentriques homothétiques ».

Des théorèmes de gauche il s'ensuit à droite :

a) Toute sécante s commune aux deux cercles concentriques k et c est coupée par les circonférences de manière que les milieux des deux cordes situées sur s coïncident.

a') Toute sécante s_1 commune aux deux ellipses concentriques homothétiques k_1 et c_1 est coupée par les courbes de manière que les milieux des deux cordes situées sur s_1 coïncident.

b) Les centres d'un système de cordes parallèles de k et c sont situés sur un d'amètre commun aux deux cercles.

b') Les centres d'un système de cordes parallèles de k_1 et c_1 sont situés sur un diamètre commun aux deux ellipses.

c) Les tangentes menées en des points de k et c aux extrémités d'un

c') Les tangentes menées en des points de k_1 et c_1 aux extrémités d'un

(1) L'ellipse l_1 ne saurait être une circonférence, les systèmes plans τ_1 et τ_{11} n'étant point semblables mais seulement alliés.

même diamètre sont perpendiculaires à ce diamètre et par conséquent parallèles entre elles.

d) Menons par le centre O commun aux cercles k et c deux rayons qui coupent k et c respectivement en A, B et C, D. Alors si nous menons les droites AB et CD, les triangles AOB et COD seront semblables et par conséquent AB sera parallèle à CD.

e) Les pôles d'une droite g par rapport aux cercles k et c sont situés sur un même diamètre, qui est perpendiculaire et par suite conjugué à g.

f) Les polaires d'un point P par rapport aux cercles k et c sont perpendiculaires au diamètre PO et par conséquent parallèles entre elles.

g) Les polaires de deux points quelconques P et Q par rapport aux cercles k et c se coupent deux à deux sur un diamètre commun aux deux cercles.

même diamètre sont parallèles entre elles.

d') Menons par le centre O_1 commun aux deux ellipses k_1 et c_1 deux rayons qui coupent k_1 et c_1 respectivement en A_1, B_1 et C_1, D_1. Alors si nous menons les droites A_1B_1 et C_1D_1, ces deux droites seront parallèles, parce que AB est parallèle à CD et les triangles $A_1O_1B_1$ et $C_1O_1D_1$ seront semblables. D'où la proportion $O_1A_1 : O_1C_1 = O_1B_1 : O_1D_1$.

e') Les pôles d'une droite g_1 par rapport aux cercles k_1 et c_1 sont situés sur un même diamètre qui est conjugué à g_1.

f') Les polaires d'un point P par rapport aux ellipses k_1 et c_1 sont parallèles entre elles.

g') Les polaires de deux points quelconques P_1 et Q_1 par rapport aux ellipses k_1 et c_1 se coupent deux à deux sur un diamètre commun aux deux cercles.

Pour démontrer le dernier théorème de gauche, nous raisonnerons comme il suit :

Soient r et r_1 respectivement les rayons des cercles k et c ; p et p' les polaires de P ; q et q' les polaires de Q par rapport aux cercles k et c ; et soient R, S les points d'intersection de OP et p, et de OP et p' ; T, U ceux de OQ et q, et de OQ et q.

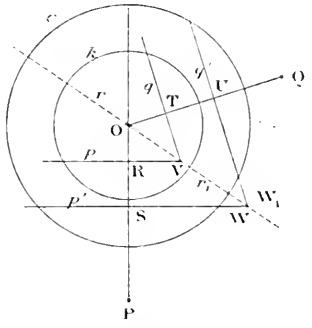


Fig. 1.

Nous désignons encore le point d'intersection de q et p par V, et ceux des droites OV et p, OV et q, respectivement par W et W_1 : on démontre alors que les points W et W_1 coïncident.

En effet, nous avons d'abord les relations :

$$r^2 = \mathrm{OR}.\ \mathrm{OP} = \mathrm{OT}.\ \mathrm{OQ},$$
$$r_1^2 = \mathrm{OS}.\ \mathrm{OP} = \mathrm{OU}.\ \mathrm{OQ},$$

dont on déduit

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OS}} = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OU}}. \tag{1}$$

La similitude des triangles ORV, OSW et OTU, OUW, donne lieu aux proportions :

$$\frac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OS}} = \frac{\mathrm{OV}}{\mathrm{OW}}. \qquad \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OU}} = \frac{\mathrm{OV}}{\mathrm{OW}_1}, \tag{2, 3}$$

d'où il résulte, en vertu de (1) :

$$\frac{\mathrm{OV}}{\mathrm{OW}} = \frac{\mathrm{OV}}{\mathrm{OW}_1}.$$

On a par conséquent

$$\mathrm{OW} = \mathrm{OW}_1, \qquad c.\ q.\ f.\ d,$$

Les secteurs d'un cercle compris entre deux rayons conjugués égalent $\frac{r^2\pi}{i}$, et par suite les secteurs correspondants d'une ellipse alliée au cercle ont pour mesure $\frac{ab\pi}{i}$, parce qu'aux figures égales du système γ_i correspondent des figures égales du

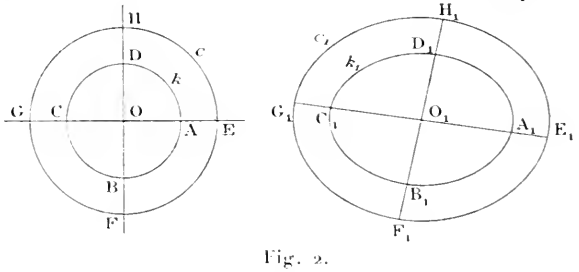


Fig. 2.

système allié γ_{i1}. Nous désignons par r le rayon du cercle et par a, b les demi-axes de l'ellipse.

Soient OH et OE, OG et OF deux couples de rayons conjugués des deux cercles k et c : supposons qu'ils coupent k en A, B, C, D ; alors la différence des deux secteurs : OHE — OAD =

OGF — OCB ; et pour les ellipses k_1 et c_1 nous aurons d'une manière analogue la différence des secteurs : $O_1H_1E_1 - O_1A_1D_1 = O_1G_1F_1 - O_1C_1B_1$.

En généralisant ce dernier résultat nous pouvons dire :

« Les secteurs de couronne elliptique compris entre deux « rayons conjugués de deux ellipses concentriques homothé- « tiques et les deux arcs correspondants ont la même aire. »

Si l'on envisage dans le système plan γ_1 tout le faisceau des cercles concentriques à k, les ellipses formeront dans le système plan γ_{11} un « faisceau d'ellipses concentriques homothétiques ». Les résultats obtenus ci-dessus pourront être résumés comme suit :

« Des ellipses concentriques homothétiques ont le même faisceau de diamètres conjugués. Le faisceau de ces mêmes ellipses est déterminé par une seule d'entre elles. Par un point quelconque du plan on peut mener une seule ellipse du faisceau. Les points milieux d'un système de cordes parallèles sont situés sur un même diamètre. Les tangentes menées aux ellipses du faisceau aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles entre elles. A une ellipse donnée on peut en construire une seconde, concentrique et homothétique à la première, en augmentant ou en diminuant les rayons de la première dans un même rapport donné. » Le centre des ellipses en est donc le point de similitude. « Les pôles d'une droite q par rapport à un faisceau d'ellipses concentriques homothétiques sont situés sur le diamètre conjugué à la droite q, et les polaires d'un point P sont parallèles entre elles. Les points d'intersection des polaires de deux points donnés sont situés sur un diamètre ; les polaires elles-mêmes forment donc deux faisceaux de droites parallèles. Les ellipses du faisceau déterminent sur une droite quelconque les couples de points d'une involution symétrique, et l'une d'elles est tangente à la droite au centre de symétrie. »

En observant que les sommets des carrés circonscrits à un cercle k sont situés sur un cercle concentrique à k, nous trouverons que les sommets des parallélogrammes circonscrits à l'ellipse alliée k_1 et dont les côtés opposés sont respectivement parallèles à deux diamètres conjugués sont situés sur une ellipse concentrique homothétique à l'ellipse k_1.

Dans deux systèmes alliés, ou en affinité, deux figures homologues sont dans un rapport constant. Or le lieu du point d'intersection de deux tangentes du cercle k faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est un cercle concentrique au premier. Donc nous trouvons semblablement que le lieu du point d'intersection de deux tangentes de l'ellipse k_1 faisant avec la corde de contact un triangle d'aire constante, est une ellipse concentrique homothétique à la première.

Dr G. Kilbinger (Mulhouse).

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DIFFÉRENTIELLES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE

1. — Il peut être utile, pour ceux qui abordent l'étude du Calcul différentiel, de représenter géométriquement les différentielles successives d'une fonction d'une variable x : c'est un moyen de fixer dans l'esprit l'hypothèse essentielle que dx est constant à partir de la différentielle seconde. On peut procéder comme il suit.

La fonction $y = f(x)$ étant représentée par une courbe C, menons au point M la tangente MM_0, et traçons MA_0 parallèle à Ox, M_0A_0 parallèle à Oy ; M variant, si l'on suppose

$$MA_0 = \text{const.} = a,$$

M_0 décrit une courbe C_0. Au point M_0 de la courbe C, menons la tangente M_0M_1, et traçons M_0A_1 parallèle à Ox, M_1A_1 parallèle à Oy, en prenant

$$M_0A_1 = MA_0 = a ;$$

M variant, M_1 décrit une courbe C_1. On obtient de même les

courbes successives C_2, C_3,... On a alors au point M, dx étant a,

$$\left\{\begin{aligned} dy &= A_0M_0,\\ d^2y &= A_1M_1 - A_0M_0,\\ d^3y &= A_2M_2 - 2\,A_1M_1 + A_0M_0,\\ d^4y &= A_3M_3 - 3\,A_2M_2 + 3\,A_1M_1 - A_0M_0,\\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \end{aligned}\right.$$

Pour le voir, on prend un point M′ voisin de M sur la courbe C; on considère les points M'_0, M'_1, M'_2..., et les points A'_0, A'_1, A'_2... ; on désigne par I_p le point où la parallèle à Oy menée par M'_p est coupée par la paralèlle à Ox menée par M_p, et l'on a les points I, I_0, I_1, I_2... La formule $dy = A_0M_0$ étant évidente, on procède de proche en proche. Si l'on suppose par exemple *la formule exacte* pour d^3y, cette fonction de x a une dérivée, limite du rapport

$$\frac{(A'_2M'_2 - A_2M_2) - 2\,(A'_1M'_1 - A_1M_1) + (A'_0M'_0 - A_0M_0)}{MI};$$

le numérateur est égal à

$$(I_2M'_2 - I_1M'_1) - 2\,(I_1M'_1 - I_0M'_0) + (I_0M'_0 - IM')$$

ou

$$I_2M'_2 - 3\,I_1M'_1 + 3\,I_0M'_0 - IM';$$

le rapport peut s'écrire

$$\frac{I_2M'_2}{M_2I_2} - 3\,\frac{I_1M'_1}{M_1I_1} + 3\,\frac{I_0M'_0}{M_0I_0} - \frac{IM'}{MI},$$

et la limite, ou la dérivée de d^3y, est

$$m_3 - 3\,m_2 + 3\,m_1 - m_0,$$

m_0, m_1,... étant les coefficients angulaires des tangentes MM_0, M_0M_1... ; on a donc la formule ci-dessus pour d^3y, qui est par définition la différentielle de d^3y, ou le produit par a de la dérivée de cette fonction.

2. — A propos de représentations géométriques, on peut observer ceci. Dans la démonstration du théorème des fonctions

composées, pour le cas où l'on a $y = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de la variable x, il est utile de considérer la surface $V = f(U, V)$, U et V étant ici deux variables indépendantes, avec trois axes OU, OV, OV. On interprète les dérivées partielles par les sections $V = v$, $U = u$. La fonction y de la variable x est représentée par une courbe gauche, intersection de la surface précédente et du cylindre $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. On suit bien la démonstration sur la figure.

3. — Puisque je parle de Calcul différentiel, j'indiquerai en terminant un moyen d'alléger un peu dans la forme la démonstration de la formule de Taylor. Après avoir écrit l'égalité

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{R},$$

qui définit le nombre R, on peut dire : considérons deux variables x et y liées par la relation

$$x + y = a + h,$$

et soit la fonction de la variable x

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{y}{1} f'(x) + \ldots + \frac{y^n}{n!} f^n(x) + \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{R} :$$

cette fonction est égale à $f(a+h)$ pour $x = a$, d'où résulte $y = h$, et elle prend la même valeur pour $x = a + h$, d'où résulte $y = 0$; donc, dans les conditions connues, sa dérivée est nulle pour $x = a + \theta h$. Or cette dérivée est, à cause de $y' = -1$,

$$\frac{y^n}{n!} \left[f^{n+1}(x) - \mathrm{R} \right] ;$$

donc on a

$$\mathrm{R} = f^{n+1}(a + \theta h).$$

G. Fontené (Paris).

CHRONIQUE

L'Association française pour l'avancement des sciences; Congrès de Boulogne-sur-Mer, en 1899.

Le Congrès annuel de l'Association française pour l'avancement des sciences s'est tenu cette année à Boulogne-sur-Mer, du 14 au 21 septembre. Cette date avait été choisie à cause de la coïncidence avec le Congrès de l'Association britannique, qui tenait sa session à Douvres à la même époque. Les deux premières sessions (Mathématiques, Mécaniques, Astronomie) étaient présidées par M. Ed. Collignon. Elles ont été remplies, comme cela arrive chaque année, par un grand nombre de communications, dont plusieurs envoyées par correspondance. Nous en signalerons plus loin quelques-unes.

La séance d'inauguration a eu lieu au Grand Théâtre le 14 septembre, sous la présidence du Dr Brouardel ; le soir avait lieu une réception à l'Hôtel de Ville, et c'est seulement le lendemain qu'ont commencé les séances de sections, tenues généralement le matin, afin de permettre dans la journée des visites industrielles, particulièrement intéressantes à Boulogne.

Le samedi 16, a été organisée l'excursion à Douvres, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres et dont le but était de se mettre en rapports scientifiques avec l'Association britannique. Cette visite a été rendue le jeudi 21 septembre par les membres de l'Association britannique.

Nous ne voulons pas parler ici des excursions intéressantes qui ont été organisées dans la région, ni des attractions (courses et défilé d'automobiles, bals, concerts, feu d'artifice) non plus que de la conférence très intéressante faite le 21 septembre par le Dr Brissaud sur Duchenne de Boulogne, à la mémoire duquel un monument était inauguré le même jour. Ce serait sortir de notre cadre, et nous nous bornerons à dire quelques mots des travaux de la section mathématique. Il en est bien une autre, celle d'enseignement, qui pourrait et devrait nous intéresser. Malheureusement, on ne semble pas s'y occuper beaucoup jusqu'ici de la science mathématique; et c'est un peu la faute des mathématiciens, qui dans le peu de temps que dure le Congrès semblent ne s'intéresser guère qu'aux travaux de leur section spéciale.

Dans d'autres sections, telles que la Physique, le Génie civil et militaire, les mathématiques tiennent aussi une certaine place, mais incidemment. Cette section du Génie civil et militaire a brillé au Congrès

de Boulogne d'un très vif éclat, grâce à l'excellente organisation due au président M. Dislere, président de section au Conseil d'Etat. On s'y est notamment occupé de la question des automobiles, qui soulèvent d'importants problèmes de Mécanique appliquée ; et plusieurs communications très étudiées ont été faites sur la résistance des matériaux. Nous devons, à regret, nous borner à mentionner le fait, et en venir maintenant à ce qui concerne les première et deuxième sections (Mathématiques, Mécanique, Astronomie).

M. Collignon, président, a fait deux communications, l'une de Mécanique, *Sur la durée du parcours des tangentes et des normales aux courbes sous l'action de la pesanteur ;* l'autre, *Sur la construction de tours équidistantes destinées à la transmission des signaux optiques.*

M. le général Frolov, poursuivant une campagne qu'il mène avec ardeur depuis plusieurs années, a envoyé une *Note sur la Géométrie non-euclidienne*, où il prétend relever des contradictions que présenterait l'œuvre de Lobatchefsky. A ce sujet, M. Collignon a indiqué la possibilité d'une *Démonstration élémentaire de l'existence géométrique du rectangle.* Tout ceci sera lu avec intérêt, lorsque paraîtra le volume des comptes rendus du Congrès, par les non-euclidiens aussi bien que par les euclidiens.

De M. Pellet, doyen de la Faculté des Sciences de Clermont, nous avons une communication *Sur les cyclides*, et une autre *Sur le mouvement général d'une figure plane dans son plan.*

M. E. Lemoine, poursuivant ses développements sur la Géométrographie, qu'il a créée, donne une *Comparaison géométrographique de neuf solutions d'un même problème.* Il s'agit d'une construction de triangle qui avait été demandée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens.*

En Analyse pure, M. E. Maillet a fait une communication *Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables*, sujet difficile dans lequel il a une autorité toute spéciale, puisque c'est un mémoire de lui sur les substitutions qui lui a valu, il y a peu d'années, le Grand prix des sciences mathématiques à l'Académie des Sciences.

Mentionnons encore les travaux suivants, en mathématiques pures ;

M. E.-M. Lémeray. — *Sur certains nombres combinatoires ;*

M. C.-A. Laisant. — *Aire d'une courbe gauche ;*

M. E. Perrin. — *Sur deux porismes de Chasles ;*

et passons maintenant aux mathématiques appliquées. Nous trouvons :

De M. le lieutenant-colonel Curie, un *Système de construction des cartes de Babinet ;* c'est un complément à une communication de l'auteur sur le même sujet, faite en 1897 au Congrès de Saint-Etienne ;

De M. Druart, une *Réforme du calendrier*, projet suggéré par un concours qu'avait organisé M. Flammarion, il y a quelques années ;

De M. Fontaneau, *Sur l'intégration des équations de l'Hydrodynamique*, une suite à ses nombreux travaux des Congrès précédents ;

De M. L.-A. Feret, une *Etude graphique de la flexion des prismes*

imparfaitement élastiques. Ce travail sur la résistance des matériaux nous a semblé fort remarquable. On sent que l'auteur est un ingénieur qui connaît les mathématiques et qui sait les appliquer judicieusement.

L'Astronomie fait partie des sciences qu'étudient les première et deuxième sections. Elle a provoqué, au Congrès de Boulogne, quelques tentatives sur le mérite desquelles nous ne sommes pas assez fixés pour pouvoir prononcer d'une manière définitive, mais où l'imagination semble jouer un rôle trop prépondérant peut-être.

M. Croisier envoie un volumineux mémoire sur de *Nouveaux principes d'Astronomie physique inédits ;*

M. Féret (presque homonyme de l'un des auteurs précédents) s'occupe de la *Pluralité des mondes habités* ;

Enfin, M. le lieutenant-colonel Monteil, qui a porté son activité intellectuelle sur des sujets fort divers, et qui semble avoir une prédilection pour la Cosmogonie, avait annoncé et commencé une communication ayant pour objet essentiel d'établir que l'hypothèse de l'attraction Newtonienne n'est pas fondée, et que tout le mécanisme de l'Univers repose sur des actions électro-magnétiques. Mais, au cours de la séance, il a retiré sa communication.

Tel a été, dans son ensemble, le Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences en 1899, au point de vue qui nous intéresse ici. En somme, la science mathématique y a été utilement représentée, comme dans les années précédentes. Mais nous renouvelons ici le vœu de voir les pédagogues s'occuper un peu plus du côté mathématique, et les mathématiciens s'occuper un peu plus de pédagogie. Il y aura profit pour tout le monde, et surtout pour la science.

Le prochain Congrès se tiendra à Paris, en 1900, et sera présidé par M. le général Sebert, membre de l'Institut. La date n'en est pas définitivement fixée, mais il est probable que ce sera en août ou en septembre, comme les années précédentes.

L'Annuaire des Mathématiciens.

Dans son rapport au Congrès de Zurich, en 1897, « sur le but et l'organisation des Congrès internationaux de mathématiciens », M. le professeur Rudio s'exprimait ainsi (voir p. 40 des *Comptes rendus* du Congrès de Zurich : « Certaines questions auxquelles, faute d'ac-
« cord, on n'a pas encore songé à s'attaquer, pourraient être résolues à
« la suite d'une entente internationale... Je me contente de citer, sans
« prendre position : la publication, si possible annuelle, d'un *livre*
« *d'adresses des mathématiciens du monde entier...* »

Cette idée excellente a été reprise par MM. Carré et Naud, éditeurs, qui ont jugé possible d'y donner suite d'une façon pratique, en publiant un *Annuaire*, peut-être dès l'année 1900, répondant, partiellement au moins, au vœu de M. Rudio. Incomplète sans doute au début, mais fort

précieuse quand même, l'œuvre ne manquera pas de se perfectionner par la suite. Elle rendra dans tous les cas de très réels services, permettra aux mathématiciens de correspondre plus facilement entre eux, et leur évitera souvent des recherches pénibles et une perte de temps bien inutile. On étudie la question de savoir s'il ne sera pas possible de donner en même temps une liste des sociétés scientifiques où l'on cultive la science mathématique, et un tableau des publications mathématiques périodiques.

Une difficulté consistait dans la définition du terme « mathématicien »; il a semblé qu'il y avait lieu de lui donner une acception aussi large que possible, et d'y comprendre : 1° Les membres des sociétés mathématiques, ou qui représentent la science mathématique dans des sociétés scientifiques ou académiques d'ordre plus général; 2° les professeurs qui enseignent exclusivement les mathématiques; 3° les personnes ayant publié des ouvrages ou des mémoires mathématiques.

S'inspirant de ce programme général, MM. Carré et Naud ont préparé et expédié en très grand nombre des circulaires ayant pour objet essentiel de demander au destinataire les renseignements nécessaires à l'insertion de son nom dans l'Annuaire des mathématiciens. Cela n'entraîne pour personne aucun engagement ; les insertions sont complètement gratuites, et l'on n'est pas même tenu de souscrire à l'Annuaire, qu'on se procurera plus tard si on le juge utile et intéressant, *mais seulement dans ce cas*.

La tentative dont il s'agit a obtenu presque universellement le plus grand succès. De nombreuses réponses sont parvenues et parviennent encore chaque jour, de toutes les parties du globe où se cultive la science mathématique. Deux pays cependant semblent faire exception, au moins quant à présent, c'est-à-dire que les réponses s'y trouvent en minorité relative : la Grande-Bretagne et... la France.

Il est assez singulier de constater qu'une œuvre modeste, mais utile, entreprise par des éditeurs français, qui doit être publiée en langue française, rencontre une sorte d'indifférence dans le pays où elle devrait trouver le plus d'adhésions. Il faut peut-être chercher le secret de cette torpeur dans l'extrême centralisation de l'enseignement français. Consciencieux et distingués, les professeurs ont trop souvent une tendance à se réduire au rôle de fonctionnaires, et à perdre la notion de leur valeur individuelle. Combien de fois n'avons-nous pas entendu quelques-uns d'entre eux, et non des moindres, dire : Je ne suis qu'un simple professeur; je ne suis pas un mathématicien.

Cette modestie exagérée deviendrait funeste en se généralisant; et elle n'a aucune raison d'être. Aussi croyons-nous bien faire en engageant tous les correspondants, tous les mathématiciens, à contribuer de leur mieux à la publication si intéressante dont nous venons de parler, par l'envoi des renseignements qu'ils peuvent si aisément fournir.

C.-A. Laisant.

Une proposition personnelle.

Comme la plupart des personnes qui ont publié quelques travaux mathématiques, j'ai en ma possession un certain nombre de tirages à part, destinés à être offerts en hommage à des amis. Parmi ces brochures, les unes ont été distribuées à peu près complètement ; d'autres, au contraire, me restent encore en nombre plus ou moins considérable.

Bien qu'il s'agisse d'œuvres très modestes, soit par l'étendue, soit par l'importance des sujets, il est possible qu'il y en ait, dans le nombre, quelques-unes pouvant à l'occasion intéresser des mathématiciens qui s'occupent de sujets analogues. J'ai pensé, dès lors, qu'elles seraient mieux placées entre leurs mains que sur les rayons poudreux d'une bibliothèque ; et j'ai proposé à nos éditeurs, MM. Carré et Naud, qui ont bien voulu y consentir, d'offrir ces brochures, jusqu'à concurrence du nombre disponible de chacune d'elles, à ceux des abonnés de l'*Enseignement Mathématique* qui en manifesteraient le désir.

Il suffirait donc à ceux qui se trouvent dans ce cas d'écrire à MM. Carré et Naud en exprimant le désir d'avoir l'une ou quelques-unes) de ces brochures, pour les recevoir en même temps que le numéro le plus prochain de notre Revue. Ils voudraient bien indiquer un ordre de préférence, afin qu'on puisse, au cas où l'une de ces brochures serait épuisée, leur donner au moins une satisfaction partielle.

Nos lecteurs trouveront la liste de ces publications à la 3e page de la couverture du présent numéro.

Je ne voudrais pas donner à cette offre le caractère excessif d'une « prime aux abonnés ». La chose est moins prétentieuse ; il s'agit tout simplement de faire œuvre « d'enseignement mathématique mutuel », ce qui rentre bien dans notre programme, et de nous entr'aider entre confrères dans la limite où nous le pouvons.

Du reste, je ne dois pas cacher que si je me suis décidé à mettre à exécution cette idée, c'est un peu avec l'arrière-pensée de trouver des imitateurs. Parmi les mathématiciens qui suivent notre publication et qui applaudissent à nos efforts, beaucoup sont assurément dans le même cas que moi, avec cette différence que les publications dont ils disposent en plus ou moins grand nombre, et dont ils sont les auteurs, ont généralement une plus sérieuse importance scientifique.

S'ils veulent bien, lorsqu'ils chercheront à mettre quelque ordre dans leurs collections, faire ce que je fais aujourd'hui, ils augmenteront par cela même l'intérêt de l'*Enseignement Mathémathique* et l'étendue des services qu'il est appelé à rendre.

C.-A. Laisant.

BIBLIOGRAPHIE

Sammlung Schubert. — I. **Elementare Arithmetik und Algebra**, von Prof. Dr. Hermann Schubert. 1 vol. in-8° de 230 p., prix : fr. 3,50. G. J. Göschen, Leipzig, 1899.

Sous le titre de *Sammlung Schubert* la librairie Göschen à Leipzig vient d'entreprendre la publication d'une série de traités embrassant l'ensemble de sciences mathémathiques. Cette publication est dirigée par M. le professeur H. Schubert de Hambourg et la rédaction des divers volumes a été confiée à des mathématiciens bien connus, appartenant, les uns à l'enseignement supérieur, les autres à l'enseignement secondaire. Chaque volume comprendra l'exposé systématique de telle ou telle branche ; de plus, tout en conservant un niveau scientifique élevé, il accordera également une certaine place aux considérations empruntées aux sciences appliquées.

Afin de donner au lecteur une idée exacte de l'importance de cette collection, nous reproduisons ici les *titres des divers volumes* avec les noms des auteurs :

I. Elementare Arithmetik und Algebra : H. Schubert (Hambourg). — II. Elementare Planimetrie : W. Pflieger (Münster i. E.). — III. Ebene und sphärische Trigonometrie : F. Bohnert (Hambourg). — IV. Konstruirende und beschreibende Stereometrie : G. Holzmüller (Hagen i. W.). — V. Niedere Analysis : H. Schubert (Hambourg). — VI. Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie : O. Pund (Ottensen). — VII. Ebene Geometrie der Lage : R. Böger (Hambourg). — VIII. Analytische Geometrie der Ebene ; IX. Analytische Geometrie des Raumes : Max Simon (Strasbourg). — X. Differentialrechnung ; XI. Integralrechnung : Fr. Meyer (Königsberg). — XII. Darstellende Geometrie : J. Schröder (Hambourg). — XIII. Differentialgleichungen : L. Schlesinger (Klausenburg, Ungarn). — XIV. Praxis der Gleichungen : C. Runge (Hannover). — XV. Elemente der Astronomie ; XVI. Mathematische Geographie : E. Hartwig (Bamberg). — XVII. Berechnende Stereometrie : G. Holzmüller (Hagen i. W.). — XVIII. Geschichte der Mathematik : R. Haussner (Giessen). — XX. Versicherungs-Mathematik : P. Pacl (Budapest).

Viendront ensuite : Wahrscheinlichkeits-und Ausgleichungsrechnung. — Analytische Mechanik. — Technische Mechanik, etc., etc.

Ces volumes doivent être terminés pour la fin de l'année 1900.

Les trois volumes parus (I, IV et VI, ne laissent pas de doute sur l'utilité de cette publication. Les auteurs se sont inspirés des théories modernes afin de présenter chaque branche dans son état actuel. C'est précisément ce qui distingue ces ouvrages de la plupart des manuels d'enseignement.

La collection Schubert s'adresse à tous ceux qui s'occupent de recherches ou d'application. Elle rendra de grands services non seulement aux étudiants,

mais encore aux professeurs qu'elle renseignera sur les branches qui sortent de leur spécialité.

Le *premier volume* comprend les *Éléments d'Algèbre* limités aux opérations fondamentales, aux opérations du 1er et du 2e degré et aux logarithmes; les autres parties, telles que : progressions, intérêts composés, théorème du binôme, déterminants, etc., seront exposés dans les tomes IV ou V.

Dans un exposé très bien ordonné l'auteur étudie successivement les opérations fondamentales, leurs propriétés les plus importantes et les diverses généralisations qu'elles font subir à la notion de nombre. Les chapitres relatifs aux équations du 1er et du 2e degré et au calcul logarithmique sont réduits au strict nécessaire. Chaque paragraphe est accompagné de nombreux exercices.

M. Schubert termine son livre par une courte *notice historique* empruntée aux notices plus détaillées qui se rattachent à son article sur les fondements de l'Arithmétique dans *Encyklopædie der mathematischen Wissenschaften*.

H. Fehr.

Giulio Vivanti. — **Corso di Calcolo infinitesimale.** 1 vol. in-8° de 576 p. Prix : L. 8. — Messine, Ant. Trimarchi, 1899.

Le livre de M. Vivanti est le résumé du cours que l'auteur professe à la Faculté des sciences de l'Université de Messine.

C'est donc un ouvrage d'enseignement écrit pour ceux qui veulent apprendre les éléments du calcul, soit comme introduction aux études supérieures de Mathématiques ou de Physique, soit comme préparation aux écoles d'ingénieurs.

L'aperçu général sur la méthode infinitésimale qui sert d'introduction sera lu avec beaucoup de profit par ceux qui ont déjà pris connaissance du texte.

Dans une *première partie* sont résumés les fondements des théories des nombres réels, des limites, des fonctions, de la continuité et des ordres d'infini et d'infiniment petit.

L'exposition dans cette première partie est assez sommaire. C'est plutôt un aide-mémoire dont l'utilité eût été justifiée si l'auteur n'avait pas, dès le début, supposé toute la théorie des séries entièrement connue.

Dans les autres parties, la matière est exposée dans l'ordre suivant : Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable. — Dérivées et intégrales des fonctions de plusieurs variables. — Applications géométriques. — Calcul des variations.

Ce qui caractérise ce livre, c'est le soin avec lequel l'auteur s'est efforcé de bien faire ressortir les fondements logiques de la méthode infinitésimale. La trop grande part qu'il a quelquefois consacrée aux considérations d'ordre général ou pratique est compensée ailleurs par la brièveté qui résulte de la fusion systématique des théories différentielle et intégrale.

Cette fusion, dont on a un exemple dans le livre de Gambordella (*Elementi di calcolo infinitesimali*) et qui est pratiquée, depuis plusieurs années, par M. Arzela dans son *Cours de Calcul* à l'Université de Bologne, est exposée dans ce livre d'une façon tout à fait rationnelle et propre à en faire ressortir tous les avantages didactiques.

Le livre est remarquable par la précision exemplaire dans les définitions et dans l'énoncé des conditions restrictives qu'exige la rigueur des démons-

trations. L'auteur a su réunir un grand nombre de notions utiles dans un espace relativement restreint, et sous une forme à la fois simple et rigoureuse.

E. Bortolotti (Rome).

H. Burkhardt. — **Funktionentheoretische Vorlesungen**: erster Theil : Einfuhrung in die *Theorie der analytischen Funktionen* einer complexen Veränderlichen. — Un vol. in-8° de XIII-213 pages. Prix : fr. 7.50 Leipzig, Verlag von Veit und Comp.

Cet ouvrage forme le premier volume des *Leçons sur la théorie des fonctions* faites par l'auteur à l'Université de Zurich.

« Dans ce petit manuel, dit la préface, le mode de représentation de *Riemann* est mis au premier plan : cependant, nous essaierons d'atteindre la rigueur de démonstration dont ne peuvent se passer aucun de ceux qui, à l'école de Weierstrass, ont une fois appris à ouvrir les yeux. »

La première partie est consacrée à l'étude des nombres complexes considérés comme couples de nombres.

C'est par des exemples simples, très soigneusement traités, que le lecteur est introduit sans effort dans la théorie des fonctions. Les fonctions élémentaires rationnelles sont graduellement étudiées, chacune avec la représentation qu'elle détermine. L'auteur saisit les occasions pour introduire les notions de groupe, d'invariant, de fonction *automorphe* et de leur domaine fondamental (*Fundamentalbereich*). Cette deuxième partie se termine par la théorie des fonctions rationnelles en général et un intéressant exemple d'une fonction rationnelle automorphe.

La partie suivante est un tableau des définitions et propriétés (énoncées sans démonstration) des nombres irrationnels et des limites, des variables réelles et des fonctions de ces variables.

La quatrième partie traite de la théorie des fonctions uniformes. L'étude de la continuité et de la dérivée des fonctions rationnelles conduit à la définition des fonctions d'une variable complexe d'après Cauchy-Riemann. Les propriétés de ces fonctions sont ensuite développées surtout par les méthodes de Cauchy. Comme exemples, les fonctions périodiques et les fonctions transcendantes entières. A propos des points singuliers isolés, l'auteur établit la série de Laurent, dont il déduit celle de Fourier. Le théorème de Mittag-Leffler démontré dans un cas simple, est appliqué aux fonctions périodiques.

Dans l'avant-dernière partie, la théorie des fonctions non uniformes est présentée sur des exemples : tout d'abord l'argument de Z, puis son logarithme : au moyen de cette dernière et très complètement, $\sqrt[n]{Z}$, puis en généralisant $\sqrt[n]{Z}$: enfin la fonction définie par l'équation $s^2 = 1 - z^3$. Pour terminer, la décomposition en facteurs d'une fonction uniforme.

La théorie générale des fonctions forme l'objet de la dernière partie. Elle comprend les notions générales du prolongement analytique et de ses fonctions analytiques d'après Weierstrass, des surfaces de Riemann et des frontières naturelles d'une fonction analytique. Les derniers paragraphes s'occupent de la représentation conforme d'un triangle sur un demi-plan. (*Spiegelungsprinzip*).

C. Jaccottet (Lausanne).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences: t. CXXIX : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 7 (14 août). — E. O. Lovett : Sur la correspondance entre les lignes droites et les sphères.

N° 8 (21 août). — E. O. Lovett : Sur un groupe continu infini de transformations de contact entre les droites et les sphères.

N° 9 (28 août). — P. Appell : Sur la forme générale des équations de la Dynamique.

N° 10 (4 septembre). — A. Berry : Sur les surfaces de quatrième degr qui admettent une intégrale différentielle totale de première espèce.

N° 11 (11 septembre). — P. Appell : Sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique. — J. Mougeot : Sur quelques dépendances géométriques entre deux systèmes de points définis par des équations algébriques.

N° 12 (18 septembre). — Renaux : Sur un développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en une série de polynomes.

N° 14 (2 octobre). — G. Poisson : Sur l'identité de solution de certains problèmes d'élasticité et d'hydrodynamique.

N° 15 (9 octobre). — Maurice Lévy : Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire. — E. Picard : Quelques remarques sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. — Renaux : Sur les fonctions fondamentales et sur le développement d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un contour en série de fonctions fondamentales.

N° 16 (16 octobre). — Appell : Sur les positions d'équilibre d'un navire avec un chargement liquide. — E. Goursat : Sur un problème relatif aux congruences de droites. — F. Marotte : Sur la classification des groupes projectifs de l'espace à n dimensions. — M. Petrovitch : Théorème sur le nombre de racines d'une équation algébrique, comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée.

N° 17 (23 octobre). — Appell : Equilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. — G. Humbert : Sur certaines surfaces remarquables du quatrième ordre.

Journal de mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville : 5e série, publiée par C. Jordan : t. V : prix d'abonnement annuel : Paris, 30 fr., Départements et Union postale, 35 fr. : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Fasc. 3. — G. Humbert : Sur les fonctions abéliennes singulières (premier mémoire). — J. Beudon : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations de premier ordre en involution.

Bulletin de la Société mathématique de France ; t. XXVII, 1899.

Fasc. 3. — L. Lecornu : Sur certaines équations aux différences mêlées. — C. Störmer : Solution complète en nombres entiers de l'équation : $m \arctan \frac{1}{x} + n \arctan \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{n}$. — G. Fontené : Sur un système de sept cleis. — Combebiac : Calcul des triquaternions. — L. Leau : Représentation des fonctions par des séries de polynômes. — M. Petrovitch : Intégration graphique de certains types d'équations différentielles du premier ordre. — E. Lindelöf : Sur la croissance des intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre. — A. von Koch : Sur les fonctions implicites définies par une infinité d'équations simultanées.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg ; 2e série, t. IX, 1899. Prix d'abonnement annuel : Belgique, 7 fr. 50 ; Etranger, 9 fr. ; Gand, A. Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Octobre. — L. Ripert : Transformations quadratiques involutives. — Mandart : Sur le produit des n premiers nombres. — E. Barisien : Triangles inscrits à une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique.

Nouvelles Annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, dirigé par C. A. Laisant et X. Antomari ; 3e série, t. XVII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 15 fr. ; départements et union postale, 17 fr. ; autres pays, 20 fr. : Gauthier-Villars.

Septembre. — C. Zoretnik : Contribution à la théorie des cubiques cuspidales. — G. Fontené : Sur des angles résultants. — Philbert du Plessis : Composition mathématique d'admission à l'École polytechnique en 1899.

Octobre. — G. Fontené et B. Brigard : Sur le système de trois relations doublement quadratiques entre trois variables. — H. Piglioli : Une question de Géométrie différentielle. — G. Fontené : Sur le hessien d'une forme cubique binaire.

Novembre. — E. Collignon : Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. — H. Piccioli : Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure. — Lefebvre : Etude d'un système de deux miroirs sphériques.

Bulletin des sciences mathématiques rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery ; 2e série, t. XXIII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Paris, 18 fr. ; France et Union postale, 20 fr. : Paris, Gauthier-Villars.

Juillet. — F. Klein : Sur l'état de la publication des œuvres de Gauss.

Août. — J. Bertrand : La vie d'Evariste Galois, par P. Dupuy.

Septembre. — A. Demoulin : Une interprétation géométrique des coordonnées α, β, ξ de M. Darboux.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées sous les auspices du ministère de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de professeurs de mathématiques, de physique et de

chimie de la faculté : 2e série, t. I, 1899. Paris, Gauthier-Villars ; Toulouse, Ed. Privat.

3e fasc. — A. Carey : Sur la formation explicite des équations différentielles de premier ordre, dont l'intégrale générale est une fonction à un nombre fini de branches. — H. Bouasse : Sur les courbes de déformation des fils (deuxième partie).

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier : 9e année, 1898-1899, et 10e année, 1899-1900. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr. ; étranger, 9 fr. : Paris, Nony.

9e année. N° 12 (septembre). — V. Jamet : Sur l'équation du quatrième degré.

10e année. N° 1 (octobre). — X. Antomari : Note sur la nature de la quadrique engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe.

N° 2 (novembre). — Fréchet : Note sur les courbes tracées sur une quadrique.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, im Verein mit andern Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe. T. 28, année 1897 (en trois fascicules) : 2e fascicule, un vol. in-8° de 192 p., 1899, Georg Reimer, Berlin.

Ce fascicule se rapporte aux publications parues en 1897 dans le domaine de la Géométrie : Géométrie pure, élémentaire et synthétique : Géométrie analytique.

Zeitschr. für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwärtig herausgegeben von Dr R. Mehmke und Dr M. Cantor ; t. 44, n° 4, 1899 ; Teubner, Leipzig.

Lorenz, H. : Dynamik der Kurbelgetriebe (Fortsetzung). — Holzmüller, G. : Elementares über die Dupin'schen Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie. — Schilling, Fr. : Ueber neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. — Hammer, E. : Zum Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen. — Heilermann. H. : Beitrag zur Auflösung der Gleichung vierten Grades. — Hefter, L. : Ueber eine Veranschaulichung von Funktionen einer komplexen Variablen. — Delaunay, N. : Die Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen.

Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann : 30e année, 1899, Teubner, Leipzig.

N° 6 (août). — Dr Chr. Beyel (Zürich) : Ueber den Unterricht in der darstellenden Geometrie.

Paedagogisches Archiv, herausgegeben von Prof. C. Dahn : 41e année, n°s 9 et 10, 1899, Dürr, Leipzig.

N° 9. — Dr H. Thieme (Posen) : Welche Aenderungen sind durch die neuen Lehrpläne im mathematischen Unterricht hervorgerufen worden ?

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von E. Czuber, A. Bechtel, M. Glieser ; 24e année, nos 8, 9 et 10, 1899. Hoelder, Vienne.

No 8. — Dr H. Kleinpeter : Der Potentialbegriff auf der Unterstufe.

No 9. — E. Czuber : Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie ; Besprechung. — E. Schiffner : Notiz zu dem Lehrsatz von den parallelen Transversalen.

American Journal of Mathematics edited by S. Newcomb ; vol. XXI ; prix d'abonnement annuel : 5 dollars : Baltimore, Johns Hopkins press, 1899.

No 4 (octobre). — G. A. Miller : Memoir on the Substitution-Groups whose Degree does not exceed eight. — J. Westlund : on a class of Equations of Transformation. — E. J. Wilczynski : On linearoïd differential Equations. — W. H. Metzler : On the Roots of a determintal Equation. — G. P. Starkweather : Non-quaternion number-systems containing no skew-units.

Annali di matematica pura ed applicata, dirigées antérieurement par E. Brioschi, et continuées par les professeurs E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini et G. Iung ; série 3, t. II et III ; prix d'abonnement à un volume : 16 L. ; Milan, C. Rebeschini, 1899.

T. II, Fasc. 4. — Timerding : Ueber ein quadratisches Nullsystem. — Bagnera : Sopra i Gruppi ostratti di grado 32. — Bottari : Sulla razionalità dei piani multipli $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$. — Dini : Studî sulle equazioni differenziali lineari.

T. III, Fasc. 1, 2. — Baire : Sur les fonctions de variables réelles. — Dini : Studî sulle equazioni differenziali lineari.

Giornale di matematiche di Battaglini, continué par A. Capelli ; vol. XXXVII, 1899. Prix d'abonnement annuel : Union postale, 18 L.

Juillet-août. — Franz Meyer : Rapporto sullo stato presenta della teoria degli invarianti. — G. Pirondini : Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ; t. XIII, 1899.

Fasc. 5 (septembre-octobre). — Almansi : Sulla ricerca delle funzioni poliarmoniche in un'area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno. — Vivanti : Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche. — Morale : Involuzione di grado n e specie 1 in uno spazio ad $n-1$ dimensioni. — Poincaré : Complément à l'*Analysis situs*.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 296, série 5e, vol. VIII, 2e semestre 1899 : Rendiconti ; Rome, tip. dell. R. acc. dei Lincei.

Fasc. 3 (6 août). — Segre : Intorno ai punti di Weierstrass di una curva algebrica. — Del Re : Sopra alcuni complessi omaloidi di sfere.

Fasc. 5 (3 septembre). — Somigliana : Considerazioni sulle funzioni ordinate.

Fasc. 6 (17 septembre). — Bianchi : Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie d'area minima.

Le Gérant : G. NAUD.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Doctrine.

L'Enseignement mathématique (*Les directeurs*) 1
Les questions de terminologie (*C. A. Laisant*) 22
Sur un paradoxe de notre numération parlée (*R. Baron*) 101
La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement (*H. Poincaré*) 157
Les fondements de l'Arithmétique moderne (*R. de Montessus*) 185
Quelques principes généraux sur l'enseignement mathématique (*Z. G. de Galdeano*) 195
La Mécanique rationnelle et la Mécanique appliquée (*C. A. Laisant*) . 237
Sur l'égalité, et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science (*C. Burali-Forti*) 246
Sur l'économie de la pensée dans les mathématiques élémentaires (*W. Franz Meyer*) 261
De la numération parlée au point de vue international (*Ch. Berdellé*) . . 269
Notion, nature et enseignement des règles de la multiplication (*R. Baron*) 317
Sur la méthode en Géométrie, d'après M. Jacques Hadamard (*J. Tannery*) 333
Réflexions sur le premier enseignement de la Géométrie (*C. A. Laisant*) 339
Sur quelques rapports du Calcul intégral et de la Géométrie (*W. Franz Meyer*) 343
Les principes fondamentaux des connaissances humaines (*H. Laurent*) . 381

Histoire; organisation de l'enseignement.

Les mathématiques en Espagne (*Z. G. de Galdeano*) 6
L'enseignement mathématique en Russie. — Aperçu historique (*V.-V. Bobynin*) 77
Un chapitre de l'Histoire des mathématiques (*W.-W. Beman*, trad. *Ch. Berdellé*) 162
L'enseignement mathématique en Russie. — État actuel : enseignement primaire (*V.-V. Bobynin*) 420

ÉTUDES PÉDAGOGIQUES

La Pédagogie scientifique (*A. Binet*) 29
Considérations sur l'enseignement des mathématiques dans les classes de spéciales en France (*H. Laurent*) 38

Sur l'enseignement des éléments de Trigonométrie (*H. Fehr*). 45
Sur l'enseignement de la théorie des vecteurs (*G. Fontené*) 50
La notation différentielle et l'enseignement (*H. Poincaré*) 106
L'agrégation des sciences mathématiques en France. 110
Le choix des sujets de composition (*C. A. Laisant*) 120
Sur l'emploi des signes en Géométrie (*G. Fontené*) 123
Sur la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire en Italie (*G. Candido*). 204
Sur les signes des distances en Géométrie (*G. Fontené*) 272
Classification des lignes et surfaces du second ordre (*A. Poussart* . . 279
Une première leçon de Géométrie descriptive (*G. Budelot*) 286
De la Nomographie et de la nécessité de l'introduire dans l'enseignement (*E. Pasquier*) 350
Remarques sur les coordonnées polaires (*G. Loria*) 357
La préparation mathématique de l'actuaire (*H. Fehr*) 447
Cercle et ellipse : cercles concentriques et ellipses concentriques homothétiques (*G. Kilbinger*) 452
Représentation géométrique des différentielles successives d'une fonction d'une variable (*G. Fontené*) 458

CHRONIQUE

Congrès et Sociétés savantes.

Congrès de Düsseldorf : septembre 1898 (*Dr Maurer*) 53
La société italienne « Mathesis » (*F. Giudice*) 54
Congrès international des mathématiciens de 1900 . . . . . 57, 219
Société mathématique de France. 61
Un projet d'union académique. 136
Association internationale pour la propagation de la méthode des quaternions et des méthodes qui s'y rattachent 137, 216
Congrès des mathématiciens allemands 216, 365
Compte rendu de la huitième réunion annuelle de l'association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles (*O. Lang*) 298
Les congrès de Boulogne-sur-Mer et de Douvres 301
L'Association française pour l'avancement des sciences ; congrès de Boulogne-sur-Mer, en 1899. 461

Concours académique.

Prix proposés par l'Académie de Toulouse. 220
Prix de l'Académie de Madrid. 303
Prix Jablonowski pour l'an 1902 366

Articles divers

Les programmes de l'enseignement intérieur de l'Ecole polytechnique de Paris 55
Récents traités classiques de Géométrie en Italie et en France. . . . 56
Les moyens physiques dans le calcul 57

La Bibliothèque mathématique des travailleurs (*Dr Hulmann*) 58
Brevet de l'enseignement secondaire supérieur en Prusse 60
L'enseignement mathématique à l'Université de Strasbourg 133
Conservatoire national des Arts et Métiers de Paris 138
Programme de mathématiques élémentaires suivi par J. Steiner . . . 217
Les thèses de doctorat 221
Les examens de l'Ecole Polytechnique, en France 303
M. Griess (Nécrologie) 303
Modèles pour l'enseignement des sciences mathématiques 365
L'Annuaire des mathématiciens (*C. A. Laisant*) 463
Une proposition personnelle (*C. A. Laisant* 465

CORRESPONDANCE

L. Ripert : Sur les questions de notation 139
C. B. Raganti : Sur son précis d'Arithmétique 139
J. d'Azevedo Albuquerque : Sur ses ouvrages d'enseignement mathématique 140
E. Maillet : Sujets d'étude 222
G. Budelot : Le rôle des mathématiques dans l'éducation générale . . 223
L. Ripert : Sur la classification des quadriques de M. A. Poussart . . 367

BIBLIOGRAPHIE

Alexandroff (I.). — Problèmes de Géométrie élémentaire (*L. Ripert* . 227
Annuaire du Bureau des longitudes pour 1899 73
Appell (P.). — Eléments d'Analyse mathématique (*A. G. Greenhill*). . 66
Bork (H.). — Mathematische Hauptsätze für Gymnasien (*H. Ganter*) . 305
Bork (H.), Crantz (P.), Haentzschel (E.). — Mathematischer Leitfaden (*H. Ganter*) 308
Bouty (E.). — Progrès de l'Electricité. Oscillations hertziennes. Rayons cathodiques et rayons X 372
Burkhardt (H.). — Funktionentheoretische Vorlesungen, t. I (*C. Jaccottet*) 468
Burkhardt (H.) et Franz Meyer (W.). — Encyklopædie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (*H. Fehr*) 141, 370
Cantor (M.). — Politische Arithmetik (*H. Laurent*) 147
Charbuit (N.). — Cours de Géométrie cotée (*C. Jaccottet*) 309
Cours complet de mathématiques élémentaires, sous la direction de M. G. Darboux (*L. Ripert*) 140
Duporcq (E.). — Premiers principes de Géométrie moderne (*H. Fehr*) . 318
Education mathématique (l') 73
Fisher (G. E.) et Schwatt (J.-J.). — Text-book of Algebra 148
Fourrey (E.). — Récréations arithmétiques 231
Heusch (F. de). — Cours d'Analyse : I Calcul différentiel (*H. Fehr*) . . 308
Lange (J.). — Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin (*H. Fehr*) 230
Laplace (Œuvres complètes de), t. XII 146
Lefebvre (B.). — Cours développé d'Algèbre élémentaire (*V. Schaffers*) 144
Lazzeri et Bassani : Elementi di Geometria (*L. Ripert*) 62
Nassò (M.). — Algebra elementare 226

Niewenglowski (B.) et Gérard (L.). — Cours de Géométrie élémentaire (*L. Ripert*) 224
Ocagne (M. d'). — Traité de Nomographie (*M. Lacombe*) 368
Oltramare (G.). — Calcul de généralisation (*G. A. Laisant*) 72
Poincaré (H.). — La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes (*C. E. Guye*) 228
Rebière (A.). — Les savants modernes, leur vie et leur travaux. . . . 146
Richard (J.). — Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne . . 227
Sammlung Schubert. — Elementare Arithmetik und Algebra (*H. Fehr*) 466
Testi (G. M.). — Corso di Matematiche (*L. Baatard*) 304
Vivanti (G.). — Corso di Calcolo infinitesimale (*E. Bortolotti*). . . . 467

Bulletin bibliographique. 74, 153, 232, 312, 372, 469

Nécrologie. — M. Sophus Lie 156

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de Chronique, de lettres insérées dans la Correspondance, et de comptes rendus bibliographiques. Les auteurs des ouvrages dont il a été rendu compte n'y sont pas mentionnés.

Les nos qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Alzevedo Albuquerque (J. d') . 150
Bernoud (A.) 313
Baatard (L.) 304
Baron (R.) 101, 317
Beman (W.W.) 162
Berdellé (Ch.) 152, 269
Binet (A.). 29
Bobynin (V.V.). 77, 120
Bortolotti (E.) 467
Budelot (G.) 223, 286
Burali-Forti 246
Candido (G.) 204
Fehr (H.) 45, 141, 230, 308, 310, 370, 417, 466
Fontené (G.) . . 50, 123, 272, 458
Galdeano (Z. G. de) 6, 195
Ganter (H.). 305, 308
Giudice (F.). 51
Grelenhill (A. G.) 66
Guye (C. E.). 228
Hulmann (Dr) 58
Jaccottet (C.). 309, 468
Kilbinger (G.). 152
Lacombe (M.) 368
Laisant (C. A.) 22, 72, 120, 237, 339, 463, 465
Lang (O.) 298
Laurent (H.) 38, 147, 381
Loria (G.). 357
Maillet (E.). 222
Maurer (Dr). 53
Meyer (W. Franz) 261, 343
Montessus (R. de) 185
Pasquier (E.) 350
Poincaré (H. 106, 157
Poussart (A.) 279
Raganti (C. B.) 139
Ripert (L.) 62, 139, 148, 224, 227, 367
Schaffers (V.). 144
Tannery (J.) 333

Évreux, imprimerie de Charles Hérissey

L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRECTEURS

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
Examinateur d'admission à l'École polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Privat-docent à l'Université de Genève,
Professeur au Collège et à l'École professionnelle.

COMITÉ DE PATRONAGE

P. APPELL (Paris). — N. BOUGAIEV (Moscou). — MORITZ CANTOR (Heidelberg).
L. CREMONA (Rome). — E. CZUBER (Vienne). — Z.-G. DE GALDEANO (Saragosse).
A. G. GREENHILL (Woolwich). — F. KLEIN (Gottingen) — V. LIGUINE (Varsovie).
P. MANSION (Gand). — MITTAG LEFFLER (Stockholm). — G. OLTRAMARE (Genève).
JULIUS PETERSEN (Copenhague). — E. PICARD (Paris). — H. POINCARÉ (Paris).
P.-H. SCHOUTE (Groningue). — C. STEPHANOS (Athènes). — F. GOMES TEIXEIRA (Porto).
A. VASSILIEF (Kasan). — A. ZIWET (Ann-arbor, Michigan U. S. A.).

IIe Année. 1900.

PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

AUX LECTEURS

DE

« L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE »

Notre Revue commence aujourd'hui sa deuxième année. Dans le numéro de janvier 1899, nous exposions ici même le but vers lequel nous tendions et les moyens par lesquels nous comptions y parvenir. Jusqu'ici les résultats ont surpassé nos espérances premières; les études, si variées, si différentes dans le fond et dans la forme, mais toujours fortement documentées, qui ont été publiées au cours de 1899, ont été profondément instructives pour un grand nombre de lecteurs, comme l'atteste une volumineuse correspondance.

Avant de créer cette Revue, nous en devinions l'importance, car nous savions qu'elle devait répondre à un besoin réel, et qu'elle n'a de similaire nulle part. Mais si elle a pris aussitôt la place importante qu'elle occupe, nous ne nous faisons aucune illusion et nous savons à qui le mérite en revient. C'est d'abord aux membres de notre comité de patronage, auxquels nous renouvelons ici l'expression de notre parfaite reconnaissance. De plus, la collaboration d'hommes éminents, dans tous les pays où se cultive la science mathématique, nous a permis de présenter au public des travaux d'un haut intérêt, sur des questions de philosophie scientifique, de doctrine, d'histoire ou de pédagogie. Nous sommes dès à présent assurés que d'aussi précieux concours ne nous manqueront pas plus dans l'avenir qu'ils

ne nous ont manqué dans le passé et que loin de se rétrécir, le cercle s'élargira encore.

Enfin, nous manquerions aux devoirs de gratitude les plus élémentaires en ne remerciant pas nos confrères de la presse périodique scientifique, parfois même de la presse quotidienne, qui nous ont consacré de bienveillants articles et ont tous contribué à faire connaître cette Revue. Le nombre en est si considérable que nous ne pouvons même essayer d'en dresser ici la liste, qui resterait forcément incomplète, en dehors de notre volonté.

Malgré la satisfaction que nous cause la situation actuelle, satisfaction qui sera partagée par ceux qui nous ont témoigné tant de sympathie, nous voudrions plus encore. Il nous semble que dans le monde des professeurs notamment, notre publication ne rend pas tous les services qu'elle pourrait rendre, et que cela vient d'une trop grande réserve de la part de beaucoup de lecteurs. Notre *Chronique* et notre *Correspondance* devraient être alimentées par un nombre plus considérable de communications. La collaboration sous cette forme n'exige ni beaucoup de temps, ni beaucoup de travail ; elle est utile surtout aux collaborateurs, tout en augmentant l'intérêt du Recueil. Nous espérons donc que ceux de nos lecteurs (abonnés ou non, bien entendu) qui apprennent un fait intéressant se rattachant à la Science mathématique ou à l'enseignement, ou qui désirent demander une indication, suggérer une idée, présenter une observation utile, n'hésiteront pas à s'adresser à nous et à considérer que *l'Enseignement mathématique*, rédigé dans un esprit d'éclectisme indépendant, appartient à tous les chercheurs, à tous les travailleurs, à tous les esprits avides de vérité et de progrès.

LES DIRECTEURS.

UNE PREMIÈRE LEÇON DE DYNAMIQUE [1]

Par M. Émile PICARD

1. Etudions d'abord le mouvement d'une portion de matière assez petite pour qu'on puisse la regarder, sans erreur sensible, comme réduite à un point ; c'est ce que nous appellerons un point matériel. Cette étude ne peut être entreprise sans faire certaines hypothèses et sans admettre certains *principes*, qu'il est impossible de vérifier directement et dont seulement des conséquences plus ou moins lointaines sont réellement susceptibles d'être contrôlées par l'expérience. Sans entrer ici dans aucun détail historique, qu'il me suffise de citer Galilée, Descartes, Huyhgens et Newton, comme les créateurs, à des titres divers, de la science du mouvement.

Principe de l'inertie. Il comprend deux parties :

1° Quand un point matériel est en repos dans l'espace, il reste en repos si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

2° Quand un point matériel est en mouvement dans l'espace,

[1]) Cette première leçon de dynamique est celle que je professe à l'École centrale dans mon cours de Mécanique générale. Dans cet enseignement, je dois nécessairement m'abstenir de toute considération historique et critique. Tous ceux qui ont réfléchi sur les principes de la Mécanique connaissent les inextricables difficultés qu'on y rencontre; je me suis placé le plus possible au point de vue expérimental et pratique, en évitant soigneusement de laisser paraitre un scepticisme qui est parfois au fond de ma pensée. Jamais, je crois, la critique des principes de la Mécanique n'a été mieux faite que dans le troisième volume des œuvres du célèbre physicien allemand Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*, Leipzig, 1894 ; le système de Hertz, où les masses *cachées* jouent un rôle essentiel, est une œuvre puissante qui n'est pas assez connue en France, malgre le bel article que lui a consacré M. Poincaré dans la *Revue generale des Sciences*, t. VIII, 1897. Parmi les ouvrages critiques relatifs aux theories de la Mécanique, je me reprocherais de ne pas citer encore l'important ouvrage de M. Mach qui a eu de nombreuses éditions en Allemagne et en Angleterre *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt*, et l'Introduction à l'*Etude des theories de la Mécanique*, par M. Bouasse. Carré, 1895. Les *Leçons de Mecanique physique*, de M. Andrade, parues en 1898, renferment aussi d'intéressants chapitres au point de vue critique.

son mouvement est rectiligne et uniforme si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui.

Il résulte de là que, si le mouvement d'un point matériel n'est pas rectiligne et uniforme, certaines actions extérieures s'exercent sur lui, et ceci est en quelque sorte une définition. On donne le nom de *forces* à ces actions que l'on regarde comme produisant ou modifiant le mouvement d'un point matériel.

2. Avant de passer à un second principe, nous allons poser d'abord la notion de *champ de forces constantes*. Une portion déterminée de l'espace sera dite un champ de forces, si un point matériel abandonné à lui-même en un point arbitraire de ce champ ne reste pas en repos. Le champ de forces sera dit constant, si un point matériel abandonné en un point quelconque sans vitesse initiale et à un instant quelconque, décrit toujours la même trajectoire (transportée seulement parallèlement à elle-même) et de la même manière. La pesanteur offre, dans le vide et pour un espace *assez petit*, un exemple de champ constant.

Cette notion acquise, nous posons maintenant le second principe, dans l'énoncé duquel *il ne s'agit que de champ de forces constantes*.

Si un point matériel se trouve à la fois dans plusieurs champs de forces constantes, le mouvement que prend le point à partir d'un certain instant s'obtient en composant cinématiquement le mouvement rectiligne et uniforme dû à la vitesse initiale et les mouvements que produirait chacun des champs s'il agissait seul sur le point matériel partant du repos.

Ainsi, supposons qu'un point matériel occupe à un moment t la position A avec une vitesse V_0 et qu'il se trouve à la fois dans deux champs de forces constantes. Soit B la position qu'occuperait au bout du temps $t + \theta$ le point matériel soumis seulement au premier champ et abandonné en A sans vitesse ; soit de même B′ la position correspondant au second champ dans les mêmes conditions, soit enfin B″ l'extrémité du segment obtenu en portant une longueur $V_0\theta$ sur la direction de la vitesse V_0. On obtiendra la position véritable du mobile au temps $t + \theta$ en faisant la somme géométrique des trois vecteurs AB, AB′ et AB″.

On voit que chaque champ agit, en quelque sorte, comme s'il

était seul et si le point n'avait pas eu une vitesse initiale V_0 ; aussi le principe précédent peut-il être appelé *le principe de l'indépendance de l'effet des forces et du mouvement antérieurement acquis*. Mais dans l'application du principe, sous la forme que nous venons de lui donner, il est essentiel de se rappeler qu'il s'agit seulement de champ de *forces constantes*.

3. Supposons en particulier qu'il n'y ait qu'un seul champ. On devra composer le déplacement $V_0\theta$ dû à la vitesse acquise avec le déplacement résultant de l'action du champ sur le point placé en A et partant du repos. Soit Γ la trajectoire du point matériel placé en A au temps t sans vitesse initiale, trajectoire qui sera parcourue suivant une certaine loi. On peut se représenter le mouvement de la manière suivante :

Imaginons que la courbe Γ se déplace d'un mouvement de translation uniforme avec la vitesse V_0, pendant que notre mobile se déplace sur la courbe suivant la loi convenable ; on aura ainsi la trajectoire véritable.

Pour le cas simple qui précède, on peut imaginer facilement des vérifications expérimentales du principe. Dans un wagon animé d'un mouvement de translation uniforme, un point pesant abandonné sans vitesse relative rencontre le plancher du wagon toujours au même point, quelle que soit la vitesse du mouvement de translation. Il doit bien en être ainsi, d'après le second principe, puisque la trajectoire relative du point tombant par rapport au wagon est la trajectoire du point quand le wagon reste au repos.

4. Le second principe nous permet de trouver la nature du mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes. On a vu en cinématique que si un point a un mouvement relatif par rapport un système animé d'un mouvement *de translation*, l'accélération absolue du point est la somme géométrique de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement. Appliquons ce résultat à notre problème actuel, où le mouvement de translation de la courbe Γ est uniforme ; l'accélération absolue du mobile à l'instant $t + \theta$ sera égale à son accélération relative sur la courbe Γ. Faisons, en particulier, $\theta = 0$; l'accélération

absolue du point au temps t sera égale à l'accélération qu'a au départ le point matériel partant du repos et soumis au champ considéré. Elle a donc une valeur constante, et nous arrivons ainsi à ce résultat très important, que *le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces constantes est un mouvement dont l'accélération est constante.* On aura donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \beta, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \gamma.$$

Si le point part du repos et est placé à l'origine, on déduit de là immédiatement

$$x = \frac{\alpha t^2}{2}, \qquad y = \frac{\beta t^2}{2}, \qquad z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

La trajectoire sera rectiligne : en la prenant comme axe des z, on aura $\alpha = \beta = 0$, et nous avons finalement

$$z = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Le mouvement est uniformément accéléré et d'accélération γ. La direction de la droite, trajectoire du point, sera dite *la direction* du champ de forces.

5. Le point matériel A, *restant toujours le même*, les différents champs de forces se distingueront les uns des autres par leur direction et l'accélération du mouvement. Nous prendrons, comme mesure des forces agissant sur le point *déterminé* A dans chacun de ces champs, des quantités proportionnelles aux accélérations

$$\gamma, \gamma', \ldots, \ldots$$

et si l'on appelle $f, f' \ldots$ ces forces, on aura *par définition*

$$\frac{f}{\gamma} = \frac{f'}{\gamma'} = \ldots = \ldots$$

et elles auront, par définition, pour direction les directions de ces accélérations.

Nous pouvons facilement trouver le champ résultant de la superposition de deux champs de forces constantes. Supposons qu'un point, partant du repos, soit placé simultanément dans deux

champs de forces constantes. Quel mouvement prendra-t-il? Supposons que Ox représente la direction du premier champ, et Oy la direction du second champ. Si le premier champ agissait seul, on aurait par rapport aux deux axes Ox et Oy la trajectoire

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \qquad y = 0,$$

et si le second champ était seul actif

$$x = 0, \qquad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Donc, quand les deux champs agissent simultanément, on a, d'après le second principe

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}, \quad y = \frac{\gamma' t^2}{2}.$$

Le mouvement est donc encore uniformément accéléré, et l'accélération est la somme géométrique des deux accélérations γ et γ', d'où se déduit de suite la règle du parallélogramme des forces.

6. La définition *dynamique* de la force dans un champ constant, que nous venons de donner en ayant égard au mouvement produit, n'est pas celle qui s'est présentée la première au point de vue historique. L'idée de force provient de la notion de l'effort que nous faisons quand nous supportons un fardeau, ou tirons sur une corde fixée par exemple à un clou. Si nous pouvions évaluer avec précision l'effort fait pour supporter différents poids nous pourrions nous servir de cet effort pour mesurer les forces. Mais un effort est aussi une cause de déformation ; appliqué à un corps solide il en change la figure. Soit considéré un ressort parfaitement élastique, et montrons comment il va pouvoir servir à mesurer les forces au point de vue statique. Plaçons-nous dans le champ de la pesanteur à Paris, et prenons une matière déterminée bien homogène, du platine par exemple. En suspendant au ressort, dont on a orienté l'axe moyen dans le sens de la verticale, des quantités croissantes de platine, nous avons des déformations variables ; or prenons comme unité de force *l'action*

statique sur le ressort d'un volume déterminé de platine. Nous admettons tout naturellement que, pour un volume double, l'action statique sur le ressort est double et ainsi de suite. Nous avons ainsi un instrument (dynamomètre) qui se trouve gradué et avec lequel nous pouvons évaluer les actions statiques. Or reprenons notre point matériel A de tout à l'heure, et considérons un champ de forces constantes ; avec le ressort, dont on place l'axe moyen dans le sens du champ, et en fixant à son extrémité le point A, nous pouvons évaluer l'action statique du champ sur le point A. Nous avons donc, pour *différents* champs, *différentes* actions statiques ; d'où *une seconde définition, qui est statique, de la force agissant sur le point* A *dans chacun des champs*. Nous regardons, *comme un résultat expérimental*, que les nombres représentant les forces envisagées au point de vue dynamique et au point de vue statique sont proportionnels. C'est là un résultat capital.

7. *Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'un seul point matériel* A. Pour tout autre point matériel, on peut refaire les mêmes expériences ; il s'agit de comparer les points matériels les uns aux autres. Il n'y aurait aucune difficulté si la matière se présentait à nous sous une forme unique ; on pourrait parler, comme le faisait Newton dans la définition de la masse, de la *quantité* de matière. Mais on sait que la matière se présente à nous sous un certain nombre de formes irréductibles les unes aux autres, au moins dans l'état actuel de la science. Or l'expérience apprend, ce qui va être pour nous absolument fondamental, que *dans un même champ l'accélération du mouvement produit, quel que soit le point matériel, est la même*. C'est ce qu'on exprime, pour le champ de la pesanteur, en disant que tous les corps tombent avec la même vitesse dans le vide.

Ceci posé, plaçons-nous dans un champ déterminé d'ailleurs quelconque, et suspendons différents points matériels à l'extrémité de notre ressort gradué. Nous dirons que *ces points ont des masses égales*, si ils donnent au ressort la même flexion. Il est aisé de voir que si deux points matériels amènent la même flexion dans un certain champ, ils amèneront une même flexion, quoique différente de la première, dans tout autre champ ; en effet les

flexions indiquent des forces que nous avons vues être proportionnelles aux accélérations, et, puisque les accélérations sont les mêmes dans un même champ pour tous les points matériels, si la flexion est la même pour deux points dans un certain champ, elle sera la même dans tout autre champ. De la définition de deux masses égales, résulte la définition d'une masse double, triple,... d'une autre. Une masse sera double, par exemple, d'une autre, si elle donne dans tout champ une déformation correspondant à une action statique double. Nous sommes donc ainsi conduit à attribuer aux différents points matériels M, M',... des coefficients m, m',... que nous appellerons les *masses* de ces points ; c'est pour le moment, un système de nombres proportionnels.

8. Il résulte de tout ce qui précède que, dans un même champ, les forces agissant sur deux masses inégales sont proportionnelles à ces masses. D'autre part les forces agissant dans différents champs sur un même point matériel sont proportionnelles aux accélérations des mouvements produits. On en conclut que, dans deux champs d'accélérations γ et γ' et pour deux points de masses m et m', les forces F et F' sont proportionnelles aux produits $m\gamma$ et $m'\gamma'$. Nous avons donc

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'} = \frac{m\gamma}{m'\gamma'}$$

On peut, pour un point déterminé M', prendre $\mathrm{F}' = m'\gamma'$; on aura alors, pour tout autre point

$$\mathrm{F} = m\gamma$$

c'est-à-dire que le nombre mesurant la force est égal au produit du nombre m mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération.

Si on prend en particulier le champ de la pesanteur, dans un lieu déterminé, à Paris par exemple, la force du champ sur un point de masse m peut être prise égale au poids de cette masse : on écrira donc

$$\mathrm{P} = mg$$

g désignant l'accélération de la pesanteur à Paris ($g = 9^{\mathrm{m}},808...$ évalué en mètres).

9. Pour avoir des évaluations numériques de forces ou de masses, il faut avoir fait choix d'un système d'unités. Un tel système peut être pris arbitrairement, pourvu que le nombre mesurant la force soit égal au produit du nombre mesurant la masse par le nombre mesurant l'accélération. On prend généralement comme unité de temps la seconde de temps moyen. En mécanique appliquée, le mètre est le plus souvent pris pour unité de longueur et l'unité de force est le *kilogramme-force* c'est-à-dire le poids à Paris d'une masse étalon de platine déposée aux Archives. Dans ces conditions, il est facile de trouver ce que sera la masse *unité*; puisque

$$m = \frac{\mathrm{P}}{g},$$

ce sera la masse d'un point matériel qui pèse à Paris $9^{kg}.808$.

En physique générale, on a préféré un autre système. L'inconvénient du système précédent est que l'unité de force (kilogramme-force) est une quantité dont la définition exige l'indication d'un lieu déterminé. La masse d'un corps, qualité physique inhérente à ce corps, se trouve alors représentée par des nombres différents suivant que le kilogramme-force se trouve rapporté à un lieu ou à un autre de la terre.

Le système usité en physique est le système dit C. G. S. L'unité de longueur est la longueur du centimètre. L'unité de la masse est la masse du gramme, c'est-à-dire la masse de la millième partie de l'étalon de platine qui représente le kilogramme. D'après la formule

$$\mathrm{F} = m\gamma$$

on voit que l'on aura $\mathrm{F} = 1$, si $m = 1$ et $\gamma = 1$. L'unité de force, c'est-à-dire la force représentée par *un*, est la force agissant sur la masse d'un gramme dans un champ dont l'accélération est égale à *un* centimètre. Cette unité de force s'appelle une *dyne*. Il est facile de trouver le rapport entre la dyne et le poids du gramme à Paris. On a, d'après la formule fondamentale

$$\text{Poids du gramme à Paris} = 980{,}8 \text{ dynes (puisque } m = 1).$$

Donc la dyne vaut à peu près un milligramme à Paris.

10. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des champs de forces constantes. Quand un point n'est pas animé d'un mouvement à accélération constante, que pouvons-nous regarder comme étant la force agissant sur lui ? Soient M la position du mobile de masse m au temps t sur sa trajectoire et v sa vitesse à cet instant ; soit de plus M′ sa position au temps $t + \Delta t$. Nous allons chercher quelle force constante devrait agir sur le point m placé en M au temps t avec la vitesse v pour qu'il se trouve en M′ au temps $t + \Delta t$. Rappelons-nous une des définitions de l'accélération : si l'on porte sur la tangente en M dans le sens du mouvement une longueur MM″ égale à $v\Delta t$, le vecteur $\frac{2\,\overline{M''M'}}{\overline{\Delta t}^2}$ a pour limite l'accélération. Or si nous considérons une force constante agissant sur le point M partant du repos, le point décrira pendant le temps Δt un segment de droite MN dans la direction de la force, et en appelant γ l'accélération correspondant au champ constant, on aura

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\,\gamma\,\overline{\Delta t}^2 \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{2.\overline{MN}}{\overline{\Delta t}^2};$$

la force f sera égale à $m\gamma$ et la direction du champ sera celle de MN. D'autre part, d'après le second principe, on obtiendra la position du point au temps $t + \Delta t$, en transportant le segment MN parallèlement à lui-même de manière que M vienne en M″ ; on en conclut de suite que MN est égal et parallèle à M M′. Si nous considérons maintenant le mouvement réel du point comme la limite d'une succession de mouvements *discontinus* analogues à celui que nous venons d'envisager pendant le temps très petit Δt, nous serons tout naturellement conduit à regarder comme représentant la force au temps t la limite de la force f. En désignant donc par Γ l'accélération de M au temps t, et en désignant par F la force, *on aura l'égalité géométrique fondamentale*

$$F = m\Gamma.$$

Le vecteur qui représente la force ne diffère donc du vecteur qui représente l'accélération que par le facteur positif m. En désignant par X, Y, Z les composantes de la force, on aura, d'après l'égalité précédente

$$(1) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

11. Il peut sembler au premier abord que les égalités précédentes *définissent* tout simplement X, Y, Z, et on peut se demander quel intérêt elles présentent. Elles ne seront en effet utiles pour renseigner sur le mouvement du point m, que si on connaît *autrement que par ces égalités mêmes*, X, Y, Z.

Voici d'abord un premier cas où l'identité, par nous admise, entre les points de vue statique et dynamique montre l'importance des formules précédentes. Supposons que nous ayons affaire à un champ de force où la force puisse être mesurée statiquement à un instant quelconque et se trouve être seulement une fonction des coordonnées (x, y, z) du point m. Nous pourrons alors dans (1) regarder X, Y, Z comme des fonctions *connues* de x, y, z et l'intégration du système (1), pour une position initiale donnée et une vitesse initiale donnée, nous donnera le mouvement du point correspondant à ces données initiales. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, soit un point placé à l'extrémité d'un ressort infiniment petit. Le point se trouve à l'origine sur l'axe Ox, quand le ressort est à l'état naturel. On tend le ressort, l'expérience montre que la force à appliquer au point pour le maintenir en équilibre est proportionnelle au déplacement, c'est-à-dire que la force exercée par le ressort sur le point est représentée par $-\mu x$ $(\mu > 0)$. On a donc l'équation différentielle

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$$

dont l'intégration fait connaître le mouvement du point.

On est conduit quelquefois à regarder dans les équations (1) les composantes X, Y, Z de la force comme fonctions non seulement de x, y, z mais aussi de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Il est clair que, dans ce cas, ce ne seront pas des expériences *statiques* préliminaires qui pourront nous faire connaître X, Y, Z. Ce ne pourront être que des expériences *dynamiques*, conduisant le plus souvent à une formule empirique. C'est ce qui arrive dans l'étude du mouvement d'un projectile dans l'air. Il y a une résistance de l'air sur laquelle nous ne savons rien à priori. Un grand nombre d'expériences sont faites, je suppose ; la photographie instantanée permet de savoir dans quelles conditions le point parcourt sa trajec-

toire. On peut donc regarder comme connues la vitesse et l'accélération à chaque instant, de là se déduisent, par les équations (1) elles-mêmes, les valeurs X, Y, Z en dehors de la pesanteur et par conséquent la résistance de l'air. On constate alors que dans certaines conditions de grandeurs de la vitesse, cette résistance est une certaine fonction de la vitesse. Le résultat acquis dans ces expériences déterminées, est regardée (entre les mêmes limites de grandeurs des vitesses) comme général, et le mouvement de tout point m peut être obtenu par l'intégration du système (1), dans lequel on a remplacé X, Y, Z par des expressions fonctions connues de la vitesse.

Des cas de nature différente de ceux que nous venons d'examiner se rencontrent dans la dynamique du point matériel. Le point peut être assujetti à certaines liaisons, à rester par exemple sur une surface. Par le fait de cette liaison, une certaine force se trouve agir sur le point ; ce sera encore à l'expérience à faire connaître certaines propriétés de cette force de liaison, de façon que le système des trois équations (1) achèvent de la déterminer en même temps qu'elles permettent de déterminer le mouvement du point sur la surface.

Ces divers exemples suffisent pour montrer quelle est, quant à la dynamique du point matériel, la signification des équations (1). On la comprendra mieux encore par l'étude des divers problèmes particuliers que nous allons bientôt traiter.

Em. Picard.

L'APPLICATION

DANS

L'ENSEIGNEMENT DE LA MATHÉMATIQUE

Relations entre la mathématique et la réalité. — 1. La mathématique est une science exacte, et, par conséquent, elle consiste en déductions obtenues par des procédés de logique; mais quelques-uns des objets sur lesquels elle opère et les principes fondamentaux d'où elle part, ne peuvent pas, nécessairement, s'obtenir ainsi. Ils sont empruntés directement à la réalité, de manière à avoir une science qui diffère d'une science expérimentale par la manière de tirer les conclusions, mais qui, avec ces conclusions, sert à obtenir des résultats qui se réflètent dans la réalité. Si tel n'est pas le but actuel de tout mathématicien dans ses recherches, c'est là néanmoins l'idée générale qui donna l'origine aux sciences mathématiques, et qui les alimenta dans le cours des siècles.

2. Nous ne voulons pas dire par là que la mathématique étudie les objets et les phénomènes tels qu'ils sont en réalité. Elle prend en eux les propriétés qui ont rapport à la quantité, à la forme, à l'extension, au mouvement, et les idéalise, c'est-à-dire que, en faisant abstraction des autres, elle les sépare et les isole (quoiqu'en réalité elles ne soient jamais séparées), et quelquefois les modifie pour obtenir des résultats plus utiles ; par exemple, on considère les corps géométriques comme continus, tandis qu'il y a réellement de l'espace entre une molécule et une autre : nous nous les figurons pénétrables et, en réalité, ils sont impénétrables.

Dans la mathématique, on fait donc une construction abstraite des objets ; sans cela, elle ne pourrait pas être une science exacte, puisque la conception et la définition exactes de ce que sont les objects de la réalité nous manquent.

Le mathématicien, dans ses études, se délivre de n'importe quelle préoccupation extérieure et déduit, trouve, démontre, dans le seul but de découvrir des vérités qui le satisfont pour l'unique raison qu'elles sont des vérités; et il se renferme ainsi complètement dans une abstraction, qui est la caractéristique et, en même temps, la sauvegarde de la mathématique. Mais, à côté de cela, il n'est pas moins vrai que les définitions et les principes fondamentaux se modèlent sur ce qui arrive dans la réalité. Si en ce moment cela n'est pas une chose évidente, c'est parce que leur étude actuelle succède à une période dans laquelle on a eu recours à la réalité; on a reconnu quels étaient les principes qu'il fallait admettre pour expliquer les faits que l'on voulait étudier, et l'on a établi des lois qu'on propose ensuite comme fondamentales en mathématique, comme si elles avaient été trouvées à première vue, mais auxquelles, certainement, on n'aurait pas pensé, sans l'observation des faits qui se passent autour de nous.

3. M. Klein, dans sa conférence — *Sur le procédé arithmétique dans la mathématique* — observe que « les mathéma-
« tiques ne sont pas du tout épuisables par la déduction logique,
« mais qu'à côté d'elles l'intuition conserve, encore à présent,
« son efficacité pleine et entière, et qu'une exposition abstraite
« de déductions logiques ne peut pas nous suffire, tant que l'on
« n'en a pas formulé la force dans chaque forme d'intuition et
« qu'on ne connaît pas les multiples relations que, selon le
« champ d'observation que l'on choisit, le schéma logique a avec
« les autres parties de nos connaissances. » M. Hoüel [1] écrit que
« la construction d'une telle science (exacte) se compose essen-
« tiellement de deux parties distinctes : l'une, qui est fondée
« sur l'observation et sur l'expérience, consiste à rassembler
« des faits et à en conclure par induction les lois et les prin-
« cipes qui serviront de bases à la science; l'autre, qui n'est
« qu'une branche de la logique générale, s'occupe de combiner
« ces principes fondamentaux, de manière à déduire la repré-
« sentation des faits observés et à prédire, en outre, des faits
« nouveaux. »

---

[1] Hoüel. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*. Appendice, note 1.

A ces deux éléments, nous pouvons en ajouter un troisième, en distinguant, comme le fait M. Laisant [1], en trois périodes la tâche des mathématiques dans toutes les questions : c'est-à-dire le passage du concret à l'abstrait, la solution mathématique de la question, et enfin le retour de l'abstrait au concret, ou l'application à la réalité des résultats obtenus, ce qui représente le but définitif et complet (sinon actuel et particulier) de la mathématique.

La partie logique, sur laquelle principalement, et parfois uniquement, on insiste dans les classes, est donc une seule des trois parties qui nous donnent la raison d'être de la science : son origine et le but auquel elle tend, vont, pour ainsi dire, se *plonger* dans la réalité.

Les relations de la mathématique avec le monde qui nous environne ne sont donc pas accidentelles et artificielles; et si on oubliait ces relations, on ferait perdre à cette science son caractère.

4. Sur le troisième élément dont nous venons de parler, et qui est le retour au concret, il faut faire une observation, indispensable pour le sujet que nous allons traiter. Dans ce « retour », on ne peut pas trouver des résultats qui se combinent exactement avec ceux que l'on peut mesurer directement: on aura toujours une différence, et, par conséquent, le résultat théorique ne représentera qu'approximativement le résultat pratique. On reconnaîtra la vérité de ce fait, en considérant que les objets de la réalité ne sont pas, comme nous l'avons déjà dit, ceux de la théorie: et, qu'en outre, les mesures, prises sur la réalité, sont loin d'être exactes, soit à cause de l'imperfection (inévitable comme dans toutes les choses humaines) de nos sens et de nos moyens de mesurage, soit parce que les mesures théoriques sont autres que les mesures pratiques, appliquées comme elles le sont à des objets qui diffèrent (et qui peut dire à quel degré?) de ceux de la réalité.

Dans le retour de l'abstrait au concret, il y a donc une erreur qui, d'après ce que nous avons dit, n'est pas exactement calculable, mais de laquelle il faut connaître une limite supérieure si

---

[1] Laisant. *La Mathématique.*

l'on ne veut pas que les résultats soient privés de toute signification. Cette erreur se retrouve toujours, même dans les cas où il y a la plus grande ressemblance entre les objets théoriques et les réels. Elle devient d'autant plus petite que cette ressemblance devient plus grande, mais ne peut jamais disparaître tout à fait : de manière que, dans sa forme figurative, la phrase de d'Alembert « les vérités géométriques sont l'asymptote des vérités physiques », est profondément vraie.

L'EXERCICE COMME MOYEN D'ÉTUDE ET D'ENSEIGNEMENT. — 5. L'usage de l'intuition et de l'exercice est nécessaire quelquefois, toujours utile dans l'enseignement. M. KLEIN observe avec raison que dans les leçons élémentaires et dans celles qui sont destinées à des élèves qui auront beaucoup à faire usage de l'intuition, comme les naturalistes et les ingénieurs, le point de départ doit être l'intuition, par laquelle, comme l'écrit à son tour M. POINCARÉ [1], « le monde mathématique reste en contact avec le monde « réel ; et quand même les mathématiques pures pourraient s'en « passer, il faudrait toujours y avoir recours pour combler « l'abîme qui sépare le symbole de la réalité. Le praticien en « aura donc toujours besoin, et, pour un géomètre pur, il doit y « avoir cent praticiens ». Mais, même en laissant cela de côté, il semble indispensable de ramener les élèves à la réalité, de laquelle, en substance, naissent les objets de la science et leurs opérations, même lorsque la science les idéalise ; ainsi, d'une part, les élèves ne perdront pas de vue l'origine de la mathématique, de l'autre, ils en apprécieront le but, et ils s'habitueront à se servir dans la vie d'un si précieux instrument, et à en apprécier comme il faut les résultats, c'est-à-dire, en tenant compte de l'approximation : et cela vaudra mieux que de faire plus tard et à part cette application, en lui donnant peut-être une fausse interprétation d'exactitude.

6. Il est nécessaire d'observer que si l'on a recours à la réalité, soit pour établir les principes de la mathématique, soit pour en enseigner les applications, nous ne voulons pas que cette réa-

---

[1] POINCARÉ. *La logique et l'intuition dans les sciences mathématiques.* (*L'Enseignement mathématique*, 1re année, n° 3.)

lité aille jusqu'à suppléer la démonstration et le raisonnement. Que l'on déduise de l'observation de ce qui nous entoure, les objets de la mathématique et, parmi de leurs propriétés, qui, selon les degrés de l'enseignement, sont opportunes ; mais le raisonnement rigoureux seul devra servir à découvrir les autres propriétés, sans faire de concession ni aucun mélange avec la pratique. Tout au plus, on pourra, dans les cas où on le croit nécessaire (à cause du manque de temps ou de la difficulté excessive), ne donner que les énoncés de quelques théorèmes, en sautant la démonstration et en fournir des exemples pratiques pour les *illustrer*, de manière qu'on ne les considère pas comme démontrés, mais qu'on en puisse saisir la portée, ce qui arrive difficilement en donnant le seul énoncé. Les exemples et les exercices seront précieux, lorsqu'on aura démontré les théorèmes, pour mieux en faire ressortir l'importance et le but ; ils procureront la satisfaction de reconnaître que ces propriétés se vérifient dans la pratique, ou s'appliquent à des recherches utiles, toujours en tenant compte de cette approximation que nous avons dit être inévitable.

7. On peut observer de plus que l'intuition et la pratique peuvent quelquefois servir à précéder le raisonnement et à lui aplanir la voie. — M. Klein pense que « l'intuition mathéma-
« tique, depuis l'impression de caractère métrique avec laquelle
« l'ingénieur juge de la distribution des forces dans une cons-
« truction quelconque faite par lui, jusqu'à ce sens indéterminé
« de convergence que l'habile calculateur sent en présence d'un
« procédé indéfini de calcul, précède toujours dans sa sphère la
« déduction logique et qu'à chaque instant elle embrasse un
« champ plus vaste que celle-là...

« Dans le développement des diverses branches de la science
« mathématique, l'intuition a fait les premiers pas et précédé
« l'étude logique et rigoureuse. »

Il est donc utile, même dans l'enseignement de cette science, de cultiver avec soin cette partie pratique, qui, appliquée avec discernement, conduit parfois à la découverte de quelques vérités.

Par exemple, si l'on dessine deux segments équivalents, et qu'on joigne leurs extrémités par deux droites qui ne s'entre-

croisent pas, on appellera l'attention des élèves sur ces deux segments de la figure, et aussitôt naîtra, dans l'esprit des enfants, d'abord un vague soupçon, puis à peu près la certitude que ces deux segments sont égaux : alors ce sera le moment d'intervenir et d'annoncer que la propriété est absolument vraie, et l'on pourra la démontrer, ou essayer de la faire démontrer par les élèves. On procédera de la même manière dans tous les cas semblables, ce qui servira à développer l'intelligence des élèves et à perfectionner leur intuition géométrique.

8. L'application nous oblige à sortir du champ de la pure et simple abstraction, mais, en revanche, elle peut nous conduire dans le domaine d'autres sciences. Dans l'enseignement, ce travail est utile, car il nous montre les liens et l'accord qui existent entre les diverses branches d'études : il oblige, de plus, les élèves à apprendre et à imprimer dans leur esprit certaines parties fondamentales des autres sciences, tandis que celles-ci, par l'application de la mathématique, reçoivent, à leurs yeux, une sorte de sanction, à cause de la sûreté que l'emploi d'une science exacte donne à leurs résultats. De cette manière, la mécanique, la physique, la cristallographie, la topographie, reçoivent de puissants secours de l'enseignement mathématique, et lui en donneront, à leur tour : et les élèves tout en en retirant un réel avantage, trouveront, sans doute, une agréable et utile récréation.

9. Les applications sont le meilleur et le plus sûr moyen pour vaincre la répugnance traditionnelle qu'on éprouve pour les mathématiques, et quelquefois même pour en éveiller le goût chez ceux qui, sans encore s'en douter, y sont portés naturellement. En choisissant bien les applications, on éveille la curiosité des jeunes gens, on excite leur intérêt ; et il peut se faire que l'élève soit ainsi amené à étudier à fond une question qu'il n'avait qu'ébauchée jusqu'alors, et peut-être (comme il arrive quelquefois) qu'il se révèle en lui une très forte passion pour la science. Si on traite les questions sans faire aucune application pratique, on rend l'enseignement aride et difficile, les élèves se découragent et commencent à se demander s'ils ne perdent pas leur temps dans l'étude d'une science sans utilité pratique et sans attrait ; tandis que si l'on montre immédiatement, par des

applications bien choisies, l'utilité et l'importance des choses qu'on a étudiées, on ramène l'élève dans le monde où il vit habituellement, et on le délivre de cette espèce d'oppression que lui donne l'étude d'une science complètement abstraite.

« Quand vous arriverez aux racines carrées, dit le P. Poulain [1], « sachez les utiliser en les appliquant à des calculs de *moyennes* « *proportionnelles* et *au carré de l'hypoténuse*. Qu'après avoir « mis bien du temps à apprendre l'extraction des racines, les « élèves n'aient plus à demander : A quoi cela sert-il ? Cessez de « leur répondre majestueusement : « Vous le saurez plus tard. » « — Oui, bien tard. Montrez-leur tout de suite qu'un ingénieur « est souvent amené aux extractions de racines par les pro- « blèmes que je viens d'indiquer. »

Moyens de se servir des applications dans l'enseignement. — 10. Examinons maintenant de quelle manière la pratique peut rendre des services dans l'enseignement.

Les problèmes d'Arithmétique sont d'un grand secours ; si les sujets sont empruntés à une science appliquée, et si les données des problèmes sont bien choisies, ils pourront intéresser beaucoup les élèves, et satisfaire ou exciter leur curiosité. Ces problèmes deviendront encore plus utiles et instructifs, si les élèves eux-mêmes sont tenus d'en chercher les données, parce que, indépendamment du plaisir qu'ils trouvent dans les recherches en question, dans les mensurations, les expériences, les lectures d'instruments, etc., il y a encore un grand avantage : c'est qu'ils ne verront là rien d'arbitraire, mais, un exemple effectif de ce qui se présente réellement dans la nature.

11. Le dessin est aussi un grand moyen d'enseignement géométrique, car il permet de réaliser, sinon les figures qui sont abstraites, du moins certains objets réels, dont ces figures sont les images. Le dessin rend familier aux élèves l'usage des mots et la construction des figures géométriques, leur donne l'occasion d'apprendre de nouvelles définitions, et les habitue à concevoir avec précision et clarté les figures géométriques qu'ils

---

[1] P. A. Poulain. *Les mathématiques dans les collèges.* (*L'Enseignement chrétien*, 6e année, 1897.)

étudieront plus tard avec plus de facilité. Pour que le dessin donne de bons résultats, il devra être fait avec le plus de soin et de précision possible. Le but n'est certes pas que les figures dessinées aient plus de ressemblance avec les vraies figures géométriques, car entre une figure abstraite et une figure concrète, il ne peut y avoir une véritable ressemblance, et les figures concrètes « sont toujours fausses », comme l'observe très bien M. Laisant (*l. c.*) ; mais, selon le même auteur, « lorsque » l'approximation est par trop grossière, lorsque les tracés « sont mal exécutés et confus, cette confusion matérielle engen- « dre vite celle du raisonnement et contribue à empêcher l'ap- « parition de la vérité. »

12. Il ne faut pas craindre que le dessin, en faisant paraître évidentes des choses qui doivent être démontrées, serve à détrôner les raisonnements. Dans tout enseignement, en effet, il faut toujours établir avec précision les principes fondamentaux et primitifs, qu'ils puissent ou non être démontrés. Ils seront plus ou moins nombreux selon les exigences de l'école et la nature de l'enseignement; mais, une fois ces principes établis, toute vérité qu'on énonce doit être ou l'un de ces principes, ou une conséquence logique qui découle d'eux-mêmes et des autres vérités qui auront déjà été démontrées. Il en résulte que, si l'on réfléchit, si l'on rejette toute assertion qui ne soit pas de telle nature, on éliminera ainsi celles que nous serions tentés d'émettre d'après ce simple témoignage de l'observation et des sens, et, par conséquent, aussi celles qui seraient suggérées par le dessin. Par suite, le danger signalé plus haut n'existe pas, du moins (et cela soit dit pour tout ce qui a été écrit ou que j'écrirai dans le cours de cet article) si le maître est savant et consciencieux.

13. Il ne faut pas craindre davantage que le dessin puisse circonscrire la fantaisie géométrique, en rendant trop limitées ou trop pauvres les images des figures qu'il crée, et en les restreignant presque à ne représenter que la figure spéciale que l'on trace dans chaque dessin.

Lorsqu'une figure, un triangle par exemple, aura été défini, l'élève qui la dessine pensera à cette définition, et ne fixera son attention que sur ce qu'elle contient ; par conséquent il verra lui-même dans le dessin quelque chose qui représente le

vrai triangle, mais qui ne l'est pas. Des explications spéciales de la part du maître, et les divers changements de formes du triangle dans de nouveaux dessins suffiront pour persuader l'élève que le triangle est l'image abstraite qui embrasse les infinies variétés de figures correspondantes que l'on pourrait tracer.

14. Dans certaines questions de géométrie solide, le dessin est indispensable pour bien comprendre les relations réciproques des lignes et des surfaces, que les jeunes élèves, sans cela, comprennent difficilement ; dès lors, il serait utile, comme le fait remarquer Lacroix [1], d'exercer les élèves à dessiner, d'après nature, des modèles de corps géométriques, avec tous les détails d'ombres et de reliefs qu'on réserve habituellement pour le dessin d'ornement et de figures.

15. L'usage du dessin est encore très recommandable dans l'étude de la Géométrie analytique, surtout plane : car, en ce qui concerne la Géométrie dans l'espace, le dessin présente des difficultés considérables dues à l'imperfection ou à la complication des moyens représentatifs.

Le dessin peut servir, sinon à découvrir les propriétés des courbes, du moins à diriger et localiser les recherches destinées à trouver ces propriétés ; en outre, le dessin, en accompagnant ces recherches, les illustre, les précise et donne une idée exacte de la valeur réelle des résultats obtenus.

Il est utile que les élèves fassent beaucoup d'exercices de dessins de courbes, et que dans chacun d'eux ils tracent le plus grand nombre possible d'éléments relatifs à la courbe. Si le manque de temps (qui est désormais le tyran de nos écoles) ne permet pas de dessiner avec les instruments, qu'on le fasse faire à la main sur papier quadrillé ; particulièrement dans les coordonnées cartésiennes, cela permet d'obtenir des résultats rapides et suffisamment exacts.

16. Le travail manuel sera aussi d'un secours agréable et utile. Pour la Géométrie dans l'espace, tout le monde le sait, les modèles de solides en bois ou en fil de fer sont très précieux, comme aussi les surfaces faites avec des fils, etc... Les polyèdres mêmes, développés sur le papier, sont des auxiliaires utiles, sur-

---

[1] Lacroix. *Essais sur l'Enseignement.*

tout si on les fait confectionner par les élèves en leur donnant les règles nécessaires et opportunes (1).

Il est aussi très utile et amusant pour les élèves de leur faire dessiner des courbes planes sur de petites plaques de bois qui servent au travail à découper; on leur fera ensuite exécuter le découpage de ces dessins, et les élèves verront ainsi et comprendront les propriétés des courbes relativement à leur développement les unes sur les autres, à leur engrenage pour la transformation des mouvements, ainsi que beaucoup d'autres propriétés mécaniques. On pourra leur faire construire ainsi de petits instruments pour le tracé de certaines courbes, par exemple des cycloïdes, épicycloïdes, etc...

17. Indépendamment de ces exercices pratiques que les élèves font individuellement dans l'école ou chez eux, il y en a d'autres tout aussi importants qu'on peut faire collectivement et sur le terrain, comme les opérations les plus élémentaires de la mesure des hauteurs, des distances, des aires, des volumes et les reliefs ; ils n'exigent seulement que l'aide de quelques instruments très simples et des premières notions de mathématiques. Ces exercices, par suite du milieu même où ils sont exécutés et de l'application à la vie qu'ils contiennent, présentent un grand intérêt: de plus, ils sont pour les jeunes gens un agréable divertissement, sans compter que là sur le terrain, en pleine campagne, les élèves comprennent plus facilement, et apprécient mieux certaines vérités avec lesquelles ils n'avaient pu se familiariser à l'école.

18. Je crois devoir faire remarquer que ce que j'ai dit jusqu'ici et qui se rapporte à l'emploi de la pratique dans l'enseignement, n'est pas seulement mon opinion personnelle, ou celle des auteurs que j'ai cités. Quelques-uns de mes collègues, professeurs dans quelques lycées peu nombreux, conduisent leurs élèves à la campagne, et après de brèves explications sur l'emploi des instruments, leur font mesurer la distance entre des points inaccessibles, la hauteur des tours au moyen de l'ombre, etc. Le professeur Peano, de l'Université de Turin, mon collègue à l'Académie Militaire, fait dessiner à ses élèves dans les deux écoles, des

(1) Voir Rivelli. *Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi et alla loro costruzione in carta.*

courbes, qu'il leur donne ou par leurs équations ou par leurs définitions géométriques ou mécaniques, et, après avoir fait calculer leurs principaux éléments, il les fait dessiner en tout ou en partie, jusqu'à ce que des difficultés trop considérables de dessin viennent s'y opposer. Et l'expérience démontre que de cette façon les idées sont plus claires, plus précises, et se fixent dans l'esprit bien mieux qu'avec de longues explications au tableau noir.

La pratique dans l'enseignement primaire des mathématiques. — 19. Tout le monde connaît l'importance de la pratique et de l'intuition au début de l'enseignement des mathématiques ; c'est par là qu'il faut commencer afin de donner aux enfants une idée des nombres et des figures géométriques. Il ne faut pas croire cependant que l'enseignement des mathématiques dans les classes élémentaires doit être une chose purement matérielle, car il sera bon au contraire de préparer les enfants, et cela graduellement, sans aucun apparat de définitions ou d'explications, à ces abstractions qui sont la base des mathématiques ; mais, quand les enfants comprendront bien que les nombres et les figures sont des choses purement idéales, il faudra les rappeler à la réalité au moyen d'exercices et d'applications. Un maître intelligent, par le passage de la théorie à la pratique, aura l'occasion de faire noter que la théorie agit sur des choses abstraites et que la résolution des problèmes n'est que l'application d'opérations abstraites à des questions concrètes ; il évitera ainsi de fréquentes erreurs chez les enfants, en leur faisant observer, par exemple, qu'on ne multiplie ou qu'on ne divise pas des mètres par des ouvriers ou des kilogrammes par des jours, mais qu'on n'opère seulement que sur des nombres qui représentent ces grandeurs.

La pratique ne doit pas supplanter, mais seulement corroborer et aider l'abstraction ; mais, d'un autre côté la négliger, et réduire l'enseignement élémentaire à une simple énumération de nombres, à de simples calculs numériques serait le dénaturer et le rendre aride, avec la certitude d'être mal compris, et de voir les élèves se dégoûter de la mathématique.

20. Le dessin devra être utilisé même dans les écoles élémentaires comme moyen d'enseignement pour donner aux enfants des idées de forme, d'extension et de figure. Il sera bon, du

moins dans les classes secondaires inférieures, d'exercer les élèves eux-mêmes au dessin géométrique qui est une école précieuse d'ordre et de précision, et un moyen puissant pour préparer l'intelligence à comprendre ce que seront plus tard, dans un enseignement plus avancé, les théorèmes, et peut-être même à en deviner quelques-uns.

Naturellement on fera dessiner des figures et des constructions choisies parmi les plus simples ; mais leur exécution sera sans doute féconde d'heureux résultats, à condition, cependant, que l'on habitue les enfants à dessiner avec exactitude.

21. Dans les écoles inférieures il sera avantageux aussi de familiariser les élèves avec la mesure *directe* des objets, en proposant des problèmes se rapportant autant que possible aux choses qui sont généralement à la portée de l'écolier. Ces applications ont encore l'avantage d'exercer l'œil et la main des enfants afin qu'ils puissent bientôt évaluer approximativement et sans instruments, les longueurs, les poids, les capacités, etc.

Le mesurage peut être employé aussi en faisant exécuter des dessins à une échelle déterminée et d'après certaines données fournies par le maître. Cela donnera aux enfants l'idée de proportion, de rapport : et la même figure exécutée, plusieurs fois à des échelles différentes, fera naître chez eux l'idée de figures semblables [1].

La pratique dans l'enseignement secondaire et supérieur des mathématiques. — 22. Quant à l'enseignement secondaire (et ce qui suit soit dit aussi pour diverses branches de l'enseignement supérieur) il est certain que sa base ne peut être que le raisonnement logique et rigoureux. L'usage de la pratique doit être seulement subsidiaire ; mais il sera utile pour la plus grande clarté des études, pour exciter l'intérêt, et récréer les élèves. On fera des applications fréquentes au fur et à mesure que l'occasion se présentera.

En ce qui concerne l'Algèbre, il faut chercher à éveiller chez les élèves le goût d'autres sciences, en choisissant les problèmes

---

[1] Telle est l'opinion du professeur Mannheim comme il résulte de l'article : « Réflexions sur le premier enseignement de la Géométrie » de M. C.-A. Laisant dans *L'Enseignement mathematique*, 1re année, n° 5, p. 339-343.

dans la Physique, l'Astronomie, etc... Afin que les questions excitent la curiosité, on les pourra choisir parmi celles qu'on croit généralement difficiles ou insolubles : l'amour-propre des élèves en sera piqué. La théorie des probabilités, par exemple, et celle des approximations pourront fournir des questions, des problèmes intéressants et donner lieu à de curieuses applications.

23. Il est utile de faire exécuter par le dessin les constructions pendant qu'on les explique dans le cours, et réaliser ainsi sinon avec les instruments (le temps peut-être ne le permettant pas) du moins à la main sur papier quadrillé, la solution des problèmes qu'on étudie. Il sera bon aussi de faire dessiner des figures élémentaires correspondant à des mesures données, par exemple un arc de cercle (dont la mesure est donnée en rayons ou en degrés), un arc d'un sinus ou d'une tangente donnés, ou bien encore de résoudre graphiquement des problèmes qui, quoique insolubles théoriquement par les moyens de la Géométrie élémentaire, peuvent toutefois être résolus avec le degré d'approximation que l'on veut, comme par exemple trouver la $n^{ième}$ partie d'un angle, rectifier une circonférence, faire la quadrature d'un cercle, etc., en évaluant ensuite le degré d'approximation théorique et pratique auquel on est arrivé.

Dans la présentation des problèmes graphiques il faudra leur donner l'aspect de questions pratiques, comme par exemple le tracé d'une voie ferrée, étant donnés quelques points où elle doit passer ou la longueur de certains traits, etc.

24. Dans l'enseignement secondaire il serait désirable qu'on introduisît, même si le programme ne le comporte pas, l'idée de la représentation cartésienne ou polaire des fonctions par les courbes, ou même la représentation vectorielle, pour initier les élèves aux procédés représentatifs aujourd'hui en usage, même en dehors des mathématiques ; on pourra ensuite parler des appareils enregistreurs (comme l'anémographe, le sismographe, etc.), et en exposer le fonctionnement.

Comme application, on fera tracer aux élèves la courbe représentative de quelque phénomène qui se passe sous leurs yeux, comme par exemple la variation de la température d'une chambre durant les différentes heures de la journée, celle de la mortalité d'une ville durant le cours de l'année, etc.

25. La connaissance des courbes représentatives des fonctions peut servir dans l'enseignement secondaire et supérieur à montrer aux élèves leur usage pour remplacer les tables de calcul. Ainsi, par exemple, la sinusoïde $y = \sin x$, une fois dessinée, nous donne les sinus des arcs qui sont exprimés (en rayons) par ses abscisses ; la spirale logarithmique $\rho = e^{\omega}$ nous donne dans les arguments de ses points (mesurés par le radiant) les logarithmes népériens des rayons vecteurs de ces points, etc., de telle sorte que les courbes tracées avec une exactitude suffisante peuvent suppléer les tables de logarithmes et d'autres encore, au moins dans une certaine mesure. Pour cela il faudra tracer les courbes avec d'autres moyens que la détermination de leurs points obtenus par les coordonnées calculées par l'équation ; par suite, il faudra enseigner les moyens mécaniques ou géométriques pour le tracé des principales courbes, au moins dans la mesure que comporte le degré d'enseignement.

26. La réduction d'échelle pourra donner lieu à des exercices intéressants et utiles.

Par exemple les données d'un problème exprimées avec une certaine unité pourront être dessinées à une échelle réduite, et l'on pourra, à cette même échelle, faire dessiner la solution de problèmes, ou réduire à une autre échelle des figures déjà dessinées.

La réduction aux échelles fournira l'occasion d'enseigner aux élèves à se servir des plans topographiques, pour la mesure des hauteurs, distances, inclinaisons, etc., ou pour retrouver un chemin déjà parcouru pour aller d'un lieu à un autre, étant donnée une ligne brisée parcourue, au moyen de la longueur de ses divers côtés, et de leurs inclinaisons les uns sur les autres.

27. Nous rappelons ici, quoique nous en ayons déjà parlé, et parce qu'ils concernent l'enseignement secondaire, les exercices utiles du développement des solides, des constructions de polyèdres en papier ou en fil de fer, de courbes en bois ou en métal, ainsi que les relevés topographiques avec lesquels les élèves prennent sur le terrain les mesures nécessaires, et, s'il le faut, exécutent ensuite chez eux les calculs pour la détermination des différentes inconnues.

La pratique, objet d'étude. — 28. Afin que l'on comprenne mieux combien il est important que les élèves étudient aussi l'application pratique, il est bon de rappeler que c'est la pratique qui a suggéré, et, pour ainsi dire, créé diverses branches des sciences mathématiques. Ainsi la théorie des approximations, le calcul des erreurs naissent de l'usage des mathématiques appliquées aux choses concrètes. La solution graphique effective des problèmes de Géométrie, qui conduit à des constructions plus ou moins longues et compliquées et par suite à un degré de précision plus ou moins grand, a donné naissance à la Géométrographie, qui examine et confronte les constructions au point de vue de leur précision et de leur simplicité.

D'un autre côté, certaines questions nées de la pratique ont été, tôt ou tard, directement ou indirectement, la source de nouvelles études et de nouvelles théories. Je citerai par exemple la duplication du cube née, si ce que l'on dit est vrai, d'une question pratique posée par l'oracle ; elle a fait naître des constructions de nouvelles courbes et nous a valu de belles et récentes études pour en démontrer l'impossibilité par la Géométrie élémentaire.

Nécessité de l'étude de l'approximation. — 29. Ainsi que nous l'avons déjà fait observer, l'usage de la pratique exige qu'on fasse bien comprendre aux élèves que les résultats qu'on obtient, s'ils sont exacts comme cas spéciaux de cas généraux théoriques, ne répondent pas exactement à la pratique (N° 4). Il est donc nécessaire que les élèves aient une idée suffisamment exacte du calcul des approximations et des limites de ces approximations mêmes, c'est-à-dire du degré d'approximation auquel on peut arriver. M. Laurent (1) dit que ce serait presque un *crime* de ne pas enseigner à résoudre des questions aussi simples et indispensables ; et certainement aucune connaissance mieux que le calcul des approximations ne peut faire apprécier la nature réelle des recherches mathématiques comparées avec la réalité, et la valeur de celle-ci dans les applications. En vérité cette

(1) Laurent. *Les mathématiques spéciales en France.* (*L'Enseignement mathématique.* 1re année, n° 1.)

appréciation sur l'exactitude pratique d'une recherche ne peut se faire sans un examen sérieux de la question pour laquelle on l'exécute ; il est donc nécessaire que les élèves soient initiés à cet examen des objets auxquels s'applique le calcul, pour bien juger les limites dans lesquelles les erreurs restent circonscrites.

En attendant, on pourra leur faire noter, comme le dit M. Laisant (*l. c.*) « qu'il est permis de considérer ici un résultat « approché (en théorie), comme très supérieur à un résultat « rigoureusement exact, si le premier est par sa nature, mieux « adapté à l'objet qu'on a en vue, et si en somme l'erreur finale, « au point de vue pratique, est inférieure à celle qu'aurait pro- « duite la solution mathématique absolue ».

De même, il faudra bien inculquer le principe si important dans les applications « de proportionner l'approximation que « l'on poursuit, à la puissance des moyens mis en œuvre, et à la « nature pratique des questions. Celui qui évaluerait l'aire d'un « champ de quelques hectares, en se trompant d'un are ou deux « serait un piètre arpenteur ; mais celui qui prétendrait la « déterminer à un millimètre carré près, serait un fou ». Laisant, *l. c.*

M. Klein, dans la sixième des conférences sur la mathématique tenues à Chicago, insiste lui aussi sur ce point que « les déve- « loppements mathématiques qui dépassent les limites rigou- « reuses de la science appliquée n'ont aucune valeur pratique ».

Par suite, les jeunes gens devront être exercés dans l'appréciation de l'approximation qu'il est convenable de rechercher relativement au résultat, d'un côté, et de l'autre de celle qu'il faut exiger relativement aux données du problème. Il faudra aussi faire bien comprendre le degré de précision nécessaire dans l'usage des instruments de calcul, proportionnellement au degré d'approximation que nécessairement on ne pourra dépasser dans les questions spéciales. Cela soit dit pour le choix des tables de logarithmes, pour lesquels, sauf quelques rares exceptions, 4 ou 5 décimales sont suffisantes.

En se servant des tables à sept décimales ou davantage encore, par exemple dans des calculs de longueurs où les méthodes employées rendent possible une erreur de 1 ou 2 mètres pour une vingtaine de kilomètres, l'approximation qu'on obtiendrait

ainsi serait une apparence chimérique et trompeuse. C'est encore l'opinion de M. Laisant.

Moyens mécaniques pour la résolution des problèmes. — 3o. L'introduction des questions pratiques dans l'enseignement donnera l'occasion (dans les écoles plus avancées et avec des jeunes gens suffisamment instruits), d'enseigner au moins l'usage des principaux instruments et appareils avec lesquels on peut exécuter et simplifier les calculs et les constructions. Après avoir familiarisé les élèves avec les tables proprement dites (logarithmes, etc.), on pourra leur parler des abaques et des règles logarithmiques. On les habituera aussi à se servir des courbes représentatives des fonctions pour déterminer, avec une approximation souvent suffisante, les valeurs pour lesquelles ces fonctions se trouvent dans certaines conditions, et conséquemment pour résoudre des équations.

Il sera utile encore de parler des moyens physiques par lesquels on peut résoudre des équations, par exemple de l'usage des liquides, et en général des machines qui ont été construites pour l'exécution des calculs et la recherche des fonctions ; parmi ces machines, quelques-unes, comme l'arithmomètre, sont largement utilisées dans la pratique, et d'autres, comme l'intégraphe, ont beaucoup d'applications (1).

Rodolphe Bettazzi (Turin).

(1) Voir Pascal E., *Repertorio di matematiche superiori*, et Dyck, *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.*

NOUVEAUX MODÈLES CINÉMATIQUES

ET INTRODUCTION NOUVELLE

A LA THÉORIE DES COURBES CYCLOIDALES [1]

Il nous semble utile d'appeler l'attention du lecteur sur une collection de nouveaux modèles [2] *destinés à l'enseignement de la Cinématique. Cette collection répond au vœu exprimé par M. le professeur* F. Klein *à la réunion des mathématiciens allemands tenue à Francfort en* 1896, *à savoir* [3] *: qu'il soit édité une collection de modèles simples permettant de réaliser les mécanismes les plus importants en mettant en évidence les principes mathématiques sur lesquels ils reposent. Il est vrai qu'il existait déjà quelques modèles qui peuvent être rangés dans cette catégorie; mais il restait à en augmenter le nombre et à les grouper systématiquement, le prix de chaque modèle étant aussi bon marché que possible. En entreprenant ce travail, M.* Fr. Schilling *rend un grand service à l'enseignement. Il faut espérer que ses modèles, dont une première série seule* [4] *vient de paraître, ne tarderont pas à pénétrer dans les salles de cours. Ils pourront être utilisés non seulement dans les écoles supérieures, mais aussi dans les leçons élémentaires.*

Les Directeurs.

Dans le but de rendre plus facile la compréhension des modèles dont il est question dans la seconde partie de ce mémoire, je consacre la première à une introduction nouvelle et particulièrement

---

(1) Traduit de l'allemand par H. Duaime. L'original a paru dans la *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. 44; 1899.

(2) Ces modèles sont édités par la maison Martin Schilling à Halle a. S.; elle se tient à la disposition du lecteur pour lui fournir des renseignements détaillés au sujet de ces modèles.

(3) *Jahresbericht der Deutsch. Math. Vereinigung*, t. V, p. 5; voir aussi t. VII, p. 7.

(4) La deuxième série comprenant les mécanismes qui se rattachent à la théorie des engrenages paraîtra prochainement.

simple à la théorie des cycloïdes. Les exposés [1] que l'on a publiés jusqu'à ce jour sur cette théorie manquent de clarté, ou sont incomplets sinon même inexacts. C'est à cette circonstance qu'il faut attribuer le fait que dans les milieux des mathématiciens ces notions, en elles-mêmes très simples, ne sont pas aussi connues que l'exigerait leur importance technique dans la construction des engrenages.

§ 1. — Les courbes cycloïdales.

Nous appellerons courbes cycloïdales les courbes dues à la génération cinématique suivante :

1. *Si deux côtés adjacents* SE_1 *et* SE_2 *d'un parallélogramme articulé* SE_1ME_2 *tournent autour du sommet* S, *avec des vitesses angulaires* ω *et* Ω, *différentes, mais toutes deux uniformes, le sommet opposé* M *décrit une courbe cycloïdale* (fig. 1).

Envisageons, dans le plan du parallélogramme [2], la variable complexe $z = x + iy$.

Supposons que dans la position initiale, le parallélogramme soit aplati, de telle sorte que les quatre côtés coïncident avec l'axe des x ; désignons par C et c, les longueurs des côtés SE_1 et SE_2, par z_1 et z_2 des variables complexes représentant les positions de E_1 et E_2 dans le cours du mouvement, par z une variable correspondant de même au point M, enfin par t un paramètre indé-

---

[1] Par exemple, ceux de MM. A. Vietor et Ch. Wiener publiés dans la *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* (t. 25, p. 263 et suiv., 1880; t. 26, p. 255 et suiv., 1881) laissent à désirer au point de vue de la simplicité. On trouve des inexactitudes par exemple dans les traités suivants : Weissenborn, *Die cyklischen Kurven*, Eisenach, 1856 ; Hattendorf, *Analytische Geometrie*, Hannover, 1887, p. 108 et suiv. ; Kœnigs, *Leçons de cinématique*, Paris, 1897, p. 163. Le meilleur exposé est encore celui que l'on trouve dans la courte note publiée en 1874 par M. Rittershaus dans les *Verhandlungen zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen* (année 53, p. 272) ; M. Burmester l'utilise dans son traité de Cinématique (Leipzig, 1884, p. 134 et suiv.). Toutefois ces auteurs ne font pas l'étude analytique des courbes. Voir aussi Gildermhister, *De lineis curvis epicycloidibus et hypocycloidibus*. Marbourg, 1866, et Bellermann, *Epicykloïden und Hypocykloiden*, Iena, 1867.

[2] M. Mehmke a déjà employé des variables complexes pour des recherches analogues, notamment dans son travail : Ueber die Bewegung eines ebenen starren Systems in seiner Ebene, *Zeitschr. für Math. u. Physik*, t. 35, p. 1-24, 65-81 (1890).

pendant analogue au temps. Nous avons évidemment les relations :

$$z_1 = Ce^{i\omega t}, \qquad z_2 = ce^{i\Omega t},$$

et comme

$$z = z_1 + z_2,$$

$$z = Ce^{i\omega t} + ce^{i\Omega t}, \tag{I}$$

qui est l'équation générale la plus simple des courbes cycloïdales (1).

On voit qu'il y a lieu de distinguer deux cas principaux suivant que ω et Ω sont de même signe ou de signes contraires.

Nous supposerons, ce qui ne diminue d'ailleurs en rien la généralité des recherches, dans le premier cas ω *et* Ω *tous deux positifs, dans le second cas* ω *négatif et* Ω *positif, dans les deux cas* $|\omega| < \Omega$.

Quels que soient les signes de ω et de Ω, l'équation (I) peut prendre les deux formes suivantes :

$$z = (C + ce^{i(\Omega - \omega)t})e^{i\omega t}, \tag{II}$$

$$z = (c + Ce^{i(\omega - \Omega)t})e^{i\Omega t}. \tag{III}$$

---

(1) Si nous partions d'une position quelconque du parallélogramme, l'équation (I) deviendrait, en remplaçant z et t par z' et t'

$$z' = Ce^{i(\omega t' + \alpha)} + ce^{i(\Omega t' + \beta)} \tag{I'}$$

où α et β désignent les angles de SE_1 et de SE_2 avec l'axe des x, dans la position initiale. Faisons alors les substitutions :

$$z' = ze^{i\sigma}, \qquad t' = t + \tau$$

σ et τ étant deux grandeurs réelles non encore déterminées, l'équation (I') devient :

$$z = Ce^{i(\omega t + \omega\tau + \alpha - \sigma)} + ce^{i(\Omega t + \Omega\tau + \beta - \sigma)}.$$

Cela revient évidemment à faire tourner le système des coordonnées d'un certain angle autour de S, et à compter le paramètre t à partir d'une nouvelle origine.

Pour ramener l'équation (I') à l'équation (I), il suffit de poser :

$$\omega\tau + \alpha - \sigma = 0 \qquad \Omega\tau + \beta - \sigma = 0$$

c'est-à-dire

$$\tau = \frac{\alpha - \beta}{\Omega - \omega}, \quad \sigma = \frac{(\Omega + \omega)\tau + \alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha\Omega - \beta\omega}{\Omega - \omega},$$

ce qui est toujours possible, sauf dans le cas où $\omega = \Omega$, mais alors le parallélogramme, tourne autour de S comme un système rigide.

Il faut encore remarquer que nous ne restreignons nullement la généralité de la démonstration, en supposant les grandeurs C et c toutes deux positives.

Cherchons à nous représenter la signification géométrique de l'équation II) pour une valeur donnée t^* du paramètre t.

Afin d'être plus précis, nous nous placerons dans le premier cas (ω et Ω tous deux positifs) ; les résultats seraient d'ailleurs absolument les mêmes dans le second cas. Nous remarquerons d'abord qu'il nous suffit de ne conserver du parallélogramme que les côtés SE_1 et E_1M (fig. 1). Pour représenter la parenthèse

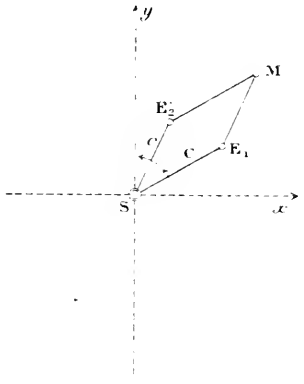


Fig. 1.

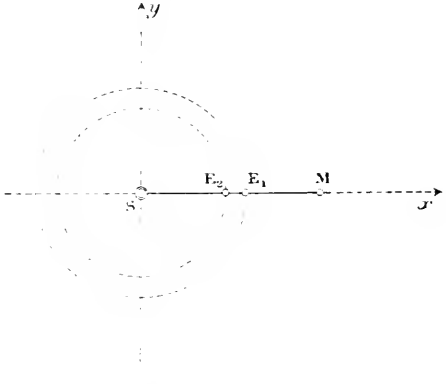


Fig. 2.

qui figure dans le second membre, portons à partir de l'origine sur l'axe des x, la longueur C en SE_1 (fig. 3), puis à partir de E_1, une droite de longueur c, faisant avec l'axe des x un angle $(\Omega - \omega)\, t^*$, en $E_1\overline{M}$; le point $\overline{M}$ est alors l'image de la quantité complexe $C + ce^{i(\Omega-\omega)t^*}$. Si à présent nous faisons tourner tout d'une pièce la figure $SE_1\overline{M}$, d'un angle $\omega\, t^*$ autour de S, elle viendra en $SE_1^*M^*$ et le point M^* sera l'image du second membre complet $(C + ce^{i(\Omega-\omega)t^*})\, e^{i\omega t^*}$.

En d'autres termes l'équation II exprime que le point M est soumis à chaque instant à deux rotations ; l'une autour de la position momentanée du point E_1, avec une vitesse angulaire $(\Omega - \omega)$, l'autre (à laquelle E_1 est également soumis) autour du point S, avec une vitesse angulaire ω [1].

---

[1] Ce mouvement est tout à fait analogue à celui de la lune qui tourne autour de la terre et en même temps que celle-ci, autour du soleil. Nous avons d'ailleurs choisi une partie de la notation afin de faire ressortir cette analogie.

Nous sommes ainsi amenés à une deuxième génération cinématique des courbes cycloïdales.

2. *Une courbe cycloïdale est engendrée par un point* M *d'un système mobile, qui tourne d'une vitesse uniforme autour d'un point* E_1, *tandis que ce dernier tourne lui-même, également d'une vitesse uniforme autour d'un point fixe* S.

Cette seconde sorte de génération présente, il est vrai, l'inconvénient de produire la même courbe de deux façons différentes.

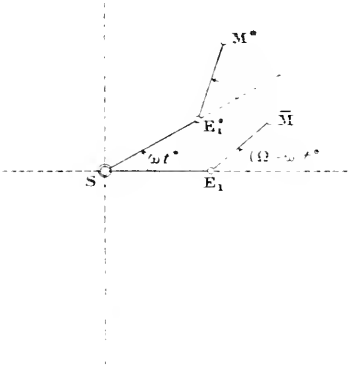


Fig. 3.

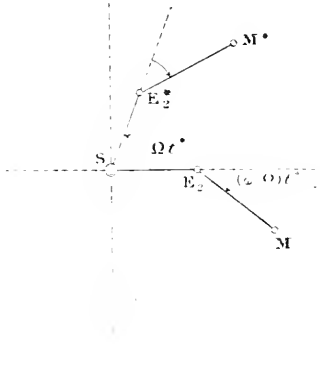


Fig. 4.

Nous pourrions en effet chercher la signification de l'équation III, c'est-à-dire considérer la partie SE_2M du parallélogramme (fig. 4). Nous obtiendrons alors la même courbe que précédemment en donnant à M une vitesse négative cette fois, $\omega - \Omega$, autour de E_2, pendant que E_2 tourne lui-même autour de S d'une vitesse constante Ω.

Or, les théorèmes de Cinématique nous permettent, dans le cas de la figure 3, de remplacer pour un instant les deux vitesses angulaires simultanées de M :

$(\Omega - \omega)$ de centre E_1, et ω de centre S, par une seule vitesse angulaire $(\Omega - \omega) + \omega = \Omega$ autour du point P_1, qui partage la ligne SE_1 dans le rapport inverse des vitesses angulaires (fig. 5) de sorte que :

$$\frac{E_1P_1}{P_1S} = \frac{\omega}{\Omega - \omega}.$$

que l'on peut écrire en posant $E_1P_1 = b$ et $P_1S = a$

$$\frac{b}{a} = \frac{\omega}{\Omega - \omega}. \tag{IV}$$

Les lieux géométriques du pôle ou centre instantané P_1, dans le plan fixe et dans le plan mobile (fixé à E_1M), c'est-à-dire les trajectoires polaires, sont évidemment deux cercles tangents

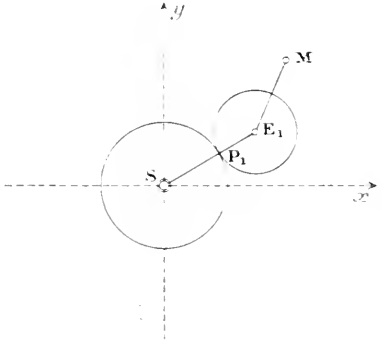


Fig. 5.

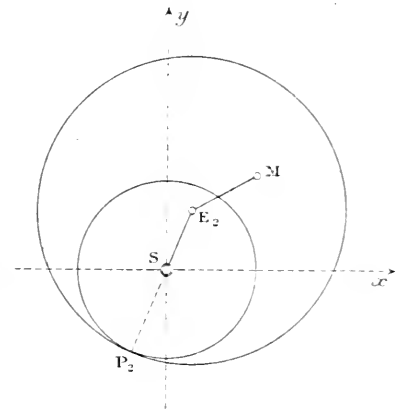


Fig. 6.

extérieurement de centres S et E_1 et de rayons a et b (fig. 5). Cela nous donne une troisième génération cinématique des courbes cycloïdales, qui est d'ailleurs la plus connue.

3. *Une courbe cycloïdale est la courbe décrite par un point M invariablement lié à un cercle qui roule sur un cercle fixe.*

Nous pourrions faire un raisonnement analogue pour le cas de la figure 4. Le pôle P_2, qui est alors situé sur le prolongement de SE_2 au delà de S est donné par l'équation

$$\frac{E_2P_2}{P_2S} = \frac{\Omega}{\omega - \Omega},$$

ou en désignant par A et B les valeurs absolues des longueurs P_2S et E_2P_2

$$\frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega}. \tag{V}$$

Les cercles polaires sont alors tangents intérieurement.

Nous pouvons donc dire que :

4. *Toute courbe cycloïdale du premier type peut être engendrée, soit par deux cercles tangents extérieurement et roulant l'un sur l'autre, soit par le roulement de deux cercles tangents intérieurement; dans ce dernier cas, le grand cercle doit toujours rouler sur le petit.*

En soustrayant les équations IV et V, on a :

$$\frac{B}{A} - \frac{b}{a} = 1. \tag{VI}$$

On voit en outre, par la simple inspection des figures, que :

$$b + a = C, \tag{VII}$$

$$B - A = c, \tag{VIII}$$

c'est-à-dire :

5. *La distance du point décrivant au centre du cercle mobile, de l'un des couples de cercles, est égale à la distance des centres de l'autre couple.*

Les équations (VI), (VII) et (VIII) déterminent sans ambiguïté A, B, C si l'on connaît a, b, c et vice versa.

Enfin l'équation (VI) a la signification géométrique suivante :

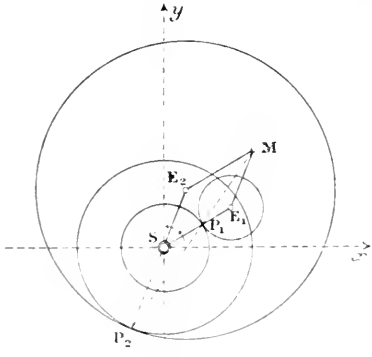


Fig. 7.

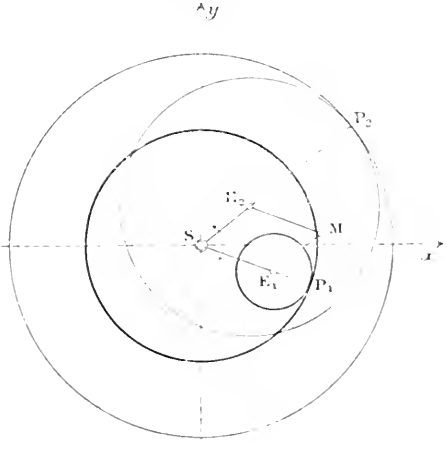


Fig. 7*.

6. *Si l'on réunit les figures* 5 *et* 6 *construites pour le même instant* t' *en une seule de façon à rétablir le parallélogramme primitif, les points* P_1, P_2 *et* M *sont en ligne droite* (fig. 7).

Ce théorème permet de construire graphiquement A, B, C, quand on connaît a, b, c et inversement.

Pour le second cas ($\omega < 0$, $\Omega > 0$, $|\omega| < \Omega$) nous nous contenterons des remarques suivantes :

4°. *Toute courbe cycloïdale du second type peut être engendrée par deux couples de cercles tangents intérieurement, dans les deux cas le petit cercle roulant sur le grand.*

Les formules correspondant aux formules (IV) à (VIII) sont alors les suivantes, où a, b et A, B désignent toujours les valeurs absolues des rayons SP_1, P_1E_1 et SP_2, P_2E_2

$$(IV^*) \qquad \frac{b}{a} = -\frac{\omega}{\Omega - \omega}, \qquad (V^*) \quad \frac{B}{A} = \frac{\Omega}{\Omega - \omega},$$

$$(VI^*) \qquad \frac{B}{A} + \frac{b}{a} = 1,$$

$$(VII^*) \qquad a - b = C. \qquad (VIII^*) \quad A - B = c.$$

Les théorèmes 5 et 6 s'appliquent ici sans aucune modification [1].

L'équation (VI*) nous montre que si l'un des rapports des rayons est égal à $\frac{1}{2}$, l'autre l'est aussi ; dans ce cas, $\omega = -\Omega$, à cause des équations (IV*) et (V*), et l'équation primitive devient :

$$(IX) \qquad z = Ce^{-i\Omega t} + ce^{i\Omega t}$$

qui peut s'écrire en égalant respectivement les portions réelles et les portions imaginaires :

$$(X) \qquad \begin{aligned} x &= (c + C)\cos\Omega t, \\ y &= (c - C)\sin\Omega t, \end{aligned}$$

et si l'on fait abstraction du cas où $C = c$, on déduit de là

$$\frac{x^2}{(c + C)^2} + \frac{y^2}{(c - C)^2} = 1$$

donc :

7. *Dans le cas particulier où* $\omega = -\Omega$ *; si* $c = C$ *le point* M

[1] Soit par exemple : C et $\frac{\omega}{\Omega}$, constants, mais c variable, l'équation (I) représente par un choix convenable de c toute courbe cycloïdale qui peut être engendrée par le roulement d'un certain couple de cercles.

décrit un segment de l'axe des x; *si* $c \gtrless C$ *le point* M *décrit une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes coordonnés et ont pour valeurs* $2(c + C)$ *et* $2|c - C|$.

La même équation (VI') nous permet encore de différencier les deux couples de cercles :

8. *Si, dans les courbes du second type, le rapport des rayons d'un couple de cercles est* $> \frac{1}{2}$, *le rapport des rayons de l'autre couple est* $< \frac{1}{2}$.

En nous basant sur les remarques précédentes, nous proposerons les dénominations suivantes pour les divers types de courbes cycloïdales :

9. *Nous appellerons* « *Epitrochoïdes* » *les courbes cycloïdales du premier type* $\left(\frac{\omega}{\Omega} > 0\right)$, *et* « *Hypotrochoïdes* » *celles du second* $\left(\frac{\omega}{\Omega} < 0\right)$.

Le dernier théorème nous fournit un moyen d'indiquer par quel couple de cercles la trochoïde a été engendrée.

10. *On pourra appeler* « *Epitrochoïde à centre libre* » *ou* « *Epitrochoïde à centre couvert* », *la même épitrochoïde suivant que le cercle roulant regardé comme un disque plein laisse voir ou couvre le centre du cercle fixe ; de même l'hypotrochoïde sera dite* « *Hypotrochoïde à centre libre* » *ou* « *Hypotrochoïde à centre couvert* ».

Nous donnerons enfin les définitions suivantes, qui supposent seulement $|\omega| < |\Omega|$.

11. *Dans le premier comme dans le second cas, nous dirons que la courbe est une épi- ou hypotrochoïde allongée, raccourcie ou ordinaire* (1) *selon que le rapport* $\frac{c}{C}$ *est* $>, <$ *ou* $= \left|\frac{\omega}{\Omega}\right|$ (2).

(1) J'ai employé les termes usités dans les ouvrages français, bien qu'ils ne correspondent nullement aux termes allemands : *verschlungene* (entrelacée), *gestreckte* (étirée), *gespitzte* (à rebroussements). On remarquera aussi que le terme épicycloïde est employé ici dans un sens beaucoup plus restreint que dans les ouvrages français. Note du trad.

(2) Si $\frac{c}{C} = \left|\frac{\omega}{\Omega}\right|$, les cercles fixes des deux couples coïncident.

Nous nommerons aussi pour abréger, épi- ou hypocycloïde (à centre libre ou couvert), l'épi- ou hypotrochoïde ordinaire.

J'ajouterai encore, à l'appui de ce qui précède, les définitions géométriques données par M. Chr. Wiener, dans le travail cité plus haut (p. 32).

11°. *Si le point décrivant* M *et le centre du cercle fixe sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs au cercle mobile nous avons une trochoïde allongée.*

Si le point décrivant M *est intérieur et le centre du cercle fixe extérieur au cercle mobile ou vice versa, nous avons une trochoïde raccourcie.*

Si enfin le point décrivant M *est sur le cercle mobile (le centre du cercle fixe pouvant d'ailleurs être à l'extérieur, ou à l'intérieur) nous avons une trochoïde ordinaire.*

J'indique en terminant, les équations des trochoïdes en coordonnées rectangulaires x, y : égalant les portions réelles et les portions imaginaires de l'équation (I) on a :

$$x = \mathrm{C}\cos\omega t + c\cos\Omega t, \qquad (\mathrm{XI})$$
$$y = \mathrm{C}\sin\omega t + c\sin\Omega t.$$

On peut transformer ces équations, de manière que l'on puisse reconnaître de suite la génération de la trochoïde. Soit par exemple une épitrochoïde à centre libre. Introduisons à la place de t le paramètre λ (donné par $\lambda = \omega t$) qui désigne l'angle dont l'axe central SE_1 du couple de cercles a tourné autour de S,

---

En effet, dans le premier cas, par exemple, on déduit des équations

$$\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{b+a} = \frac{c}{\mathrm{C}} = \frac{\omega}{\Omega} \qquad (\mathrm{VII\ et\ VIII})$$

ou en vertu des équations (IV et V) :

$$\frac{\mathrm{A}}{a}\,\frac{\dfrac{\Omega}{\Omega-\omega}-1}{\dfrac{\omega}{\Omega-\omega}+1} = \frac{\omega}{\Omega}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{A}}{a} = 1.$$

La démonstration est analogue pour le second cas.

et éliminons les grandeurs $\frac{\omega}{\Omega}$ et C à l'aide des équations (IV) et (VII).

XI *a*)
$$x = (a+b)\cos\lambda + c\cos\frac{a+b}{b}\lambda,$$
$$y = (a+b)\sin\lambda + c\sin\frac{a+b}{b}\lambda.$$

Nous aurons de même pour une épitrochoïde à centre couvert

XI *b*)
$$x = C\cos\frac{B-A}{B}\Lambda + (B-A)\cos\Lambda,$$
$$y = C\sin\frac{B-A}{B}\Lambda + (B-A)\sin\Lambda.$$

où
$$\Lambda = \Omega t.$$

Enfin pour l'hypotrochoïde, nous aurons l'un des deux groupes

XI *c*)
$$x = (a-b)\cos\lambda + c\cos\frac{b-a}{b}\lambda,$$
$$y = (a-b)\sin\lambda + c\sin\frac{b-a}{b}\lambda,$$

dans lequel
$$\lambda = \omega t,$$

ou
$$x = C\cos\frac{B-A}{B}\Lambda + (A-B)\cos\Lambda,$$
$$y = C\sin\frac{B-A}{B}\Lambda + (A-B)\sin\Lambda,$$

dans lequel
$$\Lambda = \Omega t.$$

Ces équations peuvent être utilisées pour l'étude de courbes particulières; mais elles sont évidemment moins simples et moins générales que les équations (I) et (XI).

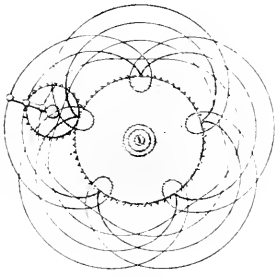
§ 2. — Description des modèles

Ces modèles se partagent en quatre groupes que nous allons successivement examiner.

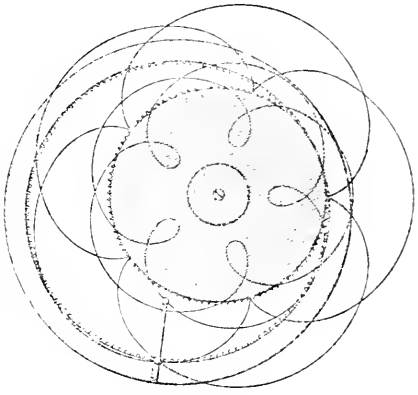
Les *quatre modèles du premier groupe* montrent les doubles générations des épitrochoïdes et hypotrochoïdes (mod. 1-4).

Le premier modèle donne les trois sortes d'épitrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre ; le deuxième la même épitrochoïde allongée comme au premier mais à centre couvert, et une épitrochoïde ordinaire complètement différente. On

PREMIER GROUPE

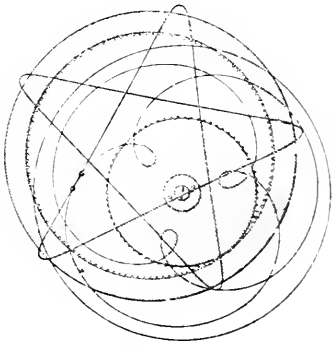


Modèle 1.



Modèle 2.

Modèle 3.



Modèle 4.

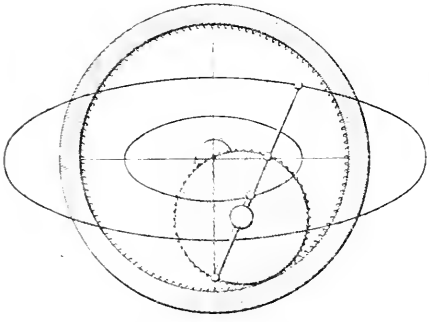
remarquera, dans les deux modèles, les positions relatives de la trochoïde ordinaire et de la trochoïde allongée.

Les deux modèles suivants nous montrent de la même façon, les trois sortes d'hypotrochoïdes : allongée, raccourcie et ordinaire, à centre libre (mod. 3) et à centre couvert (mod. 4). Tandis qu'un point du système mobile décrit une trochoïde dans

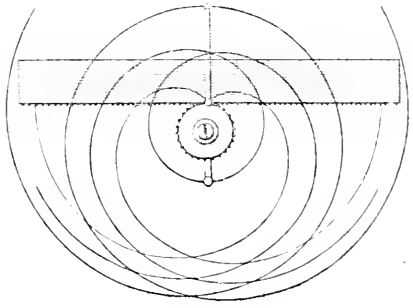
le système solide, réciproquement un point du système solide décrit également une trochoïde dans le système mobile. C'est ainsi que dans le modèle 4, un point du système fixe décrit une épitrochoïde à centre couvert, tandis qu'un point du système mobile, décrit une hypotrochoïde qui est d'ailleurs la même que l'hypotrochoïde raccourcie représentée sur le modèle 3 ; d'autre part les positions initiales des deux points décrivants coïncident.

Comme on peut s'en rendre compte d'après les figures ces modèles consistent en deux cercles représentés par des disques

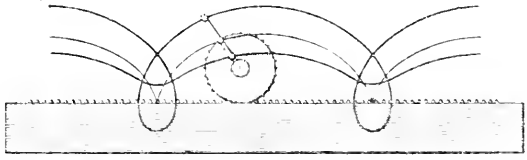
DEUXIÈME GROUPE



Modèle 5.



Modèle 6.



Modèle 7.

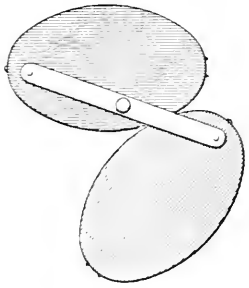
ou des anneaux de métal (feuilles de zinc) qui sont assujettis à rouler l'un sur l'autre au moyen d'un système d'engrenages. On dirige le cercle mobile sur le cercle fixe à l'aide d'une manivelle fixée sur le côté postérieur. Les courbes sont marquées sur un disque de verre ; les points décrivants sont représentés par des petites boules.

Le *deuxième groupe* donne avec ses trois modèles les cas spéciaux des courbes cycloïdales (mod. 5, 6 et 7). Le premier modèle

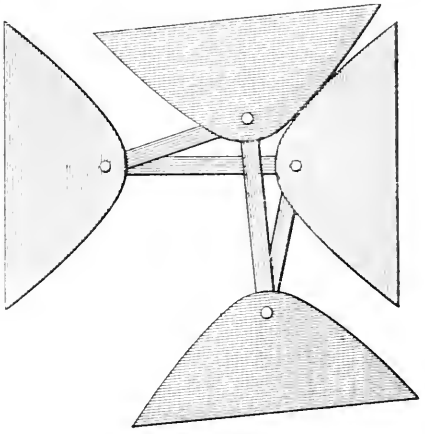
montre les générations d'ellipses et de droites, par roulement d'un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double (Th. 7), en même temps il permet de vérifier le fait que si une droite se meut, de telle sorte que ses extrémités glissent sur deux droites qui se coupent, tout point lié invariablement à cette droite décrit une ellipse ou une double droite.

Les deux autres modèles représentent les générations des développantes de cercles et des cycloïdes allongées, ordinaires

TROISIÈME GROUPE



Modèle 8.



Modèle 9.

et raccourcies par roulement d'une droite sur un cercle et d'un cercle sur une droite (1).

La construction de ces modèles est absolument analogue à celle des précédents. Pour rendre possible le roulement de la droite sur le disque circulaire dans le modèle 6, l'extrémité de la manivelle aboutit à un curseur qui glisse sur le côté infé-

(1) Par analogie, nous appellerons développante de cercle allongée, raccourcie, ou ordinaire, la courbe décrite par un point invariablement lié à une droite qui roule sur un cercle suivant que ce point sera du même côté de la droite que le centre du cercle mobile, de l'autre côté ou sur la droite même.

De même la cycloïde sera dite allongée, raccourcie ou ordinaire selon que le point décrivant, sera à l'extérieur, à l'intérieur, ou sur la circonférence du cercle mobile.

(Il faut pourtant remarquer que la courbe décrite par un point de la droite est seule une véritable développante de cercle ; les deux autres courbes ne répondant nullement à la définition de la développante.) — Note du trad.

rieur de la droite ; dans le modèle de la cycloïde on remplace généralement la manivelle par un dispositif, qui peut passer sous la droite.

Les deux modèles du *troisième groupe* concernent les manivelles antiparallèles à rotations de même sens et à rotations contraires, avec leurs trajectoires polaires (mod. 8 et 9).

Elles consistent en un contre-parallélogramme articulé KLMN (fig. 8) dont les côtés sont égaux deux à deux. Suivant que l'on

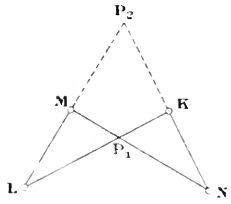


Fig. 8.

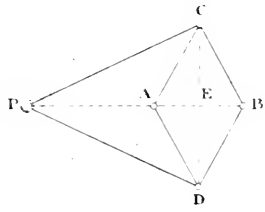


Fig. 9.

fixe, un des petits côtés ou un des grands, les deux côtés adjacents au côté fixe, « les manivelles » peuvent tourner dans le même sens ou en sens contraire. Les trajectoires polaires roulant l'une sur l'autre pendant le mouvement sont deux ellipses congruentes (ou deux hyperboles), lieux des points d'intersection P_1 (ou P_2) des manivelles dans le système fixe et dans la figure liée au côté opposé, qu'on nomme le « lien » [1].

La disposition générale des modèles est suffisamment visible dans les figures. On produit le roulement dans le premier modèle en agissant sur un petit bouton que l'on voit sur une des manivelles, dans le second au moyen d'une manivelle placée à l'envers du modèle. On a d'ailleurs ajouté des dents d'engrenage, pour faciliter le passage des points d'inversion au moment où le contre-parallélogramme se changerait en parallélogramme (les quatre côtés tombent alors en ligne droite).

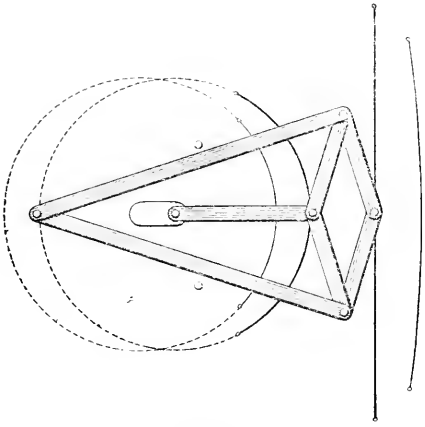
Enfin le *quatrième groupe* contient les inverseurs de Peaucellier, de Hart et de Sylvester-Kempe, appareils pour effectuer les transformations par rayons réciproques (mod. 10, 11 et 12).

---

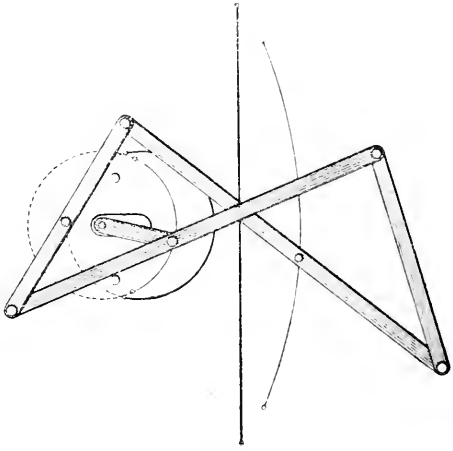
[1] Voir : Burmester, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 302 et suiv. et Reuleaux, *Theoretische Kinematik* (Braunschweig, 1875), p. 187 et suiv., traduction française par A. Debitze. Paris, 1877, p. 308 et suiv.

Ces trois inverseurs ont entre eux des rapports étroits, qui ne sont pas assez connus ; je voudrais les indiquer en quelques mots et rappeler en même temps sur quelle base mathématique reposent ces appareils.

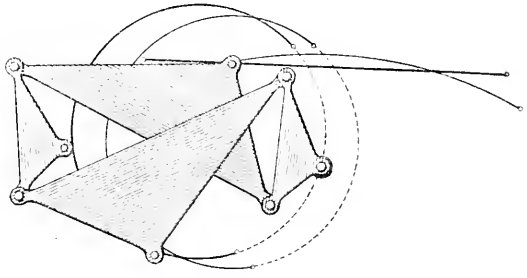
QUATRIÈME GROUPE



Modèle 10.



Modèle 11.



Modèle 12.

Commençons par l'inverseur Peaucellier, découvert le premier (1864). Ce système articulé se compose d'un rhombe ABCD, et de deux tiges égales PC et PD, qui se joignent en P et aboutissent à deux sommets opposés du rhombe (fig. 9).

---

(1) Voir : Burmester, *Lehrbuch der Kinematik*, p. 564 et suiv.; Kempe, *How to draw a straight line*. London, 1877 ; Neuberg, *Systèmes de tiges articulées*. Liège, 1886.

Quelle que soit la déformation on a :

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{AC}^2,$$

Les points A *et* B *sont deux points correspondants d'une transformation par rayons réciproques, de centre* P *et de puissance* $\overline{PC}^2 - \overline{AC}^2$.

L'inverseur de Hart (1874) consiste en un contre-parallélogramme articulé KLMN (KL = MN, KN = LM) (fig. 10). La droite idéale QT, menée parallèlement à KM, coupe les tiges

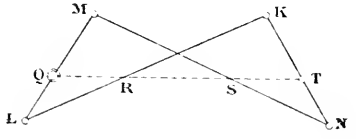


Fig. 10.

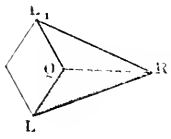


Fig. 11 *a*.

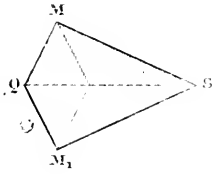


Fig. 11 *b*.

en des points Q, R, S, T. Si l'on construit les symétriques des triangles LQR et MQS par rapport à la droite QT, on a les figures $LQRL_1$ et $MQSM_1$ (fig. 11 *a* et 11 *b*) qui représentent les parties CAPD et CBPD de l'inverseur Peaucellier.

Comme dans ce dernier $\overline{QR}.\overline{QS}$ est constant, il est égal ici à

$$\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2, \quad \frac{\overline{MS}.\overline{SN}}{\overline{MN}^2}.$$

Les points R *et* S *correspondent dans une transformation par rayons réciproques dont le centre est* Q *et dont la puissance est la constante indiquée.*

L'inverseur de Sylvester-Kempe (1875) n'est qu'une généralisation du précédent : il se compose de quatre triangles semblables dont quatre côtés analogues forment le parallélogramme KLMN (fig. 12).

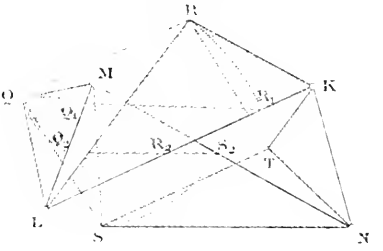


Fig. 12.

On peut amener la droite idéale QR, dans la position $Q_1R_1 \parallel MK$, en faisant tourner les points Q et R d'angles

égaux $\widehat{QLM}$, $\widehat{RLK}$, autour de L; de même on amènera la droite QS en $Q_2S_2 \parallel MK$ en faisant tourner Q et S d'angles égaux $\widehat{QML}$, $\widehat{SMN}$ autour de M. Il s'ensuit que non seulement l'angle $\widehat{RQS}$ reste constant, mais que l'on a aussi $QR.QS = Q_1R_1.Q_2S_2$, de même que $Q_2R_2.Q_2S_2$ est constant et encore égal à

$$\left(\overline{MN}^2 - \overline{ML}^2\right) \frac{MS.\ SN}{\overline{MN}^2}.$$ (1)

Pendant la déformation du système articulé, les quatre points Q, R, S, T *forment donc un parallélogramme dont les angles sont constants, et dont l'aire est constante.*

Si l'on fixe le point Q, *les points* R *et* S *donnent deux points correspondants d'une transformation ordinaire par rayons réciproques dont le centre est* Q *et dont la puissance est égale à la constante indiquée plus haut, qui suppose que l'un des points* R *ou* S, *a tourné d'un angle* $\widehat{RQS}$, *autour de* Q *dans un sens convenablement choisi.*

Ces trois modèles sont construits comme les précédents, complètement en métal. A l'un des points choisis pour la transformation, on a fixé un bras de manivelle dont la rotation est assurée, même dans les deux positions limites par un dispositif spécial placé sur la face inférieure du modèle. Quand on fera tourner la manivelle, le premier point suivra soit un arc de cercle dont le centre est le centre fixe de la transformation, soit un autre arc de cercle coupant le premier, le point correspondant décrira alors soit une droite, soit un arc de cercle. Ces diverses courbes se dessinent sur la planche qui porte l'appareil.

Fr. Schilling (Gœttingue).

Traduit de l'allemand par H. Duaime.

(1) Comparer à l'inverseur de Hart.

LE DROIT

DES

ÉCOLES TECHNIQUES SUPÉRIEURES

A LA PROMOTION AU GRADE DE DOCTEUR

Depuis que les écoles techniques de l'Allemagne et de l'Autriche ont été élevées au rang d'écoles techniques supérieures et que par ce fait elles se trouvent assimilées aux facultés, les cercles techniques ont cherché à leur faire accorder le droit de délivrer des titres académiques. Cette démarche devient d'autant plus fondée, que les branches d'enseignement technique prennent de plus en plus le caractère de sciences pures en s'éloignant toujours davantage de l'empirisme seul sur lequel elles se basaient autrefois.

A l'état actuel de la science technique, étant donné le maintien rigoureux des cours scientifiques dans les écoles techniques supérieures, il ne vient plus à l'esprit de tout homme raisonnable de leur contester le droit de faire une distinction parmi les élèves qui ont achevé leurs études, en délivrant un titre à ceux qui font preuve d'une certaine culture scientifique. Les motifs qui ont poussé les cercles intéressés à travailler sans relâche à la conquête de ce droit reposent, d'une part, sur ce qu'il ne s'agit pas d'un simple titre à délivrer aux techniciens, mais plutôt de la position sociale de ces derniers, et, d'autre part, sur l'équivalence des écoles techniques supérieures et des facultés.

Ces efforts ne sont nullement restés sans réagir fortement sur les esprits. De vives discussions s'engagèrent de tous côtés sur la question de savoir, qu'elle était la situation réciproque des deux établissements supérieurs, si l'instruction fournie par les

écoles techniques supérieures était équivalente à celle que donnent les facultés, oui ou non, et par conséquent, si le désir ardent exprimé partout de voir concéder aux écoles supérieures techniques le droit d'accorder le titre de docteur était réellement fondé. Ces discussions ont sans nul doute bien contribué à avancer la question. Dans les cercles universitaires on a fini par reconnaître que, de nos jours, les facultés ne forment plus une « *universitas litterarum* », puisqu'elles ne comprennent pas l'ensemble des matières qui font partie de la culture moderne.

Par contre la plupart des professeurs des facultés refusent d'admettre dans les programmes les branches d'enseignement de la technique moderne ; ils estiment que ces branches sont incompatibles avec le caractère des facultés et qu'elles ne sont pas propres à fournir une culture scientifique. Quelques-uns toutefois, envisageant la question au point de vue des intérêts de l'université même, conseillent à celle-ci de ne pas se désintéresser des sciences d'applications et de se rapprocher des écoles techniques supérieures. Ces voix, encore peu écoutées il est vrai, sont pourtant inspirées par la grande et juste pensée, que l'ensemble du savoir et pouvoir humain ne forme qu'un tout, qu'il serait mauvais de séparer la théorie de la pratique — comme l'huile se sépare de l'eau — qu'il en résulterait de grands inconvénients pour les deux parties.

Ces discussions ont pu convaincre les écoles techniques que leur développement ultérieur ne pourrait se réaliser que par des recherches scientifiques continuelles, même si le haut degré de perfection qu'elles ont atteint ne devait être qu'une étape passagère. Que l'on soit finalement arrivé à cette conviction n'est que le résultat heureux des discussions engagées; mais, jusqu'à ce jour elles ne sont pas encore parvenues à faire disparaître les divergences.

Ainsi ces dernières années, à maintes occasions, mais surtout dans les discours prononcés par quelques recteurs à l'occasion de l'ouverture de l'année, ainsi que cela se fait en Allemagne comme en Autriche, on a essayé de prouver que les facultés étaient les seules institutions où l'on poursuit réellement les recherches scientifiques et que le titre de docteur ne devait appartenir qu'aux candidats ayant terminé leurs études dans les

facultés. C'est à tort que les sciences pures sont souvent mises en opposition avec leurs applications ; au lieu de voir dans l'application des sciences aux grands problèmes de la culture moderne leur état le plus florissant, on a au contraire la tendance à donner aux applications de la science un caractère d'infériorité. En partant du point de vue que les recherches scientifiques ne devaient pas se laisser influencer par la préoccupation des applications pratiques, on a été jusqu'à dire qu'il n'existait de science réelle que là où toute considération sur la possibilité d'une application directe était éludée.

En interprétant cette manière de voir on a prétendu que les facultés n'avaient pour but que les études purement scientifiques, tandis que les écoles techniques supérieures n'étaient que des écoles spéciales dont la principale tâche était de préparer ses élèves pour les carrières pratiques. Rien n'est plus faux qu'une pareille antithèse.

Ainsi la faculté de médecine n'enseigne-t-elle la science que pour la science elle-même sans avoir égard à son emploi pratique? N'est-elle pas plutôt une école spéciale dans le vrai sens du mot, et ne prépare-t-elle pas au contraire les jeunes gens pour un état pratique très important? Elle perdrait, à coup sûr, sa haute importance pour la société et pour l'État, si elle se bornait à la théorie pure et simple en perdant de vue les besoins de la pratique. N'en est-il pas de même de la faculté de droit dont le but est de fournir à l'État les organes et les fonctionnaires indispensables pour exercer la justice et l'administration ?

L'école supérieure, dans le sens le plus élevé du mot, n'a pas pour caractéristique la négation complète des applications, ni l'omission totale de ses devoirs vis-à-vis de la société ; son but au contraire est de développer le travail sur une base scientifique, de le perfectionner constamment en cherchant à étendre cette base. Si l'on part de ce principe on ne peut plus établir une différence entre le but et la tâche des écoles techniques supérieures et des universités. Il est évident que les branches qui se rattachent aux sciences exactes reposent sur une base scientifique plus profonde que bien des branches enseignées dans la faculté de médecine.

Dans un récent discours on a même défini la différence entre

les facultés et l'école technique supérieure, et l'on établit l'infériorité de cette dernière en disant que les facultés ne préparaient les jeunes gens que pour les carrières qui s'occupent uniquement de la vie spirituelle de l'humanité, tandis que la technique se borne à enseigner comment on utilise les forces de la nature inanimée. Quelle étroitesse de vue pour établir une telle distinction !

Il va de soi qu'avec de parcils raisonnements on arrivait à conclure que les écoles techniques n'avaient pas le droit de conférer le titre de docteur, étant donné que leurs élèves une fois les études terminées, ne devaient pas aspirer au même rang que ceux qui, jusqu'à nos jours, avaient porté ce titre. Par contre on admettait généralement comme bien fondées les démarches des techniciens pour obtenir un titre reconnu et garanti officiellement, et équivalent comme droit au doctorat. Dans ce but on propose les titres d'*ingénieur* et d'*architecte*. Contre le choix de ces titres on peut objecter, qu'ils ne possèdent pas comme le doctorat une signification indépendante et par conséquent idéale, mais, qu'au contraire, ils désignent, d'après l'usage qui s'est implanté à la longue, des professions bien déterminées.

Dans les cercles techniques, dans leur majorité même, on aspire au grade de docteur ; on le demande pour les techniciens possédant une instruction académique, dans toute l'étendue de la signification actuelle du mot. Les représentants des facultés voient dans cette extension du doctorat un amoindrissement réel de la valeur du titre : ils cherchent à conserver à leurs établissements le droit exclusif de délivrer ce grade.

La solution de cette question en litige aurait pu se faire attendre encore longtemps si elle n'avait été définitivement tranchée, tout récemment, pour un État, grâce à l'intervention de l'autorité supérieure. Il est permis de croire que le reste de l'Allemagne et l'Autriche ne tarderont pas à marcher dans la même voie.

Ce fut à l'occasion de la célébration du jubilé de l'École technique supérieure à Charlottenbourg, en octobre 1899, que Sa Majesté l'Empereur d'Allemagne fit lire en sa présence l'acte solennel par lequel il concède aux écoles techniques supérieures de la Prusse le droit de conférer le grade de docteur. Le décret est ainsi conçu :

« En reconnaissance de l'importance scientifique qu'ont pris « les écoles techniques supérieures dans l'accomplissement de « leurs devoirs pratiques, il leur est accordé le droit : 1° de « délivrer après examen préalable, le grade d'*Ingénieur diplômé* « (Dipl. = Ing.) ; 2° de promouvoir les ingénieurs diplômés au « grade de *Docteur-Ingénieur* (Dr. = Ing.) après avoir fait subir « un nouvel examen, et 3° de conférer le titre de Docteur-Ingé- « nieur (*honoris causa*) comme une rare distinction à des hommes « qui se sont acquis de grands mérites en contribuant aux pro- « grès des sciences techniques... »

Cet acte mémorable met en évidence l'intention de l'auteur de faire concéder au technicien le titre de docteur pour ses *capacités scientifiques*. S'il est appliqué dans cet esprit, le droit de promotion au doctorat exercera une influence bienfaisante sur les écoles techniques supérieures elles-mêmes, ainsi que sur la position sociale des techniciens. D'autre part les facultés ne pourront plus refuser leur estime à un doctorat acquis sous de telles réserves : elles finiront certainement par reconnaître comme justifiée cette extension du droit de promotion au doctorat.

Dans les écoles techniques supérieures de l'Allemagne, comme dans celles de l'Autriche, il existe des *examens d'État* et des *examens de diplômes*. En principe les deux examens tendent vers le même but, mais dans une mesure différente. Ces examens doivent prouver que le candidat est en possession des connaissances et de la pratique, pour autant que l'école peut fournir cette dernière, qui lui sera indispensable pour la carrière qu'il embrasse. La considération de la pratique a joué un rôle important dans la détermination des conditions des examens. Ceux-ci comprennent un ensemble très complet de branches théoriques et pratiques ; ils exigent de la part du candidat un effort très sérieux. Cependant il est évident qu'on ne peut lui demander d'avoir approfondi la science dans une direction déterminée. C'est ce qui se présente par exemple pour les examens d'État que l'on fait subir aux étudiants en droit, ou aux candidats en médecine.

En Autriche il existe des examens conduisant au titre d'*Ingénieur-diplômé* (ou de chimiste-diplômé) ; dans certains cas ce titre est reconnu équivalent au doctorat, par exemple, s'il s'agit

de l'admission dans le corps enseignant d'une école technique supérieure. Bien qu'il existe depuis longtemps, ce diplôme n'a pas pris l'importance qu'on espérait lui donner ; cela résulte sans doute des grandes difficultés que présentent les examens. Il n'y a que peu de candidats qui se décident à se soumettre à cette série d'épreuves.

Il arrive même souvent que, faute d'ingénieurs diplômés, on doit renoncer à exiger le diplôme pour l'agrégation dans les écoles supérieures. D'autre part on conçoit facilement que celui qui désire approfondir une branche spéciale ne se soumettra que difficilement à un examen s'étendant sur un grand nombre de branches qui le détournent plutôt du but qu'il s'est proposé. On aura donc réalisé un grand progrès si, ainsi qu'il en est question en Autriche, on modifie l'organisation des examens dans le sens proposé, à savoir : contrôler d'une part, par un examen d'État, les connaissances nécessaires à l'exercice pratique de la carrière, et réserver, d'autre part, pour les examens du diplôme, l'instruction scientifique plus approfondie mais dans un cercle plus restreint qu'on laisserait au choix du candidat. De cette manière on aurait établi les conditions préliminaires donnant aux écoles techniques supérieures de l'Autriche le droit de délivrer le doctorat aux candidats ayant dépassé la limite des connaissances indispensables à la carrière pratique et ayant prouvé qu'ils sont capables d'aborder des recherches scientifiques plus approfondies et de traiter dans un esprit méthodique et critique des problèmes scientifiques d'une certaine difficulté.

C'est avec plaisir que l'on constate que les fêtes de Charlottenbourg ont fait faire un pas important à une question soulevée depuis longtemps, d'abord dans les cercles techniques de l'Autriche, puis dans ceux de l'Allemagne.

Nous terminons en exprimant le vœu que la marche progressive vers la solution de cette question parvienne à faire disparaître les rivalités qui existent encore entre les universités et les écoles techniques supérieures. On finira certainement par comprendre qu'entre les deux plus hautes écoles de l'État qui, en définitive, poursuivent le même but, il ne doit exister aucun sentiment d'hostilité, mais au contraire un esprit de solidarité complète.

E. Czuber (Vienne).

CHRONIQUE

Congrès de Munich ; septembre 1899.

La réunion annuelle des mathématiciens allemands, tenue à Munich en septembre 1899, a été particulièrement brillante grâce au grand nombre de travaux qui y ont été présentés. L'espace restreint qui nous est offert ne nous permet pas de donner un résumé des sept séances sur lesquelles ont été répartis les divers travaux. Nous devons nous borner à rendre compte des questions qui rentrent dans le cadre de la Revue.

A ce point de vue, une séance particulièrement intéressante est celle qui a été consacrée à la question de la *décimalisation des mesures du temps et de l'angle ;* elle était présidée par M. F. Klein. En ouvrant la séance, le savant professeur rappelle d'abord que l'« Association des mathématiciens allemands », dans sa réunion de Düsseldorf, a nommé une commission pour étudier cette question ; étant donné que cette même question figurera également à l'ordre du jour de divers Congrès internationaux qui se réuniront à Paris en 1900, il serait bon que tous ceux qui ont une opinion à émettre le fissent dès maintenant.

Il a été présenté trois rapports rédigés l'un par un mathématicien, l'autre par un astronome, et le troisième par un professeur appartenant à l'enseignement secondaire supérieur.

Le premier rapporteur, un mathématicien, M. Mehmke, de Stuttgart, annonce que la commission a écarté d'emblée, comme irréalisable actuellement, la décimalisation du temps, et ne s'est occupée que de la question de l'angle. M. Mehmke fait l'historique de la question et se prononce pour la division centésimale du quadrant. En effet, dit-il, la pratique a consacré, et à bon droit, l'angle droit comme unité ; il faut maintenir cette tradition ; la mesure de l'angle par son arc, très commode pour la théorie, donne presque toujours un nombre irrationnel. La division sexagésimale des Babyloniens s'est justifiée tant que la base de la numération a été le nombre 12 ; mais depuis l'adoption universelle de la numération décimale, le système actuel est absolument suranné ; d'ailleurs, il est très incommode pour le calcul.

Il faut donc diviser le quadrant en 100 « degrés », ceux-ci en 100 « minutes », etc.; on pourra objecter, à la vérité, que quelques

angles, 15°, 30°, 60° entre autres ne seront pas faciles à écrire ; doit-on abandonner le système décimal de la mesure des longueurs sous prétexte que 1/3 de mètre ne fait pas un nombre rond de centimètres ?

Le deuxième rapporteur, M. Bauschinger, de Berlin, astronome, défend le système actuel ; les marins seuls auraient avantage à la décimalisation des mesures d'angle ; les astronomes, par contre, auraient tout à perdre. Les observations accumulées depuis tant d'années seraient à recalculer entièrement ; les appareils actuellement en usage, bien connus, ne pourraient plus servir qu'au prix de calculs sans fin pour la réduction de leurs lectures. Les calculs de transformation des angles en temps, si fréquents dans les observatoires, seraient rendus plus compliqués ; on perdrait le bénéfice des nombreux diviseurs que possède 360.

En outre, il ne faut pas perdre de vue qu'un système universellement adopté, comme celui de la circonférence de 360°, est infiniment préférable, malgré ses quelques petits défauts, à un système nouveau qui risquerait de ne pas être appliqué par tout le monde.

Le troisième rapporteur, M. Schülke, d'Osterode, se place au point de vue de l'enseignement secondaire ; il faut simplifier autant que possible ; le surmenage provenant de l'introduction incessante de nouveaux sujets d'étude sera moins à craindre si d'un autre côté on décharge les élèves de calculs sans grande utilité, se faisant mécaniquement. Le nombre est très faible, d'ailleurs, de ceux qui une fois sortis de l'école, auront à faire beaucoup de calculs sur les angles ; enseignons donc les procédés les plus simples. Gardons le quadrant de 90°, mais donnons au degré des sous-multiples décimaux. Beaucoup de mesures, d'ailleurs, se font déjà en degrés et dixièmes. Les tables de Gauss et de Bremiker qui existent avec la division centésimale, et qui se vendent, prouvent que l'adoption de la mesure proposée ne souffrirait pas de difficultés.

La discussion ouverte sur ces rapports, à laquelle prennent part des astronomes, des géodésiens et des physiciens, montre que c'est l'opinion de M. Schülke qui semble prévaloir. M. Mehmke, entre autres, ajoute que les astronomes pourraient facilement passer des anciennes mesures aux nouvelles, au moyen de machines à calculer spéciales. L'assemblée décide à l'unanimité de transmettre le procès-verbal des débats au Comité de l' « Association des mathématiciens allemands », en priant ce dernier d'adresser dans le plus bref délai un rapport au Chancelier de l'Empire. Les délégués officiels de l'Allemagne aux Congrès internationaux de 1900 auraient de cette façon un mandat bien déterminé.

L'une des séances communes aux sections 1 (mathématiques et astronomie) et 17 (Enseignement des sciences mathématiques et naturelles) a eu pour objet l'examen de la question suivante : « *De quelle façon faut-il organiser l'enseignement des mathématiques dans les universités pour tenir compte du nouveau programme prussien des examens de capacité pour l'enseignement des Mathématiques et de la Physique ?* » Les

lecteurs de la Revue connaissent ce programme : ils savent qu'il se distingue du précédent par l'introduction d'un certificat de capacité pour l'enseignement des Mathématiques appliquées. Les examens de ce nouveau diplôme comprennent outre les Mathématiques pures, la Géométrie descriptive, la Mécanique technique, la Statique graphique et la Géodésie.

Le premier rapporteur, M. Weber, professeur à l'université de Strasbourg, dit que la question a une portée générale, bien que le programme ne s'applique pour le moment qu'à l'Allemagne du Nord. Jusqu'à présent, les quatre branches nouvelles n'étaient enseignées d'une façon systématique que dans les écoles techniques supérieures : les universités doivent maintenant se préoccuper de les enseigner aussi, sous peine de voir les candidats à l'enseignement moyen les déserter. Faut-il pour cela créer une faculté technique ? L'orateur ne le pense pas ; il suffit de développer la faculté des sciences du côté de l'enseignement technique. Il résume ses idées dans les cinq propositions suivantes qui ont été adoptées après une discussion très nourrie : 1) L'enseignement des Mathématiques appliquées doit être relié aussi étroitement que possible à l'enseignement purement théorique ; 2) les universités doivent donner aux étudiants l'occasion de s'exercer dans les quatre branches indiquées ; 3) les écoles techniques sont invitées à coopérer à la tâche ; 4) le plan d'études universitaires doit tenir compte du nouveau programme ; 5) l'examen de Mathématiques appliquées doit être dirigé par l'un des professeurs chargés de cet enseignement.

Après l'exposé général de M. Weber, le second rapporteur, M. Hauck, professeur à l'école technique de Berlin, examine la question séparément pour les diverses branches ; il indique dans quelle mesure il serait possible de tenir compte des applications techniques. Il insiste d'autre part sur les obligations nouvelles qui en résultent pour les universités ; celles-ci se trouvent forcées de s'adjoindre de nouveaux professeurs et d'augmenter leurs collections des modèles et des instruments destinés aux travaux pratiques.

A cette même question se rattachent encore les communications de M. Schotten, de Halle, « sur l'enseignement dans les gymnases d'après le nouveau programme », et de M. Rudel, de Nüremberg, « sur le nouveau programme bavarois relatif aux examens du certificat de capacité pour l'enseignement des Mathématiques et de la Physique.

Le 25e anniversaire de M. A. Vassilief.

Dans le courant du mois de décembre dernier, la Société physico-mathématique de Kasan a célébré le 25e anniversaire de l'entrée de son président M. le professeur A. Vassilief dans la carrière scientifique.

---

(1) Voir *l'Ens. math.*, 1re année, p. 60, 1889.

C'est en effet en 1874 que M. Vassilief a commencé ses cours à la faculté physico-mathématique de Kasan. Depuis lors, et notamment depuis qu'en 1884 il est devenu président de la Société physico-mathématique, il a su conquérir, aussi bien parmi ses élèves que parmi ses collègues l'autorité et la sympathie que lui méritent son savoir et l'élévation de son caractère. *L'Enseignement Mathématique* n'a pu s'associer que de loin, et du fond du cœur, à cette fête universitaire, sur laquelle nous nous réservons de revenir au besoin. Nous ne pouvons oublier que l'éminent professeur a bien voulu, dès la fondation de cette Revue, consentir à faire partie de notre comité de patronage ; c'est un honneur pour nous, et un motif de plus pour nous joindre à la Société physico-mathématique de Kasan dans la manifestation scientifique que nous venons d'indiquer.

M. Vaschy.

Le 25 novembre 1899, est décédé un mathématicien français de grande valeur, âgé de 42 ans, M. Vaschy, ingénieur des Télégraphes, et naguère encore examinateur d'admission à l'École polytechnique. C'était surtout vers la Mécanique et la Physique mathématique que s'étaient dirigés les efforts de son esprit de recherche. On lui doit de remarquables travaux, notamment, sur la théorie de l'électricité, dans laquelle il a introduit des vues nouvelles, d'une originalité et d'une profondeur remarquables. Sa puissance de travail était considérable ; malheureusement, sa volonté, plus grande encore, a dépassé les limites de ses forces physiques ; terrassé depuis plus d'un an par une maladie cruelle, on peut dire qu'il est mort victime de l'excès du travail intellectuel. C'est une grande perte pour la science française, et nous nous associons aux regrets que laisse si justement derrière lui l'homme et le savant.

Bibliotheca Mathematica.

Ce n'est guère que depuis une trentaine d'années que l'on accorde à l'Histoire des Mathématiques l'importance qu'elle mérite. A cet effet l'œuvre magistrale de M. Moritz-Cantor a exercé une influence incontestable ; elle a largement contribué à éveiller la curiosité des mathématiciens pour les questions historiques. De nos jours la plupart des nations possèdent des savants qui se vouent particulièrement aux recherches historiques. D'autre part, beaucoup d'ouvrages récents, même de simples manuels, sont accompagnés de notes relatives au développement historique du sujet traité.

Cet intérêt bien justifié que l'on témoigne aujourd'hui à l'histoire de la science a engagé M. Enestrœm a agrandir le journal d'Histoire des Mathématiques qu'il fonda, il y a 13 ans, sous le titre de *Bibliotheca Mathematica*. Limitée jusqu'ici à 8 feuilles par an, cette revue comprendra désormais 35 feuilles, grâce à l'arrangement intervenu entre le

savant professeur de Stockholm et le nouvel éditeur M. B.-G. Teubner à Leipzig. Elle se propose, comme par le passé, d'encourager et de publier les recherches dans le domaine indiqué ; quant à l'histoire contemporaine, elle apportera une attention particulière aux biographies détaillées d'éminents mathématiciens, physiciens et astronomes.

Dans chaque numéro un certain nombre de pages seront consacrées à une chronique donnant des renseignements sur l'activité scientifique actuelle et sur les questions dont l'étude offre un intérêt général pour les mathématiques et les mathématiciens.

En outre, le journal contiendra des listes de publications récentes et des analyses des plus importantes d'entre elles.

Cette heureuse transformation rencontrera certainement un accueil très favorable chez tous les mathématiciens.

Un nouveau journal mathématique.

Bien que les mathématiciens des États-Unis possèdent déjà plusieurs excellentes publications périodiques, la nécessité d'un nouveau recueil s'était déjà fait sentir depuis plusieurs années. C'est pour répondre à ce besoin que l'*American Mathematical Society* vient de fonder une revue trimestrielle intitulée The Transactions of the American Mathematical Society (1) et dont le premier numéro a dû paraître le 1er janvier 1900. La société s'est assuré le concours d'un grand nombre de collèges et d'universités. Elle a confié la direction de la revue à MM. E.-H. Moore (University of Chicago), E.-W. Brown (Haverford College) et T.-S. Fiske (Columbia University, New-York).

Les Transactions seront consacrées exclusivement aux mathématiques pures et appliquées, tandis que le *Bulletin of the American mathematical society*, fondé il y a plus de huit ans, restera, comme par le passé, une revue historique et critique.

Congrès international de Philosophie, de 1900.

Ce Congrès aura lieu à Paris du 2 au 7 août. Il comprendra quatre sections, dont l'une, la section 2, consacrée à la *Logique et à l'Histoire des sciences*, intéressera tout particulièrement les mathématiciens. Nous reproduisons ici la liste provisoire des questions qui figurent à l'ordre du jour des séances de cette section :

I

1° Algèbre de la logique et calcul des probabilités. — Théorie des ensembles ; théories des chaînes ; théorie des groupes. — Le transfini.

(1) Les demandes d'abonnement doivent être adressées au siège de la Société, à New-York, 501 West, 116th Street. Prix d'abonnement annuel, 25 francs.

2° Principes de l'analyse : le nombre ; le continu ; théorie des fonctions.

3° Les postulats de la géométrie ; leur origine et leur valeur. — L'intuition en mathématique. — Géométries non-euclidiennes.

4° Méthodes de la géométrie ; géométrie analytique ; géométrie projective ; calcul géométrique (les Quartenions).

5° Principes de la mécanique, leur nature et leur valeur.

6° Méthodes de la physique mathématique ; théorie des erreurs et des approximations.

7° Hypothèses générales de la physique : la théorie mécanique et l'énergétique.

8° Hypothèses de la chimie ; constitution de la matière. — La théorie atomique ; stéréochimie.

9° Le problème de l'origine de la vie.

10° Théories de l'évolution des espèces ; transformisme ; hérédité.

II

1° Les origines du calcul infinitésimal.

2° La genèse de la notion d'imaginaire et l'élucidation progressive de la théorie des fonctions.

3° Histoire de la découverte de la gravitation newtonienne et de son influence sur le développement de la mécanique et de la physique.

4° Exposé des nécessités qui ont amené peu à peu à fonder la thermodynamique et, avec elle, toute une partie de la science sur des principes autonomes, principe de la conservation de l'énergie, principe de Carnot-Clausius.

5° Histoire des idées successives de la méthode en biologie.

Le grand intérêt de ces questions empruntées aux domaines les plus divers de la science fait espérer une forte participation des mathématiciens aux travaux de ce congrès qui ne précèdera d'ailleurs que de quelques jours le congrès de mathématiques (6-12 août). Il n'est guère besoin d'insister sur l'importance de cette réunion qui offre aux hommes de science l'occasion de se rencontrer avec les philosophes. Elle contribuera certainement à rendre plus étroite et plus constante l'union de la science et de la philosophie.

Les adhésions au congrès doivent être adressées à M. Xavier Léon, *rue des Mathurins, 39, à Paris*.

CORRESPONDANCE

LETTRE ADRESSÉE A M. H. FEHR

Paris, le 20 décembre 1899.

Monsieur le Directeur,

Dans l'une des brochures (AFAS, Toulouse, 1887) que M. Laisant a bien voulu offrir aux lecteurs de *L'Enseignement Mathématique*, j'ai trouvé le résultat suivant, qu'il me paraît utile de reproduire dégagé de tous calculs et considérations auxiliaires, car je n'en ai pas vu d'aussi simple sur le même sujet dans les publications sur la Géométrie du triangle que j'ai consultées.

« Pour construire les foyers F, F' de l'ellipse de Steiner, *inscrite* au « triangle ABC dont G est le barycentre, formons, sur l'un quelconque « BC des côtés, deux triangles équilatéraux dont A_1 et A_2 sont les « centres. Menons la bissectrice de l'angle A_1GA_2 et portons, de part et « d'autre, sur cette droite, une longueur $GF = — GF'$ égale à la « moyenne proportionnelle de GA_1 et GA_2. »

On sait que les foyers de l'ellipse *circonscrite* de Steiner sont les points anticomplémentaires de F et F'.

L. Ripert.

BIBLIOGRAPHIE

Chr. Beyel. — **Ueber den Unterricht in der darstellenden Geometrie** 1 broch. in-8°, 10 p., extr. de la Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, t. XXX: Teubner, Leipzig, 1899.

Le rôle prépondérant que prend la Géométrie descriptive dans le développement de nos écoles techniques et les transformations de programme qui sont à l'ordre du jour dans les milieux pédagogiques, ont incité M. Beyel à condenser en une dizaine de pages, ses idées et conseils sur la meilleure manière d'enseigner cette importante branche.

Rendons-nous compte, dit-il, des buts de la Géométrie descriptive. Elle doit représenter systématiquement les corps de l'espace. Elle doit initier l'élève aux méthodes de représentation. Elle indique comment ces méthodes peuvent être appliquées à l'industrie. Enfin elle oblige le dessinateur à acquérir une habileté de main, qu'il utilisera lorsqu'il sera devenu technicien. Les jeunes gens ont beaucoup de peine à construire sur le papier les objets que leur œil a distingués. Est-ce une faiblesse atavique, l'esprit humain ayant été depuis des siècles dirigé du côté des calculs ? Est-ce plutôt un manque de concentration d'esprit dû à la multitude d'impressions qu'il reçoit ? L'auteur ne se prononce pas ; mais selon lui on ne peut remédier à cette insuffisance que par une étude systématique des corps. Les élèves devront être guidés par la théorie et conduits insensiblement du simple au compliqué, des exercices aux applications. Cette méthode seule donnera des résultats avantageux ; tout autre procédé empirique, fût-il même plus rapide, doit être impitoyablement rejeté.

L'emploi de la projection centrale devrait, d'après M. Beyel, être banni des cours du technicien futur et être réservé aux normaliens, les déformations que cette méthode impose aux corps étant trop violentes. La perspective et surtout l'axonométrie sont à étudier à fond : l'emploi combiné de cette dernière méthode, avec la projection orthogonale facilitera bien des raisonnements et des constructions.

M. Beyel estime que l'enseignement doit se borner à représenter les surfaces et les corps géométriques ordinaires : polyèdres, surfaces de révolution et surfaces réglées. Le maître chargé de ce cours doit connaître les exigences de la pratique, et entrer fréquemment en contact avec son collègue, chargé des applications techniques.

Sur ce point les avis seront partagés ; que dans un cours universitaire, on traite la Géométrie descriptive comme une science et qu'on l'étudie pour elle-même sans s'occuper de son application, cela rentre dans l'esprit de cette institution ; mais dans une école technique où tout l'enseignement con-

verge vers un seul but, la pratique, il faut qu'il en soit autrement. Il est essentiel de faciliter aux élèves le passage de la théorie à cette pratique, et il est nécessaire d'établir tous les liens qui rattachent l'une à l'autre. Les théories illustrées par des exemples simples tirés de la charpente ou de la coupe des pierres seront ainsi mieux appréciées, et l'élève sera stimulé par le plaisir d'utiliser immédiatement les principes qui lui ont été exposés.

Selon l'auteur, l'exactitude des dessins donne lieu à bien des critiques. Nos étudiants savent résoudre les triangles; ils donneront même les résultats à sept décimales près, mais leurs constructions graphiques offrent peu de précision. C'est au maître à les entraîner soigneusement: il devra avoir à son service un certain nombre de moyens de contrôle qu'il appliquera à leurs épures. La Géométrie projective lui fournira la plupart de ces critères. Il faudra donc qu'il la possède entièrement. De même que ce n'est pas à l'Université qu'on apprend l'orthographe et la grammaire, il nous semble qu'il est un peu tard pour parler d'exactitude dans l'enseignement de la Géométrie descriptive: les élèves qui l'étudient ont déjà pratiqué pendant plusieurs années les constructions graphiques, et sont tenus de manier habilement leurs instruments de dessin. C'est à l'époque de leur initiation à cet art qu'il faudrait leur inculquer de bonnes habitudes. La réforme dont parle M. Beyel doit être introduite dans les études antérieures. Il a été parlé de Géométrie projective; M. Beyel désirerait que certains chapitres, concernant les ponctuelles et les faisceaux projectifs, la conception des pôles et polaires par rapport aux coniques, fussent connues du technicien: elles feraient pendant à l'étude analytique des coniques et faciliteraient bien des constructions.

C'est dans la salle de dessin que le maître jugera les fruits de son enseignement; c'est là qu'il reconnaîtra si la semence qu'il a lancée du haut de sa chaire est tombée dans la bonne terre ou sur un sol pierreux. Dans ses entretiens particuliers avec chaque élève, il se rendra compte de leur talent et appréciera leurs dispositions. Un moyen excellent consiste à orienter différemment les problèmes traités pendant le cours ou soumis aux élèves, ou mieux encore il conviendrait de les laisser choisir les éléments de leurs épures: cela développera chez eux, d'après M. Beyel, un certain sens de l'harmonie, cela les obligera à prévoir de loin les résultats et à éviter certaines coïncidences que l'on a qualifiées de fâcheuses. Tous les élèves n'y excelleront pas, mais il y aura toujours des étudiants qui ne seront pas la joie de leurs professeurs.

Quelques paragraphes sont consacrés à l'emploi des modèles en relief. L'auteur n'est pas partisan des corps en bois; ils appartiennent à un autre genre de dessin, le dessin à main levée ou encore la stéréométrie, tandis que la Géométrie descriptive affranchit l'élève de l'emploi du modèle. Les constructions en fils seraient préférables; elles font saisir facilement la génération de surfaces compliquées et permettent un meilleur aperçu d'ensemble grâce à leur transparence. On peut les faire exécuter par ceux des élèves qui seraient particulièrement habiles de leurs doigts.

Puis plusieurs conseils sont donnés sur l'exécution des dessins qu'il ne faut pas laisser dégénérer en images, sur les conventions de construction et de lettres qui doivent être invariables, et imposées aux élèves une fois pour toutes.

Enfin nous trouvons un certain nombre de remarques à l'adresse des

maîtres de Géométrie descriptive et des étudiants qui se destinent à cette profession. L'Université n'est pas un milieu propice à cette étude ; la Géométrie y est repoussée au second plan par l'Analyse. Ce n'est que dans une école polytechnique que l'on pourra s'en rendre possesseur.

Il faut que la réputation de la Géométrie descriptive s'améliore, et que cette branche des Mathématiques ne soit pas déconsidérée au profit des autres. M. Beyel pense que cet ostracisme est dû à un reste de classicisme grec et qu'il est tout aussi élevé de mettre ses pensées en figures qu'en formules. Nous sommes complètement d'accord, et la philosophie de Bacon est là pour nous soutenir. Si Platon estimait que le but de la Géométrie était d'affiner l'esprit et qu'elle s'était dégradée en passant aux mains des charrons, l'exemple d'Archimède justifie l'application de cette science aux besoins de l'humanité.

La Géométrie descriptive, dit encore M. Beyel, doit être étudiée sur le tard ; que l'on se contente, dans les écoles moyennes, de donner une instruction générale aux élèves et surtout qu'on les fasse beaucoup dessiner ; l'esprit une fois arrivé à maturité saisira rapidement des théories qui plus tôt, eussent été indigestes.

Voilà en quelques mots l'essence de cette brochure ; la lecture en est très instructive et l'on y rencontre des idées que l'on sent vivre au fond de soi-même, sans cependant se les être formulées. Toutes les personnes qui en feront l'étude, trouveront de nombreux motifs d'être reconnaissantes à l'auteur d'avoir bien voulu la publier.

Alph. Bernoud (Genève).

B. Niewenglowski et L. Gérard. — **Cours de Géométrie élémentaire**, à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales, des candidats aux écoles du gouvernement, des candidats à l'agrégation, de l'enseignement moderne et des classes de lettres. — Paris, Georges Carré et C. Naud, 1899.

I. Géométrie dans l'espace (*Mathématiques élémentaires ; enseignement classique*) : 1 vol. in-8° de 495 pages, avec 363 figures ; broché, 4 francs ; cart. à l'anglaise, 5 francs. — II. Géométrie dans l'espace (*enseignement moderne*) : 1 vol. in-8° de 252 pages, 226 figures : broché, 2 fr. 50 ; cart. 3 fr. 25. — III. Géométrie dans l'espace (*classes de lettres*) : 1 vol. in-8° de 128 pages, 96 figures ; broché, 2 francs ; cart., 3 francs.

Ces trois volumes complètent le cours de Géométrie élémentaire dont nous avons précédemment analysé les trois volumes relatifs à la Géométrie plane (1). On y trouve les mêmes préoccupations et les mêmes qualités : développement complet des matières des programmes, clarté de l'exposition, simplification des démonstrations par l'introduction dans tous les éléments mesurables, de la notion du *sens* ou du signe aussitôt que ces éléments apparaissent, en s'appuyant, toutes les fois qu'elle est possible, sur la marche parallèle de l'Algèbre et de la Géométrie ; enfin, exercices nombreux, gradués et accompagnés, quand il y a lieu, d'indications sur la solution.

(1) Voir *Enseignement mathématique*, 1re année, n° 3, p. 224.

Le cours de l'Enseignement classique, qui forme le Traité complet, se divise en quatre livres (V à VIII) et un livre de compléments.

Le livre V, intitulé *Droites et Plans* (10 chapitres), contient toutes les notions concernant ces éléments de premier ordre (angles divers, parallélisme, perpendicularité, projections orthogonales) et se termine par deux chapitres relatifs, l'un au rapport anharmonique d'un faisceau de quatre plans, l'autre à la translation et à la rotation.

Le livre VI (*Polyèdres*, 5 chapitres), après les généralités sur les polyèdres, étudie toutes les questions relatives aux volumes des prismes, pyramides, etc., puis la symétrie, l'homothétie et la similitude.

Dans le livre VII (*Les trois corps ronds*, 8 chapitres), l'on trouve des notions générales sur les surfaces coniques, cylindriques et de révolution, suivies d'une étude aussi complète que possible des trois corps (cylindre, cône, sphère), des relations qu'ils ont entre eux et avec le tétraèdre, du plan radical et du plan polaire. Les deux derniers chapitres sont consacrés, l'un aux systèmes de sphères et à l'inversion, l'autre aux figures tracées sur la sphère.

Avec le livre VIII (*Courbes usuelles*, 5 chapitres), nous revenons à la Géométrie plane ; car, à l'exception du théorème : « La projection orthogonale d'un cercle sur un plan quelconque est une ellipse », que l'on trouve au chapitre I^er^ (ellipse), de la méthode de Dandelin pour l'étude des sections planes du cône de révolution, que présente le chapitre IV (propriétés communes aux trois courbes), enfin du chapitre V (hélice), qui entre dans un ordre d'idées bien différent, la presque totalité du livre trouverait sa place naturelle et logique dans le premier volume ; mais les auteurs ont dû se conformer à l'ordre des programmes.

Les Compléments (6 chapitres) ont une très grande importance. Ils peuvent se diviser en deux parties : 1° les chapitres extrêmes (I et VI), qui appartiennent à la Géométrie dans l'espace, et étudient respectivement le déplacement d'un solide indéformable (y compris le déplacement hélicoïdal, qui fournit une application naturelle de l'étude de l'hélice, et les propriétés générales des polyèdres (théorème d'Euler et ses conséquences, polyèdres réguliers convexes et étoilés, etc.) ; 2° les chapitres II à V (divisions et faisceaux homographiques : — involution ; — homologie, homographie, figures corrélatives ; — propriétés générales des coniques), qui, sauf certaines propriétés de la projection perspective utilisées ça et là [1], appartiennent pleinement à la Géométrie plane. Dans ces chapitres, nous avons vu avec plaisir, et nous nous empressons de le reconnaître, que les lacunes que nous avions signalées au premier volume (Géométrie plane, compléments du livre III) sont entièrement comblées. Mais, bien que la raison soit évidente qui a porté les auteurs à placer, dans l'ordre imposé par les programmes, des théories qui sont surtout nécessaires pour l'étude des coniques rejetée après la Géométrie de l'espace, cet ordre peu logique n'est pas sans incon-

---

[1] L'emploi de considérations *stéréométriques* dans l'enseignement de la Géométrie plane sera bien justifié si la question, actuellement très débattue, de la fusion de la Planimétrie et de la Stéréométrie reçoit une solution favorable ; aujourd'hui, cet emploi nous semble prématuré ; au moins ne devrait-il venir que comme confirmation des considérations *planimétriques*. — Voir, dans *L'Enseignement mathématique*, t. I, l'analyse des Éléments de Géométrie de MM. Lazzeri et Bassani (n° 1, p. 62) et l'article de M. G. Candido (n° 3, p. 204).

vénients : si les lacunes de la Géométrie plane moderne sont comblées, une grande lacune s'ouvre pour la Géométrie de l'espace : il suffit, pour s'en convaincre, de lire le très petit nombre de lignes que les auteurs consacrent (p. 386) à *mentionner* la possibilité d'extension à l'espace de l'homologie, de l'homographie et de la dualité. La théorie générale des coniques est très clairement exposée d'après Chasles : mais aucune mention n'est faite des quadriques. Sans doute, les auteurs ont pour cela une bonne raison : il faut se borner. Mais, entre une théorie complète, qui est ici impossible, et une absence totale d'indications, il y a une large marge : en quelques pages, des notions générales très utiles pourraient être données.

Quatre notes sur la *symétrie*, les *coordonnées tétraédriques*, la *mesure des polyèdres* et le *plus court chemin dans l'espace et sur la sphère* terminent ce volume. Ces notes sont fort intéressantes : celle sur les coordonnées tétraédriques, nécessaire pour l'étude des sphères inscrites à un tétraèdre (liv. VII, ch. v), serait utilement préparée par une note (ou un paragraphe) sur les coordonnées trilinéaires.

Les deux volumes spéciaux à l'enseignement moderne et aux classes de lettres, sont des extraits, conformes aux programmes, du cours de l'enseignement classique.

En résumé, l'ouvrage est excellent : c'est un véritable livre d'enseignement. Selon nous, il laisse deux desiderata, dont le premier n'est imputable qu'aux programmes : nous voudrions voir reporter, à la Géométrie plane, les théories de la Géométrie moderne qui se rattachent à cette partie de l'enseignement, et développer davantage ces théories, dans le second volume, en ce qui concerne la Géométrie de l'espace. L. Ripert (Paris).

Gust. Holzmüller. — **Elemente der Stereometrie** : erster Theil : Die Lehrsätze und Konstruktionen. 1 vol. in-8°, 383 pages, t. IV de la Collection Schubert. Prix : M. 5,40, G. J. Göschen, Leipzig, 1899.

« Le présent ouvrage a pour but de donner une idée générale du domaine de la Géométrie élémentaire de l'espace », dit l'auteur dans son introduction et nous verrons dans la brève analyse ci-dessous comment il a compris son programme, indiqué ainsi d'une manière sommaire. Mais avant d'aborder cette étude, suivons encore l'auteur dans son introduction afin de nous renseigner sur la manière dont il va procéder. Après avoir constaté que les divers traités de Géométrie existants sont, ou bien spéciaux et ne traitant les sujets exposés qu'à un seul point de vue, ou bien très élémentaires et laissant de côté les théories de la Géométrie moderne, M. Holzmüller va s'efforcer de combler ces lacunes et nous offre un traité très intéressant, mais qu'il faut considérer, ainsi qu'il le dit lui-même, « comme un essai méthodique, mais dans aucun cas comme une exposition systématique sans lacunes de la stéréométrie ». Malgré cela l'étude de l'ouvrage de M. Holzmüller est très instructive et elle a l'avantage d'amener très rapidement à des problèmes que l'on n'a pas l'habitude de voir figurer dans des *Eléments*. De nombreuses figures très bien faites aident à la compréhension du texte et, pour les chercheurs, des indications bibliographiques et historiques sur chaque sujet leur fourniront le moyen de se renseigner plus à fond.

Le traité de stéréométrie est partagé en 9 sections ; chacune d'entre elles traite une partie spéciale et dans une première étude plusieurs paragraphes

peuvent être laissés de côté sans nuire en aucune façon à la compréhension de ce qui suit.

Dans la première section, l'auteur expose les théorèmes généraux sur le plan et la droite dans l'espace : les problèmes sur les angles des plans entre eux ou avec des droites sont traités ou esquissés et les constructions fondamentales exposées. Puis l'auteur aborde immédiatement certains problèmes qui mis en regard les uns des autres font voir une « réciprocité » du point et du plan dans l'espace : c'est un premier aperçu d'une théorie féconde dont les résultats se verront dans la suite. L'étude du trièdre termine ce paragraphe.

La deuxième section pourrait sans inconvénient être partagée en deux parties bien distinctes ; la première contient les principes du dessin des corps de l'espace représentés soit par leurs projections orthogonales, soit par leur perspective cavalière. Ce dernier mode est surtout très développé ; il est appliqué à tous les solides réguliers et à un grand nombre de solides semi-réguliers et étoilés. L'étude des formes cristallines et leurs modifications par hémiédrie ou pointage est une application intéressante de ce qui précède, et cette étude est toujours faite en montrant que le principe de la « réciprocité » trouve encore ici des applications. La deuxième partie de cette section s'occupe des principes de la perspective régulière et de la projection centrale ; ces principes bien connus amènent le lecteur à la définition et à l'étude de la collinéation de l'affinité, de la similitude et de la congruence, cas particulier de la première. Comme application intéressante, citons la construction des vues stéréoscopiques, appliquée au dodécaèdre pentagonal et à l'icosaèdre.

La détermination des relations métriques entre les divers éléments d'un prisme, d'un tétraèdre, d'une pyramide quelconque, celle de leur surface latérale, de leur volume forment un premier paragraphe de la troisième section. Puis vient une étude générale des polyèdres d'Euler avec les théorèmes relatifs au nombre de faces, d'arêtes et de sommets de ces polyèdres : nombreuses applications.

La quatrième section se rapporte au cylindre et au cône droits ainsi qu'aux lignes tracées sur la surface de ces corps. La notion des lignes géodésiques est introduite à propos de l'hélice.

Avec la cinquième section, nous abordons l'étude d'un corps dont nous aurons à nous occuper longuement : la sphère. Cette étude nous introduit tout d'abord dans ce que l'auteur appelle l'ancienne Géométrie élémentaire de la sphère, contenue dans la plupart des traités de stéréométrie, mais dans laquelle on rencontre encore le principe de la réciprocité sous la forme de la polarité sur la sphère. L'on aborde ensuite une partie très importante, savoir les applications à la sphère des principes de la Géométrie moderne : pôle et plan polaire avec la définition des figures réciproques : plan radical, axe radical et centre radical de 2, 3 ou 4 sphères ; centres de similitude et les théorèmes sur ces divers éléments sont étudiés. Il en est de même des lignes tracées sur la sphère, cercles, faisceaux de cercles etc. Les loxodromies sur la sphère trouvent leurs applications dans l'étude de la représentation cartographique de la surface terrestre.

La sixième section est une des plus intéressantes du traité et l'on est étonné de voir avec quelle facilité les résultats découlent les uns des autres, s'enchaînent et se développent à la lumière du grand principe de la récipro-

cité exposé dans le chapitre précédent. Cette section a pour titre : Exercices sur la Géométrie moderne de la sphère et applications aux cyclides de Dupin et à la théorie de la courbure des surfaces. Ce titre renseigne suffisamment sur le contenu de cette partie pour que nous nous y arrêtions longtemps. Après avoir étudié dans une courte introduction les suites de cercles sur la sphère, l'auteur arrive immédiatement à la définition des cyclides de Dupin par la considération des sphères tangentes à trois sphères tangentes entre elles. Les sections circulaires de ces cyclides ainsi que celles de leur cas particulier le tore sont indiquées et l'on arrive immédiatement à la représentation conforme de la surface du tore sur un rectangle et aux loxodromies sur le tore. Enfin, on étudie la courbure des surfaces en général avec les théorèmes d'Euler et de Meunier, l'indicatrice, etc.; la définition de Gauss, de la courbure est indiquée et ces notions sont appliquées aux cyclides et spécialement au tore. Incidemment l'auteur aborde les surfaces à courbure négative constante, indique la construction de surfaces de révolution de cette nature et l'importance qu'elles ont en général dans les théories des géométries absolues de Riemann et de Lobatchewski.

Dans la septième section nous trouvons les propriétés des courbes du deuxième degré déduites de celles du cône et du cylindre dont elles sont les sections planes, et leur application à la perspective régulière de la sphère et à son ombre portée.

Enfin, les deux dernières sections contiennent les principales propriétés des surfaces du deuxième degré, surfaces de révolution tout d'abord et surfaces générales ensuite. J. Max (Lausanne).

Ern. Pascal. — **Repertorio di Matematiche superiori ;** t. II, *Geometria :* un vol. in-12°, 228 p. Prix 9 L. 50. U. Hœpli ; Milano, 1900.

Ce deuxième volume du Répertoire de Mathématiques supérieures est consacré au développement des aspects géométriques de la théorie des formes, et à la Géométrie infinitésimale.

Le mode d'exposition du Répertoire, à la fois rationnel et historique, n'est pas le moindre mérite d'un ouvrage destiné à devenir le *vade-mecum* du géomètre.

Cet ouvrage sera aussi le guide apprécié de tous les esprits curieux de hautes mathématiques, mais qu'effraient souvent les trop longues explorations bibliographiques ; ceux-ci, sans sortir de leur chambre, pourront désormais, grâce à M. E. Pascal, connaître tout ce qu'on peut glaner aujourd'hui à travers les meilleurs auteurs ; parfois même le Répertoire, esquissant avec bonheur plusieurs pages de l'œuvre d'un maître, pourra leur suffire.

Sans vouloir raconter ici, tout le voyage au long cours accompli par M. E. Pascal à travers la Géométrie moderne, je me contenterai d'en signaler les principales relâches qui sont :

Les bases de la Géométrie analytique et projective ; les formes algébriques ; les connexes ; les coniques, les quadriques ; les courbes planes ; les surfaces et les courbes gauches ; la cubique, la quartique ; les surfaces du quatrième ordre et d'ordre supérieur ; les Géométries de la droite et de la sphère ; la Géométrie énumérative ; la topologie ou « Analysis situs » ; la Géométrie infinitésimale de l'espace et de l'hyperespace ; la Géométrie non-euclidienne.

Telle est la matière du second volume du Répertoire ; le succès de ce volume sera digne du succès de son aîné. J. A.

A. Mendes d'Almeida et Rodolpho Guimarães, officier du Génie portugais. — **Curso de Topographia** (tome I^er^ : 1 vol. grand in-8° de 532 pages, 352 figures dans le texte et 22 planches. — Lisbonne, J.-A. Rodrigues, 1899.

Cet ouvrage, très développé, est conforme au programme du Cours de Topographie de l'École militaire du Portugal où l'un des auteurs (M. Mendes d'Almeida) est professeur adjoint (1). Il comprendra deux volumes : le premier, actuellement publié, étudie les levers planimétriques réguliers et tous les éléments qui les composent ; le second traitera du nivellement, des sondages, des levers spéciaux et levers expédiés, de la cartographie, et se terminera par une étude sur le cadastre.

Le tome I^er^, après une introduction exposant les généralités et les conventions relatives au dessin topographique, se divise en cinq chapitres et un appendice, savoir :

Ch. I^er^. *Figuré et formes du terrain* (modes divers de représentation ; étude des formes naturelles et de leurs lois de formation). — Ch. II. *Lecture et copie des cartes* (distances et itinéraires, déclivités et accidents du terrain, évaluation des aires ; copies à même échelle, puis à échelle amplifiée ou réduite). — Ch. III. *Orientation* (par la boussole, sur une carte, par le soleil, la lune, l'étoile polaire, les indices et les informations). — Ch. IV. *Planimétrie* (détermination des distances et des angles ; instruments divers pour leur mesure). — Ch. V. *Exécution de la planimétrie* (triangulation ou canevas trigonométrique ; canevas topographique ; lever de détails ; instructions). — Appendice : notions sur les *projections cotées* et leurs applications.

Ce livre de Mathématique appliquée touche en bien des points à la Mathématique pure. Nous signalerons, comme exemple, l'exposition des méthodes d'évaluation des aires : 60 pages du chapitre II sont consacrées à un résumé très complet des diverses formules de quadratures et des études comparatives auxquelles elles ont donné lieu, suivi de notions étendues sur l'intégration graphique, les intégrateurs et les planimètres, etc.

Les auteurs, dans tout le cours de leur ouvrage, s'attachent à séparer nettement les procédés géométriques des procédés mécaniques ; pour chaque méthode exposée ou chaque instrument décrit, ils indiquent avec précision les conditions de l'emploi et les limites des erreurs commises. Ils citent avec un soin minutieux toutes les sources auxquelles ils ont puisé ; c'est ainsi que 52 ouvrages ou documents sont cités pour l'évaluation des aires dont il est parlé ci-dessus.

Ce cours est, en résumé, un livre mûrement médité, un peu long parce que le sujet est vaste, mais d'une exposition en général claire et bien ordonnée, muni d'une excellente bibliographie, et qui sera fructueusement consulté par toutes les personnes qui s'occupent de Topographie.

Commt L. Ripert (Paris).

---

(1) Le livre est précédé d'une Préface du lieutenant-colonel Marrecas Ferreira, professeur.

Aug. Haas. — **Integralrechnung ; 2 ter Theil : *Anwendungen*** Applications des intégrales définies à la quadrature, à la rectification, à la complanation et à la cubature, avec exercices choisis dans le domaine mécanique et technique. 1 vol. gr. in-8°, 238 p. Prix : 9 marks. *Collection Kleyer*. Jul. Maier, Stuttgart, 1899.

Cet ouvrage présente, comme tous ceux de cette collection que j'ai eu le plaisir d'avoir entre les mains, un grand intérêt tant au point de vue de la disposition qu'à celui de la méthode mathématique.

De la disposition : Chaque page est divisée en deux colonnes, à gauche des questions précises et à droite les réponses.

Dans la colonne de gauche, l'espace restant entre deux questions, questions rendues ainsi saillantes par leur disposition, est très judicieusement rempli par un certain nombre de remarques explicatives se rapportant soit au développement direct de la question, soit à des points latéraux apparentés avec la question elle-même.

Ces remarques sont d'une grande valeur; elles facilitent la lecture du traité en évitant d'avoir recours à d'autres ouvrages, ou a des développements quelquefois superflus, en même temps qu'elles donnent des horizons intéressants auxquels le lecteur n'aurait peut-être pas pensé.

Pour mieux faire ressortir ce point, je prends un exemple au hasard :

Problème 34 : Quadrature de l'Hyperbole équilatère $xy = c^2$ depuis $x = a$ à $x = b$.

Remarque 37 : Introduisons $x = v$ et $y = p$: l'équation devient $pv = c^2$, c'est-à-dire l'expression de la loi de Mariotte quand v est le volume d'une masse gazeuse et p la pression. Suivant l'action d'une compression isothermique on passera du volume v_1 au volume v_2 avec la dépense de travail ci-dessous :

$$Z = -\int_{v_1}^{v_2} p.\,dv = c^2 \log \frac{v_1}{v_2}$$

Voir Klimpert : *Traité de Physique générale*.

Solution : Nous obtenons ici

$$y = \frac{c^2}{x}$$

d'où

$$Z = \int_a^{b^2} \frac{c^2}{x}\,dx$$

$$= c^2 \log a - \log b = c^2 \log \frac{b}{a}$$

. . . . . .

. . . . . .

Suit un développement pour le cas $b = \infty$.

De la méthode mathématique : Dans chaque chapitre la formule intégrale est d'abord développée suivant la méthode analytique, puis le résultat est comparé à une intégration. L'auteur montre ensuite comment un tel développement conduit en même temps à la définition rigoureuse de l'intégrale définie, en tant que limite d'une somme.

Les exemples nombreux, sur lesquels nous reviendrons sont d'abord choisis avec des coordonnées rectilignes, puis avec des coordonnées obliques et enfin avec des coordonnées polaires. Pour chaque variété nouvelle, l'auteur établit toujours la formule intégrale suivant la méthode analytique.

Choix des exemples : C'est ici surtout que l'ouvrage est remarquable. Il ne comporte pas 300 pages, et rarement en si peu de place, collection aussi riche d'exemples de toute nature a été réunie. Les courbes du deuxième degré défilent d'abord avec des applications, pour la plupart calculées numériquement et avec des résultats simples, puis les courbes supérieures les plus intéressantes, les plus connues, toujours avec des solutions élégantes, et le plus souvent possibles, se rapportant à des exemples classiques, appliqués soit en physique soit en mécanique.

Les intégrales doubles et triples sont traitées dans le même esprit ; par la manière dont elles sont présentées et par le choix des exemples qui s'y rapportent, cette deuxième partie de l'ouvrage est une des plus intéressantes dans son genre.

Je ne veux pas oublier non plus de signaler au lecteur le court chapitre consacré aux courbes intégrales.

Avant de conclure, il y a une remarque générale à faire qui pourra peut-être avoir sa valeur dans une seconde édition. Comme l'ouvrage qui est une deuxième partie, peut trouver sa place dans la bibliothèque d'un ami de la science mathématique, indépendamment de la première partie ou du calcul différentiel de la même collection, nous aimerions que nombre de courbes qui sont traitées ici, soient données aussi par les figures, sans pour cela, renvoyer le lecteur à un autre volume.

Nous comprenons la manière de faire de l'auteur, mais il serait agréable pour celui qui consulte ce volume sans avoir les autres sous la main de trouver aussi les figures. Celles-ci sont toujours un auxiliaire puissant pour le raisonnement de la question, aussi croyons-nous devoir attirer l'attention des intéressés sur ce point.

Conclusions : Nous recommandons avec plaisir le nouvel ouvrage à ceux de nos collègues qui lisent l'allemand. Pour la préparation du cours, pour les exemples, soit en vue des répétitions, soit en vue des examens, ils trouveront là un guide simple, facile en même temps qu'élégant, un guide réunissant avec une exposition claire une grande profondeur scientifique.

Non seulement les professeurs seront bien servis par l'ouvrage, mais les étudiants aussi y trouveront une matière féconde. Par la forme comme par le fond leur horizon mathématique pourra s'élargir et l'élégance des méthodes ne pourra qu'une fois de plus leur faire aimer les beautés de la science mathématique.

Dr L. Crelier (Bienne).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences; t. CXXIX : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 18 (30 octobre). — G. Humbert : Sur les fonctions hyperabéliennes. — E. Goursat : Sur les congruences de normales.

N° 19 (6 novembre). — Vallier : Sur le tracé des freins hydrauliques.

N° 20 (13 novembre). — C. Guichard : Sur les congruences de cercles et de sphères qui interviennent dans l'étude des systèmes orthogonaux et des systèmes cycliques. — P. Painlevé : Sur les équations du second ordre à points critiques fixes. — H. Padé : Sur la généralisation des développements en fractions continues, donnés par Gauss et par Euler, de la fonction $(1+x)^m$.

N° 21 (20 novembre). — E. Landau : Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. — Andrade : Sur les systèmes isolés simultanés.

N° 22 (27 novembre). — H. Lebesgue : Sur la définition de l'aire d'une surface. — M. Petrovitch : Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises à l'intérieur d'une circonférence donnée. — H. Padé : Sur la généralisation des développements en fractions continues, donnés par Lagrange, de la fonction $(1+x)^m$. — P. Duhem : Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants et, en particulier, d'un navire qui porte un chargement liquide. — Appell : Remarque sur la communication précédente.

N° 23 (4 décembre). — C. Guichard : Sur quelques propriétés de certains systèmes de cercles et de sphères. — R. Baire : Sur la théorie des ensembles. — P. Painlevé : Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. — E. Busche : Généralisation d'une formule de Gauss. — G. Humbert : Sur la transformation des fonctions abéliennes.

N° 24 (11 décembre). — R. Baire : Sur la théorie des fonctions discontinues. — A. Broca : Sur le principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Acta Mathematica, journal rédigé par G. Mittag-Leffler ; t. XXII, n° 4 ; Stockholm, Beijer, 1899.

V. Volterra : Sur la théorie des variations des latitudes. — J.-L.-W.-V. Jensen : Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. — M. Lerch : Sur quelques intégrales ayant rapport avec les fonctions elliptiques. — M. Lerch : Sur la nature analytique d'une fonction considérée par P. du Bois-Raymond. — M. Petrovitch : Sur une propriété des équations différentielles intégrables à l'aide des fonctions méromorphes doublement périodiques.

Revue générale des sciences pures et appliquées ; directeur, L. Olivier ; 10e année, 1899. — Prix d'abonnement annuel : Paris, 20 fr. ; départements, 22 fr. ; union postale, 25 fr. ; A. Colin.

Dans le n° 22 (30 novembre) à signaler un très remarquable article de M. G. Milhaud : La Géométrie au temps de Platon.

Revue scientifique, paraissant le samedi, fondée en 1863 : 4e série, t. XII, 1899, 2e semestre : prix d'abonnement annuel : union postale, 35 fr. ; Paris, 19, rue des Saints-Pères.

N° 22 (25 novembre). — J. de Rey-Pailhade : Etat de la question de la décimalisation du temps et de l'angle.

Bulletin de l'Enseignement technique ; 2e année, 1899 ; Prix d'abonnement annuel : France, 6 fr. ; étranger, 7 fr. ; Paris, Nony.

Ce bulletin paraît en général tous les quinze jours : il contient un relevé des actes officiels concernant les divers établissements d'enseignement techniques (listes d'admissions, programmes, circulaires diverses, etc.) ; des sujets de concours, des indications sur les bourses commerciales de séjour à l'étranger ; le mouvement du personnel. Chaque année forme un vol. in-8° de plus de 500 pages.

L'Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant et E. Lemoine ; t. VI, 1899 ; Prix d'abonnement annuel : Paris, 7 fr. ; départements et union postale, 8 fr. 50 ; Paris, Gauthier-Villars.

Ce recueil, fondé en 1894, est unique parmi les journaux mathématiques. Il se compose exclusivement de questions posées par les lecteurs, et de réponses à ces questions. Il rend chaque jour de grands services aux travailleurs désireux d'obtenir des renseignements mathématiques de toute nature. Parmi les questions posées, plusieurs ont donné lieu à de remarquables mémoires publiés au dehors. C'est également de l'*Intermédiaire* qu'est venue la première initiative de création des Congrès internationaux de mathématiciens. On pourrait reprocher à la publication des questions et des réponses une lenteur un peu trop grande. Nous savons que les directeurs et l'éditeur se préoccupent des moyens de porter remède à cet état de choses, et cela peut-être dès l'année 1900 qui vient de s'ouvrir.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwärtig herausgegeben von Dr R. Mehmke und Dr M. Cantor ; t. 44, 1899 ; Teubner, Leipzig.

Nos 5 et 6 (novembre). — Chr. Beyel : Ueber doppeltzentrische Vierecke. — W. Heymann : Ueber Winkelteilung mittelst Arancïden. — W. Heymann : Ueber hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziel ist. — O. Boeckler : Ueber die Wellenfläche. — F. Meisel : Einführung in die geometrische Optik. — W. Weltmann : Die Interpolation. — Ad. Schmidt : Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen bei linearer Aenderung des Koordinatensystems. — L. Geusen : Neue Konstruktion für den Umfangs Schwerpunkt einer Dreiecks. — L. Saalschütz : Erweiterungen des Faktoriellensatzes. — P. Hayashi : On a functional equation treated by Abel. —

P. Hayashi : On a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations. — D. Sintzow : Ueber eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. — H. Liebmann : Einfaches Beispiel einer Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist. — Gollob : Ein wiedergefundener Diophantuscodex.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von prof. G. v. Escherich und prof. L. Gegenbauer ; 10e année, 1899 ; 4e fascicule. Eisenstein et Cie, Vienne.

J. Sobotka : Zur Perspective des Kreises. — Erw. Dintzl : Der zweite Ergänzungssatz des cubischen Reciprocitätsgesetzes. — K. Bobek : Ueber Flächen dritter Ordung, welche Collineationen in sich zulassen. — F.-J. Studnicka : Ueber eine neue Art von Derivationsdeterminanten. — Em. Kohl : Ueber die Fortpflanzung von ebenen Wellen in einem vollkommen elastischen, incompressiblen Medium mit Rücksicht auf die Doppelbrechung des Lichtes. — Leop. Gegenbauer : Bemerkung über einen die Anzahl der Primzahlen eines bestimmten Intervalles betreffenden Satz des Herrn J.-J. Sylvester. — O. Biermann : Bemerkungeüber die einer algebraischen Curve adjungierten Curven.

Zeitschr. f. Math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann ; 30e année, 1899, Teubner, Leipzig.

N° 7 (octobre). — Av.-J. Pick : Das Jahr « Nul ». — Kewitsch : Das neue Jahrhundert. — C. Müsebeck : Zur Dreiteilung des Winkels, enthaltend eine kurze Darstellung der Lohmannschen Lösung nebst einigen historischen Notizen. — J.-C.-V. Hoffmann : In Sachen des Ellipsenumfanges.

Zeitschr. f. d. Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. 19e année, 1899. Alf. Hölder, Vienne.

N° 11. — E. Czuber : Ueber die Decimaltheilung der Winkel-und Zeitgrössen.

N° 12. — J. Sterba : Elementare Gezeitentheorie.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 296, série 5a, vol. VIII, 2e semestre, 1899 : Rendiconti : Rome, tip. dell. R. acc. dei Lincei.

Fasc. 9 (5 novembre). — Levi-Civita : Interpretazione gruppale degli integrali di un sistema canonico.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario, organo dell' Associazione Mathesis ; directeur, G. Lazzeri ; prix d'abonnement annuel : Italie, 8 L. ; étranger, 9 L. ; 15e année, 1899-1900 ; série II, vol. II : Livourne, R. Giusti.

Cet utile recueil, consacré à l'enseignement secondaire en Italie, a été fondé par D. Besso, puis continué par A. Lugli. Il renferme, dans chaque numéro, des articles fort intéressants et une bibliographie assez complète. Les *Atti dell' Associazione Mathesis* (abonnements, 6 et 7 L.) sont publiés à part. Il en est de même pour un *Supplemento al periodico di Matematica*

(abonnements, 2 et 2,50 L.) destiné surtout aux élèves et contenant un très grand nombre d'exercices résolus ou à résoudre, qui portent sur toutes les parties de l'enseignement secondaire mathématique.

Paedogogisches Archiv, herausgegeben von Prof. C. Dahn; 41e année, nos 11 et 12, 1899. Dürr, Leipzig.

Nyt Tidsskrift for Matematik, redigeret of C. Jurl et V. Trier, 10e année; série A, nos 6, 7, 8; série B, no 3. Kobenhavn, 1899.

El Progresso matematico, revista de matematicas puras y aplicadas, director D. Zoel G. de Galdeano. Série 2, año 1, nos 5 et 6. Zaragoza, 1899.

Sciences physico-mathématiques dans le cours de leur développement : journal d'histoire, de philosophie et de bibliographie des sciences phys'co-mathématiques, édité (en russe) par V. V. Bobynin : t. IX, 1899. Moscou.

No 1. — Pchebopcky, A. P. : Théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles. — Le baron Plana : exposé de ses œuvres scientifiques. — *L'Enseignement mathématique.*

Herm. Schubert. — **Elementare Arithmetik und Algebra.** 1 vol. in-8e de 230 p. Prix : 3 fr. 50; t. Ier de la « Collection Schubert ». G. J. Göschen. Leipzig, 1899.

G. Holzmüller. — **Konstruirende und beschreibende Stereometrie.** 1 vol. in-8e de 383 p. Prix : 6 fr. 65 ; t. IV de la « Collection Schubert ». G. J. Göschen, Leipzig, 1899.

O. Pund. — **Algebra, Determinanten und elementare Zahlentheorie.** 1 vol. in-8e de 345 p. Prix : 5 fr. 50; t. VI de la « Collection Schubert ». G. J. Göschen, Leipzig, 1899.

Reinhold Müller. — **Leitfaden f. d. Vorlesungen über darstellende Geometrie** an der herzoglichen technischen Hochschule zu Braunschweig. 1 vol. in-8e de 88 p. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1899.

Ern. Papperitz. — **Die Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen.** 1 broch. in-8e de 68 p. Prix : 1 Mark 50. Veit et comp., Leipzig.

L. Maillard. — **Éléments de Géométrie.** 1 vol. in-12 de 238 p. Viret-Genton, Lausanne, 1899.

E. Nickel. — **Ueber graphische Darstellungen in den Naturwissenschaften.** Progr. Realgymnasium, Frankfurt a. o. 1 broch. in-4e de 31 p. Trowitzsch et Sohn, 1899.

Aug. Haas. — **Lehrbuch der Integralrechnung ;** zweiter Theil : Anwendungen. (*Kleyers Encyklopädie* der gesammten mathem., techn. u. exakten Natur-Wissenschaften). 1 vol. gr. in-8e, 284 p. Prix : 9 M. J. Maier, Stuttgart, 1899.

A. Portuondo. — **Escuela especial de ingenieros de caminos, canales y puertos ; apuortes ;** 1ª parte : Calculo de probabilidades; 2ª parte : teoria de los errores ; 3ª parte : metodos de los minimos cuadrados ; 1 vol. gr. in-8°, 282 p., 1 pl. ; Madrid, establec. tipogr. de Fortanet, 1898.

S. Urtu Carboni. — **I Complementi dell' Algebra elementare** par la discussione completa e sistematica dei problemi algebrici di primo e secondo grado, con 2 000 problemi (risoluti ed avviati) ; parte I : teorie; 1 vol. XVI-467 p. ; prix : 5 L. ; Livourne, R. Giusti, 1899.

J. S. Mackay. — **Arithmetic theoretical and practical** ; 1 vol. gr. in-12 ; XI-472 p. Prix : 4 S. 6 d. ; Londres et Édimbourg, Chambers, 1899.

G. M. Testi. — **Corso di matematiche** ad uso delle scuole secondarie superiori e più specialmente degli istituti tecnici ; vol. II, *Algebra elementare* ; 2e édit. ; 1 vol. gr. in-12, VII-399 p. ; Livourne, R. Giusti, 1900.

M. W. Garaycochea. — **Calculo binomial** o analisis trascendente de binomio ; obra original inedita, comentada por el Dr D.-F. Villareal ; parte 1ª, 1 vol. gr. in-12, XIX-806 p. ; prix : 10 S. ; Lima, Gil, 1898.

Eth. Pascal. — **Repertorio di Matematiche superiori,** I, II, Geometria ; un vol. in-12°, 928 p. ; prix : 9,50 L. U. Hoepli, Milan, 1899.

E. Lampe. — **Die reine Mathematik in den Jahren** 1884-1899, nebst Actenstücken zum Leben von Siegfr. Aronhold. 1 broch. in-8° de 48 p. W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1899.

I. Ghersi. — **Metodi facili per risolvere i Problemi de Geometria Elementaro ;** 1 vol. in-12°, 190 p. ; prix : 1,50 L. (Manuali Hoepli, serie scientifica). Hoepli, Milan, 1900.

C. Alasia. — **Geometria et Trigonometria della sfera ;** 1 vol. in-12°, 207 p. ; prix : 1,50 L. (Manuali Hoepli, serie scient.). Hoepli, Milan, 1900.

J. Riddel. — **Practical plane and solid Geometry ;** un vol. in-8°, 327 p. ; prix : 2 s. ; Oliver and Boyd, Edinbourg, 1899.

A.-J. Pressland and Ch. Tweedie. — **Elementary Trigonometry,** Part. I ; un vol. in-8°, 313 p. ; prix : 2 s. 6 d. ; Oliver and Boyd, Edinbourg, 1899.

M. Schuster. — **Geometrische Aufgaben,** ein Lehr-und Uebungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen. Ausgabe A. (für Vollanstalten). 1 vol. in-8°, 147 p. avec 2 planches lithogr. ; prix : 2 M. B. G. Teubner, Leipzig, 1899.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

SUR LE DÉVELOPPEMENT ET L'ÉTAT ACTUEL

DE LA GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS [1]

Une nouvelle branche des sciences mathématiques, la Géométrie à n dimensions, s'est développée progressivement dans la seconde moitié du siècle. Dans le vaste domaine qu'elles se sont ouvert, ces recherches ont été fécondes en résultats importants et, de plus, la Géométrie limitée au champ déjà connu leur doit des points de vue nouveaux faisant apparaître en particulier les méthodes dans leur signification la plus claire.

Actuellement, il semble que l'enseignement doive commencer à tenir compte des développements que nous venons de signaler, et cela d'autant plus que l'étude des domaines avec plus de quatre dimensions a provoqué des améliorations et des extensions dans la représentation géométrique en général. En essayant de résumer pour cette revue les travaux considérables relatifs à ce sujet et en les référant à une nomenclature aussi complète que possible, nous espérons que notre tentative sera bien accueillie par les lecteurs que les questions nouvelles intéressent.

I

On ne saurait dire que la notion d'espaces et de figures à dimensions multiples doive son origine aux recherches géométriques contemporaines. Elle existait depuis longtemps en germe :

[1] La première partie de ce mémoire a paru en 1886 dans le recueil allemand *Leopoldina* et l'auteur a rédigé la seconde partie, qui donne à ce travail son actualité, pour son insertion dans *l'Enseignement mathématique*. Il est accompagné d'un *Index bibliographique* dans l'ordre alphabétique des auteurs cités; c'est à cet Index que se réfèrent les numéros mis entre parenthèses dans le texte.

puisqu'on avait reconnu que le mouvement par lequel la droite résulte du point, le plan de la droite et l'espace du plan implique chaque fois l'existence d'une dimension de plus, on pouvait par la pensée continuer indéfiniment ce mode de génération, bien que *l'intuition* (1) des figures cessât d'être possible. Toutefois, le caractère empirique de la Géométrie fit d'abord condamner cette incursion au delà de l'intuitif comme inutile, contraire à l'expérience et même absurde. La notion dont il s'agit trouva dans la Géométrie analytique un puissant élément de progrès. La représentation des lignes et des surfaces par des équations à deux et trois variables conduit à la question : comment les équations à quatre variables doivent-elles être interprétées ? Dans d'autres domaines l'analyse forçait directement la Géométrie à sortir de l'intuitif : les racines imaginaires font admettre un champ qui n'est pas réel et la notion de l'infiniment grand implique des figures infiniment éloignées ; or, par l'emploi de ces innovations les restrictions de certaines propositions de Géométrie disparurent.

Ce fut en essayant vainement de démontrer le postulatum d'Euclide que l'on franchit pour la première fois les limites de la Géométrie expérimentale. Déjà en 1792, Gauss (140) concevait le principe d'une Géométrie dans laquelle le postulatum n'est pas valable, et Bolyai en 1832 (39), Lobatschewky en 1840 (231) le développèrent avec une ampleur de déduction telle que ces deux savants sont les fondateurs d'une Géométrie transcendantale (2) caractérisée en particulier par ce fait que la somme des angles du triangle < 2 droits. Mais il n'existait aucun domaine qui permît de contrôler par des résultats valables ce qui pouvait sembler des paradoxes et ces recherches restèrent ignorées. Riemann en 1854 (310) et Helmholtz en 1868 (152) furent conduits, par des recherches analytiques sur la différentielle de l'élément linéaire, à imaginer des espaces satisfaisant à certaines formules générales dont l'espace euclidien est un cas particulier. Ceci constituait un double progrès : d'une part, aux deux possibilités de la Géométrie

(1) Par *intuitif* l'auteur entend susceptible d'être vu intuitivement ou immédiatement.

(2) Cette géométrie est appelée par Gauss *non euclidienne*, par Bolyai *absolue*, par Klein *hyperbolique*.

euclidienne et de celle de Lobatschewsky venait s'en ajouter une troisième, à savoir que la somme des angles du triangle > 2 droits; de l'autre, les résultats nouveaux s'appliquaient aux espaces à dimensions multiples. L'introduction de la notion de courbure permettait de caractériser avec précision le domaine de la Géométrie non euclidienne. Beltrami en 1868 (20) avait montré que la surface à courbure négative constante réalisait les résultats de Lobatschewsky : on put constater que la troisième possibilité avait pour champ d'interprétation la surface sphérique à courbure positive constante. Ainsi se formèrent les conceptions des formes d'espace de Lobatschewky à courbure constante négative et de Riemann (positive) pour un nombre quelconque de dimensions.

C'est d'un tout autre point de départ que procédèrent les travaux de Grassmann que je ne fais que mentionner ici, leur objet essentiel étant le *calcul géométrique*. Par une conception d'importance fondamentale, il créa, sans rien emprunter à la Géométrie analytique, une analyse parfaitement adéquate à la recherche géométrique, réalisant l'idéal entrevu par Leibniz (216). Cette méthode capable d'extension dans le domaine des dimensions multiples fut exposée dans toute sa généralité dans l'Ausdehnungslehre en 1844 (146). Cet ouvrage contient tous les principes d'une Géométrie à n dimensions, et il faut en signaler la portée en ce sens que la Géométrie réelle apparaît comme l'application de la science abstraite de l'extension à l'espace représentable. Les principes établis par Grassmann (146) ont été énoncés plus tard par Erdmann (120) sous une forme nouvelle.

Toute une série de travaux se rattachent à ceux de Riemann et de Helmholtz et sont essentiellement analytiques. Il s'agit de fonctions de n variables, de problèmes de transformations, d'expressions pour la mesure de la courbure, et les résultats géométriques sont plutôt des interprétations des résultats analytiques que le but qu'on se propose. La généralisation d'une formule à deux ou trois variables est indiquée comme s'appliquant aux M_n [1]. Dans cette catégorie se rangent les travaux de Kronecker (209),

(1) Dans ce qui suit on emploie les abréviations suivantes : R^n signifie espace linéaire (droite, plan, etc.) à n dimensions; M_r^p espace courbé (courbe, surface, etc.) à r dimensions et d'ordre p; G_n. Géométrie à n dimensions.

Beez (19), Lipschitz (221-228), Christoffel (94), etc. Les géomètres spécialistes se tenaient sur la réserve à l'égard de ces incursions dans le transcendantal, bien justifiés en pensant qu'il y avait encore beaucoup à trouver dans l'espace euclidien et dans le plan; mais les expressions propres à la G_n se naturalisaient dans le langage mathématique et la nécessité de relier aux autres connaissances ce nouveau domaine s'imposait de plus en plus. Bien que la Géométrie du plan et de l'espace eût été libérée des liens de l'analyse par Steiner dont la force d'imagination donnait à ses recherches une valeur indépendante de sa méthode, et que Grassmann eût depuis longtemps trouvé un mode de calcul propre à la Géométrie abstraite, c'est encore aux méthodes usuelles de la Géométrie analytique qu'ont recours la plupart des savants dont il faut rappeler les noms. Betti (35) s'est occupé des principes généraux d'une Géométrie analytique à n dimensions et a traité entre autres des rapports linéaires, de la limitation et du fractionnement des M_n. Lie (217, 218) a étudié les figures correspondant aux lignes et aux surfaces, l'intersection orthogonale, la sphère à n dimensions et a donné une extension du théorème de Dupin. Jordan (186-188) a établi les conditions des directions parallèles et perpendiculaires de champs plans, a étudié leurs invariants-simultanés et a étendu le principe de la substitution orthogonale et ceux de la théorie des courbes relatifs à la courbure; de plus on lui doit des recherches trigonométriques et cinématiques. Une partie de ces résultats, ce qui concerne le principe d'Euler sur la rotation autour d'un point fixe, avaient été aussi obtenus par Schlaefli (327). Frahm (136) a considéré ce même problème de Mécanique dans un R_{n-1}. G. Cantor (63, 64) a montré comment le nombre des variables dont dépend la position d'un élément dans le R_n se réduit lorsque cet espace cesse d'être continu et a étudié les relations de deux points dans des champs de cette nature. Netto (254) a démontré que la relation réciproque entre deux champs à m et à n dimensions ne peut pas être en même temps continue et univoque. S. Kantor (189) a étudié les transformations linéaires dans le R_n dont Eichler (112) s'était déjà occupé. Pilgrim (289) a déterminé le nombre de parties dans lesquelles un R_k est partagé par n R_{n-1}. Brunel (56) a étudié les propriétés métriques des cour-

bes dans le R_n et Kretkowsky (208) a donné les coordonnées d'un point équidistant de $n + 1$ points dans un R_n. Enfin Genocchi (142) a attiré l'attention sur le fait que celles des recherches de Cauchy (84) qui peuvent être rattachées à la G_n sont antérieures à 1847.

Les travaux déjà mentionnés de Beez et Lipschitz font partie d'une autre catégorie concernant les multiplicités avec courbure, comprenant aussi les recherches d'Ovidio (260) sur les rapports des métriques, de Killing (194) sur diverses formes d'espaces, de Schering (324) sur les figures dans ces champs, et sur la pesanteur et autres forces, de Beltrami (21) sur les lignes géodésiques, de Geiser (141) sur une question de maximum, énumération qui n'a pas la prétention d'être absolument complète.

Entre temps il faut signaler des tentatives pour transporter dans un domaine représentable les résultats de la G_n. En 1870, Cayley (85) considéra les coefficients de l'équation d'une courbe assujettie à certaines conditions comme les coordonnées d'un point dans une multiplicité. Spottiswood (404, 405) attaqua directement le problème en partageant en groupes de trois éléments les variables d'une équation, le dernier groupe pouvant renfermer deux ou une variable. Si l'on considère alors les éléments d'un groupe comme des variables et les autres comme des paramètres, l'équation constitue pour chaque groupe un système de surfaces et tous ces systèmes dans leur ensemble donnent l'image géométrique de l'équation. Halphen 149 projeta une $M_{(n-1)}$ sur $(n-2)$ R_3 et Veronese (419-421) appliqua d'une manière systématique le principe de la projection et de l'intersection à l'étude des relations projectives. Craig (99) représenta une surface, donnée par deux équations à quatre variables dans R_3, par une surface dans R_3 satisfaisant à la condition de similitude des éléments infinitésimaux. Il faut rappeler des essais de représentation d'une M_4 dans R_3 fondés dans la plupart des cas sur la substitution d'un élément représentable, la densité par Scheffler (321), la coloration par Most (249) à la quatrième dimension. Les considérations par lesquelles Dühring (107) assimila la Mécanique de Lagrange à une G_4 rentrent dans cet ordre de travaux : la plus ancienne des tentatives de ce genre est sans doute celle du spiritiste anglais Henry More au XVII^e^ siècle qui, du reste,

comme l'a montré Zimmermann (436), ne cherchait pas dans une quatrième dimension un élément analogue aux trois dimensions. Ces essais ne semblent pas avoir amélioré la représentation des figures et de plus il est fâcheux d'introduire un élément étranger à la recherche mathématique pure. Dans cette question il ne reste d'autre parti à prendre que de sacrifier les dimensions d'ordre élevé et de ne représenter les figures que par leurs projections d'après les méthodes usuelles, et ce procédé n'est réalisable que s'il s'agit de passer d'un champ au champ immédiatement inférieur.

La méthode projective donne lieu au procédé probablement le meilleur pour obtenir la compréhension des M_n. En se guidant sur le passage du plan à l'espace, on peut passer de R_3 à R_4 et aller au delà en renonçant à toute représentation. Cette manière de procéder s'est montrée féconde ; elle a conduit à la conception du corps à quatre dimensions limité par des corps à trois dimensions. Aux plus anciens travaux de ce genre appartiennent ceux de Rudel (314-316) sur les rapports des points, droites, plans et espaces dans R_4, sur les plans qui se croisent et sur la congruence et la symétrie. On doit à Hoppe (159-169) une série importante de recherches dans lesquelles, partant d'une extension plane d'un grand nombre de conceptions spatiales, il a découvert une foule de propriétés des M_n et donné un ensemble de résultats intéressants sur la métrique de R_4. La considération de la figure limitée a conduit plusieurs des auteurs cités auxquels il faut joindre Durège (108) à l'extension du principe d'Euler sur les polyèdres aux M_n. G. Cantor (65-66) a étendu à R_n ses recherches sur les multiplicités de points. Kantor (190) s'est occupé, ainsi que Schubert (349, 350) des configurations dans R^n, tandis que Study (411), par la méthode des déterminants, a donné un grand nombre de propositions sur les angles, les pyramides et les puissances par rapport à un cercle. Un ouvrage de Meumke (242) traite les mêmes sujets et par l'application de la méthode de Grassmann donne l'extension des propriétés des points singuliers du triangle. Cette même méthode a servi à Schlegel [1] (328) pour étendre les propriétés des points harmoniques, des média-

[1] L'auteur du présent mémoire.

nes et du centre de figure du triangle aux figures analogues dans R .

Les nouvelles notions représentatives ont aussi trouvé leur application dans la Géométrie projective. Déjà en 1872, dans ses recherches sur les équations différentielles partielles, Darboux (101) était arrivé à déterminer les transformations de contact dans R_n. Des recherches ultérieures (102) l'on fait renoncer à l'emploi de projections tirées de R_4, à cause de son défaut d'utilité pratique. En connexion avec les travaux de Lie, Klein 205, 206) a établi la liaison entre la Géométrie réglée et la Géométrie métrique de R_4 avec extension à R_n. Segre (366, 367, 370) a donné un exposé détaillé des propriétés des surfaces du quatrième ordre à double section conique, en les considérant comme projection centrale, de la section de deux figures quadratiques à trois dimensions dans R_4, sur R_3. Dans l'ouvrage de Meyer (423, 424) sur l'apolarité et sur les courbes rationelles, des extensions d'une grande généralité sont obtenues au moyen des ressources de l'Algèbre moderne.

Il faut parler ici d'un problème d'un intérêt spécial consistant à déterminer les figures régulières de l'espace plan à quatre dimensions qui correspondent aux polygones et aux polyèdres réguliers. Vu l'irrégularité présentée par le fait qu'il existe une infinité des premiers et seulement cinq des seconds, l'attention est attirée sur ce qui a lieu dans R_4. Rappelons seulement que la figure ne doit être limitée que par des polyèdres réguliers et que à chaque sommet et sur chaque arête le même nombre de ces solides se joignent. Citant pour mémoire un essai insuffisant de Emsmann (113) pour trouver les figures correspondant au triangle et au tétraèdre, il faut mentionner Hoppe (159) qui a défini cette figure et déterminé son volume ainsi que ses analogues dans les champs plus élevés. A cette série Scheffler (321) a joint celle qui commence par le carré et le cube, et montré qu'en laissant de côté la condition d'égalité des arêtes, la solution dans R_n est celle des racines d'une équation du $n^{ième}$ degré. Rubel (317), qui trouva ces mêmes séries, donna onze procédés pour construire les figures régulières de R_4 ; mais les deux seuls utilisables conduisent aux deux séries ci-dessus et c'est en construisant leurs projections sur R_3 qu'on parvient aux autres figures. Ces projections

sont des figures composées d'un certain nombre de polyèdres. On peut les obtenir de deux manières : soit en procédant du dedans vers le dehors par une formation progressive, soit du dehors vers le dedans par une décomposition. Stringham (406) et Hoppe (170) ont obtenu la solution complète du problème, en employant l'un ou l'autre des procédés. Schlegel (329) a employé le second procédé également avec succès. Il résulte de ces recherches que l'on connaît dans R_3 six figures régulières respectivement limitées par 5, 16, et 600 tétraèdres, 8 hexaèdres, 24 octaèdres et 120 dodécaèdres [1]. De plus, Stringham a établi que les trois séries commençant respectivement : 1) par le triangle, le tétraèdre, le pentaédroïde (limité par cinq tetraèdres) ; 2) par le carré, l'hexaèdre, l'octaédroïde (limité par huit hexaèdres) ; 3) par le carré, l'octaèdre, l'hexadécaédroïde (limité par 16 tetraèdres) continuent dans toutes les multiplicités et que dans tout R_n supérieur à R_3 il n'existe pas d'autre figure régulière. Qu'il me soit permis d'ajouter qu'en renonçant à la régularité des figures limites j'arrive à une plus grande généralité pour les figures elles-mêmes et que j'obtiens nombre de résultats relatifs à la courbure et à la théorie métrique. Forchhammer (135) est également parvenu aux solutions mentionnées ; Pfeiffer (296, 297), a traité la question par l'Analyse. Schapira (319) a remarqué que les nombres figurés qui se présentent dans la multiplication abélienne de séries infinies trouvent leur signification dans les figures régulières de multiplicité élevée.

Des recherches de ce genre ont de l'importance en raison des nouveaux aperçus qu'elles ouvrent sur la Géométrie du plan et de l'espace, sur le Calcul différentiel et la Mécanique. C'est ainsi que Lie (219) en a tiré une nouvelle méthode d'intégration. La dépendance des propositions analogues dans le plan et l'espace est élucidée par l'extension à G^n. Il arrive aussi qu'on obtient des résultats nouveaux en spécialisant les propositions relatives à R_n. Le théorème de Halphen (149) sur le nombre de points doubles dans une courbe du $m^{ième}$ ordre en est un exemple.

---

[1] Des modèles des solides de projection sont fournis par la librairie Martin Schilling, à Halle.

II

Ce qui précède permet de constater la grande diversité de directions qu'ont suivies les premières recherches sur les espaces à dimensions multiples durant une période d'environ quinze ans (1871-1886). Depuis lors, les difficultés du début étant surmontées et les arguments des contradicteurs réfutés, l'activité scientifique a produit une si riche littérature que, dans un simple aperçu historique comme celui-ci, il nous est impossible de mentionner autre chose que les traits fondamentaux et les résultats caractéristiques de ces travaux.

Bien que d'une manière générale, la G_n ait obtenu gain de cause, divers travaux ont pour objet de démontrer que cette science est un développement logique et progressif de la Géométrie (202,333) ; d'autres tendent à écarter des méprises ou à expliquer comment les géomètres conçoivent l'espace à plusieurs dimensions et, en particulier, l'espace à quatre dimensions (252, 147, 240, 183). Il existe de nouveaux procédés qui, par une transformation à l'espace ordinaire, rendent représentable la Géométrie des hyperespaces (430, 131, 258, 256). Réciproquement, par un passage inverse, des problèmes trouvent leur solution. Klein (207), par exemple, définit les coefficients d'une équation du $n^{ième}$ degré, comme coordonnées ponctuelles variables dans un R_n, et par ce moyen rend possible le dénombrement des racines réelles. Faxo (124) considère une congruence de droites du $n^{ième}$ ordre et de $n^{ième}$ classe, comme une $M_2{}^{m+n}$ dans une M^2_5 du R_5. Frattini appelle (137), « groupes de k dimensions », ceux dont les éléments peuvent être caractérisés par k indices. Segre (389) considère les groupes de k points pris isolément dans k espaces, Rp, Rq....., comme éléments d'une M_ς (où $\varsigma = p + q + \ldots\ldots$). Les *applications à la Physique* ne font pas non plus défaut. Ball (16) cherche, pour expliquer la nature de l'éther et de la pesanteur, à obtenir un corps homogène élastique, par le principe d'un mouvement infiniment petit dans une quatrième dimension. Staeckel (407) fait correspondre à chaque problème de Dynamique celui d'un mouvement d'un point dans un

R_n, dont la solution dépend du même problème analytique; il traite (107) une classe remarquable de mouvements dans un R_n, et peut ainsi suivre intuitivement le cours du mouvement.

Brunel (57), Andrade (6), Joly (185) s'occupent de *généralisations analytiques*, Killing (190) étudie de nouvelles configurations se rattachant à cette Géométrie. Dickstein (106) et Galdeano (138, 139) fournissent des documents sur la littérature du sujet.

Schendel (323) remarque que les *déterminants* de rangs supérieurs déjà étudiés par von Escherich, trouvent leur représentation naturelle par un groupement de leurs éléments à l'intérieur d'un corps à plusieurs dimensions correspondant au carré et au cube. Sharp (392, 393) exprime, par des déterminants de cette espèce, le volume et les autres propriétés de la « figure régulière » à n dimensions qui est limitée par $n + 1$ corps à $n - 1$ dimensions; et Rahnsen (301) découvre au moyen de déterminants les propriétés de divers corps à n dimensions.

Aux *corps à plusieurs dimensions* se rattache d'ailleurs une littérature si abondante, que seule, celle de la Géométrie projective dans le R_n peut lui être comparée. Toute une série de travaux s'occupe exclusivement des *corps réguliers*. Rudel (318) étend sa méthode de détermination des deux premières séries de ces corps se continuant dans tous les espaces, à la troisième série, confirmant ainsi les résultats de Stringham. Schlegel (334, 338) obtient la représentation de ces trois séries de corps sur le plan. Heyl (156) fait des modèles de projection des corps réguliers à quatre dimensions, mais ne s'en tient pas à un principe unique; aussi ne s'accordent-ils qu'en partie avec ceux construits autrefois par Schlegel. Hall, Schoute et Brueckner étudient les corps réguliers du R_4: Hall (148) construit des formes de corps de projections pour les trois plus simples, Schoute (343, 364) étudie les sections et projections régulières des cinq plus compliquées. Brueckner (55) résume les propriétés des six corps en les reliant aux résultats de la géométrie élémentaire du R_3. Il faut encore citer Galdeano (138) qui décrit des modèles de projection, Schoute (341) qui réunit les propriétés élémentaires connues jusqu'à présent des corps cités plus haut, Biermann (97) qui, par intégration, détermine la surface et le volume de la sphère à n dimensions, et un *anonyme* (183). La

formation des *carrés magiques* est étendue par Schlegel (337) et plus tard par Arnoux (7, 211) au cube à n dimensions, et ces corps numériques sont représentés systématiquement dans le plan. La *première série* des corps réguliers, avec $n+1$ sommets, est le sujet de nombreuses études. Leurs volumes sont déterminés par Loria (234), Liebs (220), Clifford (95) et Cesaro 86 qui calcule aussi leurs médianes ainsi que leurs moments d'inertie, ceci comme application au calcul des probabilités ; Hoppe (175, 176) utilise leurs axes d'inertie principaux comme axes de coordonnées pour les sommets du corps, il calcule pour les corps à n dimensions ayant $n+1$ et $n+2$ sommets, l'expression $\int z^n dV$, déjà déterminée par Routh pour le triangle, le tétraèdre le quadrilatère et le pentaèdre. Sylvester et Sharp (394, 396, 398) enfin trouvent d'autres propriétés de ces corps.

Les partages d'espace se rattachent à la théorie des corps réguliers. Dans ce domaine, Eberhard (111) étend au R_n des théorèmes de Steiner, Euler, Cauchy, Listing ; Hess (153, 154) et Schlegel (336) utilisent les corps réguliers du R_3 dans le but de déterminer, pour l'espace à trois dimensions, de courbure constante, des partages réguliers ; Goursat (143) passe réciproquement du partage d'espace aux projections à trois dimensions des corps réguliers du R_4. Schoute (345) donne enfin trois systèmes de partage pour l'espace à n dimensions.

Les corps réguliers ont pris une plus grande importance par l'étude des *transformations* qui ramènent un corps de ce genre à lui-même. Goursat (146), le premier, étend ces recherches aux corps du R_4, en donnant à la théorie de ces corps, par la détermination des groupes de substitutions linéaires à quatre variables et d'ordre fini, les fondements analytiques qui la mettent dans le rapport le plus étroit avec la théorie de la transformation. Ensuite, van Oss (259) examine les groupes de mouvements de ces corps, Maschke (241) représente le groupe de rotation, par le diagramme des couleurs de Cayley ; Biermann (38), par une substitution linéaire d'une variable complexe fait revenir sur eux-mêmes les sommets des corps réguliers du R_3.

On étudie aussi les figures de plusieurs corps non réguliers du R_n. Il est procédé à des déterminations métriques pour le parallélipipède, par Lipschitz (230), pour la pyramide du R_n, par Lasker

(214), pour le prismatoïde, par Schoute (347), et, par Schlegel (322) pour le prisme du R_4 en commentant cette recherche par un modèle de projection. Poincaré (293) étend un théorème d'Euler sur le polyèdre, aux polyèdres à n dimensions ; Schoute (348. 346) étudie des corps du R_n admettant $n+2$ inversions et donne dans le R_4 les formes cristallines les plus générales du système régulier.

Nombreuses sont aussi les extensions de la *Géométrie élémentaire* aux espaces supérieurs. Cassani (69) entreprend ces développements systématiquement d'abord pour le R_4, dont la Géométrie est en même temps interprétée comme Géométrie réglée du R_6, puis pour le R_n Veronese (423) de même, avec une base philosophique très complète; une critique de Péano a provoqué un intéressant échange d'opinions. Del Pezzo (276) donne un tableau des postulats, définitions et théorèmes fondamentaux de la géométrie linéaire projective du R_n. Cassani (72) traite la *métrique* du R_4 ; Segre (386) détermine sans calcul, les *propriétés descriptives* du R_4, par analogie à celle des espaces inférieurs et donne la démonstration d'un théorème de Klein (378) relatif aux conditions sous lesquelles un espace à n dimensions est linéaire. Schlegel (335) fixe les différentes formes des *groupes ponctuels* du R_n, Tonelli (417), Peddie (266), Bertini (dans le dernier chapitre du 69, 25) trouvent des théorèmes sur les intersections d'espaces et sur les espaces ayant une partie commune de dimensions multiples et d'ordres divers. Busche (61) étend au R_n les *relations harmoniques*; Künne (212) de même. Divers théorèmes sont donnés par Hoppe (178) et de la Rive (311). Hoppe (173, 181), Cassani (68, 73) et aussi Castelnuovo (74) s'occupent des *angles* des espaces linéaires; Jordan (186) les étudie analytiquement et Veronese (419) au moyen de la Géométrie pure. Hoppe (179) et Schoute (342), Veronese (422), Schlegel (331) traitent respectivement de la *congruence et de la symétrie* dans le R_n, des *configurations*, et des systèmes de *coordonnées polaires*.

Dans le domaine des *groupes de transformation*, les recherches utilisant le R_n, se sont montrées fécondes en résultats; ce qui se rapporte aux corps réguliers a déjà été mentionné plus haut. Notons une étude analytique de Cole (91) sur les groupes

de transformations ramenant une sphère à quatre dimensions à elle-même. Kantor (191-193) étudie les transformations *quadratiques* du R_n; Del Pezzo (278, 279) et Faxo (128, 129) s'occupent des *transformations de Cremona*; Faxo étudie (126, 127) les groupes de *transformations continus et projectifs* servant à déterminer certaines M_n algébriques et leurs relations entre elles; il généralise aussi (130) *les groupes de Jonquière*. J. Brill (54) traite des *transformations ponctuelles* dans le R_n et Engel (114, 115) des *transformations infinitésimales*. Les groupes de *transformations* de Lie, en corrélation avec la théorie des formes spatiales ainsi que les groupes transformant un R_{n-1} d'un domaine limité, en un autre R_{n-1} du même domaine, sont étudiés par Killing (201, 204). Del Rey (304) s'occupe des groupes de *transformations linéaires à involutions* du R_n; Page (261, 262) étudie divers groupes du R_4, en particulier certains groupes primitifs. Landsberg (212) enfin, utilise les groupes du R_3 pour définir comme élément d'espace, un groupe de m éléments, représenté par un système de m $(n-m)$ équations, généralisant ainsi, dans un domaine à n variables, la notion connue de Plücker.

De même que pour les corps réguliers du R_4, on cherche aussi, par des *projections*, *représentations* et applications du principe de *correspondance*, à faciliter l'intelligence de diverses configurations à plusieurs dimensions et à établir leurs propriétés. Del Pezzo (271) traite d'une façon générale le problème de la *projection* d'une M_2 et d'une M_r d'un espace sur un autre; del Re (305) cherche les projections successives des quadriques du R_n; Bertini (28) considère des courbes planes comme projections de courbes spéciales du R_n, et Vivanti (425) montre que des formules récurrentes de certaines fonctions arithmétiques, formules que l'on trouve dans la théorie des types finis (endliche Ordnungstypen) établie par G. Cantor, ont leur vraie origine dans une projection de certaines configurations du R_n sur un espace inférieur. Segre (383) représente sur le plan une M_2^r du R_n, Aschieri (10) l'espace réglé sur le R_4, Autonne (14 et 15) les points d'un plan sur une M_2 unicursale et située dans le R_n; Loria (237) rapporte les droites d'un R_3 aux points d'un R_4. Kühne (210) donne pour le R_n des *représentations conformes* dans les espaces supérieurs, et Pucita (300) le fait pour un système de courbes orthogonales

sur une sphère à quatre et à n dimensions. Pannelli (264) trouve une correspondance entre R_3 et R_4, qui conduit à la représentation de Klein d'un complexe linéaire sur l'espace ponctuel, Milesi (245) prouve d'une nouvelle manière, qu'une corrélation entre le R_m et le R_n, ne peut être continue et univoque en même temps; Castelnuovo (77) généralise des théorèmes de Clebsch de Sturm et de Rosanes sur des groupes ponctuels associés; Cesaro (90) donne des formules pour les *déformations* infiniment petites d'une surface du R_n; Pucita (299) étudie les déformations continues d'une M_n; Schur (363, 364) celles des corps à courbure de Riemann constante et celles d'une M_2 du R_4.

La *Géométrie projective*, dont les principes et raisonnements ont été, pour ainsi dire sans exception, généralisés de cette façon, est un domaine qui se prête spécialement aux recherches du R_n, et ces études sont presque toutes dues à un groupe de savants italiens: elles se rapportent aux *relations fondamentales* chez Aschieri (12) aux *postulats* chez Fano (123) et Amodeo (3, 4), au passage dans le R_4 de théorèmes de la *Géométrie des droites* chez Bertini (24) et Segre (366-368), à la *théorie des polaires* chez Brambilla (51) et Waelsch (432), à la *détermination de M supérieurs* au moyen de M résultant de projections chez Zindler (438), *à des relations collinéaires et d'involution* chez Loria (232, 238), Predella (295), del Re (304), à des *correspondances* chez Berzolari (31), de Paolis (265), Giudice (144), del Re (302, 303), Palatini (263), Amodeo (1, 2), Chizzoni (93), Pieri (281), Bordiga (44), Aschieri (8), à des *homographies* chez Enriques (116-118), Segre (369-372), Bertini (23, 26, 27), Predella (294), Aschieri (9, 11), Deruyts (105), à des *corrélations* chez Hirst (158) et Fontené (134), — à des *complexes et congruences* chez Bordiga (45, 48-50), Schumacher (362), Ricci (309), Castelnuovo (75, 82), Segre (386, 387). Ce dernier détermine sans calcul, les propriétés descriptives du R_4 et étend les premières propriétés focales des faisceaux et gerbes de droites du R_3, à ceux et celles du R_4.

On sait que des théorèmes de la Géométrie plane se démontrent souvent le plus facilement par des *sections* et *projections* de figures de l'espace; ce procédé appliqué aux espaces à plus de trois dimensions, conduit à de nouveaux résultats du domaine de

la Géométrie élémentaire. C'est ainsi que Bordiga (40, 42, 46, 47), déduit du R_6 des propriétés de surfaces des 5e, 6e et 7e ordres, et étend (43) ces considérations aux surfaces de degré $\frac{1}{2} m (m + 1)$ du R_{2m}; il donne aussi une représentation plane des surfaces réglées normales situées dans le R_n (41). Segre (370) trouve dans le principe de la projection des figures du R_4, la base organique de la théorie des surfaces du quatrième ordre avec conique double ou conique de rebroussement. Il étend ensuite des théorèmes relatifs aux surfaces réglées de genre 1, 2, 3, aux surfaces d'un genre supérieur quelconque, (377, 380) et donne aussi la solution de diverses questions nouvelles relatives à la Géométrie ordinaire. On généralise une formule numérique de Sturm sur les surfaces réglées d'ordre n, de genre p (384), et il en résulte le théorème de Clifford sur la relation existant entre une courbe de genre p et d'ordre $n > 2\ p - 2$ et un $R < (n-p)$ (385). Finalement l'examen des M_3 du R_4 fournit de nouvelles surfaces et systèmes focaux du R_3, ainsi que des propriétés nouvelles de configurations connues (388). Les recherches de Castelnuovo (76) sur la géométrie des courbes elliptiques, se rattachent aux études de Segre (380). Cosserat (98) utilise enfin le R_4 pour étudier celles des surfaces algébriques qui contiennent plusieurs séries de coniques.

L'analogue d'une courbe du plan et d'une surface de l'espace est une *hypersurface* (M_{n-1} dans R_n); ces figures sont l'objet de nombreuses recherches. Sylvester et Sharp (397) donnent des théorèmes sur leurs polaires; Ricci (307) généralise le problème des systèmes de surfaces orthogonaux; Pucuta (298) étudie les surfaces développables les plus générales; Moore (348) étend au R_n les études de Picard sur les surfaces algébriques dont les sections planes sont toutes rationnelles. Del Pezzo (270) applique aux hypersurfaces des théorèmes de Veronese (419) sur les espaces tangents aux courbes du R_n; et développant plus tard ces travaux il est conduit aux surfaces normales de $p^{ième}$ espèce dans le R_n, aux hypersurfaces normales ($M_{<2}$) (273) et à celles des surfaces du n^e ordre du R_n qui appartiennent à aucun $R_{<n}$ (274). Segre (371, 374) entreprend la théorie des surfaces réglées. Del Pezzo (268, 277), Nicoli (257), Bertini (29), donnent des addi-

tions au travail de Segre (366), tandis que Berzolari (33) et Nanson (253) s'occupent spécialement des hypersurfaces du 2e ordre. Ascione (13) étend au R_4 et Segre (390) au R_n, des théorèmes sur la hessienne. Enriques (119) étudie les configurations à contacts d'ordre supérieurs des M_3^3 dans R_4; Segre (382) examine ceux des M_4^3 du R_4 qui admettent le plus grand nombre de points doubles. Hoppe (174, 182) applique au R_n des théorèmes de la *théorie de la courbure;* Ricci (308) généralise dans le même but les formules de la Géométrie infinitésimale, formules appliquées par Banal (17) à celles des M_2 du R_4 pour lesquelles l'analogie avec les M_2 du R_3 n'existe pas. De la même façon Cesaro (88, 89) développe les formules de Codazzi, tandis que Monro (247), Mlodzieionski (246), et Staeckel (408) développent la théorie de la flexion des surfaces. Del Pezzo (269) étend aux surfaces la représentation de Veronese d'une courbe du R_m, par la projection d'une courbe normale, dans le R_n (comparer avec 270); Schoute (348) et Hoppe (176) étendent à des espaces supérieurs : le premier les recherches de Casey et Darboux sur certaines courbes planes et surfaces de l'espace ordinaire, le second le théorème de Biermann sur les plans tangents à une surface. Hilbert (157) étudie les singularités d'une surface discriminante du R_n; Vaulen (418) définit enfin, pour R_n, la surface de Fresnel.

La théorie des courbes donne lieu à des développements analogues dans le domaine des *hypercourbes* (M_{n-2} dans R_n). Hoppe (177) fait le premier des recherches générales sur ces configurations; il étend à celles-ci les définitions de la tangente, de la normale principale, de la courbure et de la torsion (180). Cesaro (87) développe dans le même but le principe du calcul barycentrique en définissant les coordonnées barycentriques d'un point comme masses des sommets d'un corps régulier ayant $n + 1$ sommets, dans le R_n. Le même auteur donne plus tard une théorie des courbes des espaces supérieurs (91) et généralise en même temps les équations de l'élasticité. Castelnuovo (81) démontre par la Géométrie pure, au moyen du R_n, les théorèmes fondamentaux de la théorie des courbes algébriques, théorèmes démontrés par Clebsch au moyen des fonctions algébriques. Pirondini (291) étend aux courbes à triple courbure du R_4 la Géométrie infinitésinale

ordinaire. Cassani (71) et de Ruyts (104) appliquent les théorèmes sur la cubique gauche aux courbes normales du $n^{ième}$ ordre dans le R_n; Aschieri (10) étudie les courbes normales rationnelles du R_4; Loria (235, 236) et Berzolari (30) font des recherches correspondantes pour le R_n, et Zecca (435) s'occupe spécialement dans le R_n, des courbes du $(m+1)^{ème}$ ordre avec points doubles. Les propriétés de certaines courbes sont aussi étendues aux hypercourbes. C'est ainsi que Faxo (125) étudie la position de la courbe gauche d'un ordre donné et de genre maximum du R_n, Brunn (58) les courbes sans points d'inflexion, Lasker (215) celles du R_n coupées par un R_{n-1} en n points; Bertini considère les courbes planes comme projections de courbes spéciales du R_n. Del Pezzo (275) et Fine (133) s'occupent des singularités des hypercourbes et Landsberg (213) des courbures de courbes à une dimension contenues dans les espaces supérieurs.

La *Géométrie énumérative* fondée par Schubert ouvrit aux chercheurs un riche champ d'études; l'objet principal de cette géométrie considéré dans sa plus grande généralité, consiste à déterminer le nombre de configurations qui satisfont à un certain nombre de conditions. Schubert lui-même a résolu dans toute une suite de mémoires (351-361) des problèmes de cette espèce et d'une complication toujours plus grande; il traita, entre autre, à tour de rôle : les nombres invariants d'espaces linéaires, le problème des caractéristiques et des déterminations de nombres pour la M quadratique et pour la géométrie réglée. Ces travaux se relient à ceux de Piéri (282, 284-288), qui donne des déterminations numériques sur les coïncidences de droites et les couples de points ainsi que sur les intersections d'espaces à plusieurs dimensions; Segre (391) traite à un autre point de vue ces problèmes, ce qui le conduit à de nouvelles généralisations. Castelnuovo (78-80, 83) applique la méthode de Schubert dans le même sens que Piéri à des questions générales de la Géométrie énumérative, à des courbes algébriques et à des involutions rationnelles. En outre Cassani (70) et Amodeo (5) s'occupent de déterminations de nombres de systèmes linéaires; Visalli (424) traite des caractéristiques des systèmes de corrélation entre deux plans; Pincherle (290), Berzolari (32) et Burali Forti (60) étudient les hypersurfaces et les hypercourbes: le dernier

applique au R_n la méthode d'Halphen pour la théorie des caractéristiques du R_3.

Enfin Study (412) donne des compléments sur des nombres de coniques et réussit, par une représentation dans le R_8 de l'ensemble des coniques planes, à éclaircir la différence existant entre les conceptions opposées de Halphen et de Chasles (415).

Dyck (110) fournit des généralisations de théorèmes de l'*Analysis situs* du M_n et Poincaré montre que, dans le sens de l'*Analysis situs*, une surface n'est déjà plus, dans le R_4, définie par les « indices de connexion » de Betti.

La *théorie des ensembles de points* est étendue au R_n, d'abord par son fondateur Cantor (67), puis par Loria (233). Maccaferi (239) fixe la condition d'un système ponctuel connectif à n dimensions et Schönflies (340) utilise, pour la représentation de cubes à diverses dimensions, le théorème de Cantor : un ensemble à n dimensions possède la même puissance qu'un ensemble à une dimension.

Les *formes d'espace non euclidiennes* à n dimensions furent d'abord étudiées en détail par Killing (199, 202, 203), au moyen d'une généralisation des coordonnées de Weierstrass ; on trouve aussi chez Lie (219$_a$) quelques remarques à ce sujet. Stouff (409) étend la formule de la surface du triangle sphérique à la surface sphérique de Riemann dans l'espace à n dimensions. Schlumberger (339) donne les traits fondamentaux de la géométrie sphérique linéaire à n dimensions ; Heyl (155) examine les propriétés de la sphère du R_n ; enfin Brill (53) établit que certains espaces à courbure négative constante ne sont contenus dans aucun R_4, mais peuvent être tirés d'un R_5.

La *Mécanique* met aussi à profit cette extension de la géométrie. Buchheim (59) réussit à développer, au moyen des méthodes de Grassmann, la théorie des forces agissant sur un corps solide, dans diverses formes d'espace, à plusieurs dimensions, la théorie des biquaternions étant ici en défaut. Killing (200) établit pour des points assujettis à demeurer sur une sphère à n dimensions du R_{n+1}, les bases de la mécanique, des espaces non euclidiens ; Cole (97) étudie les rotations dans le R et Canizzo (62) dans le R_3.

Le besoin de représenter des *fonctions analytiques* par des

figures géométriques, a aussi conduit à utiliser les espaces à plusieurs dimensions ; ainsi Bettazzi (34) étudie les expressions analytiques qui représentent, en chaque point du M_n, une fonction à n variables réelles, finie et continue dans M_n. Volterra (426-430) étend au R_n, la théorie de Riemann des variables complexes ; il étudie dans les hyperespaces les fonctions conjuguées et établit l'intégration complète d'un système d'équations différentielles partielles, à l'intérieur d'un espace sphérique. C'est dans ce même domaine que se classent les études de Fabri (121-122), sur les fonctions dans les hyperespaces.

Les mémoires sur des nombres complexes d'ordre supérieur se placent aussi dans la liste des recherches à n dimensions ; car ces quantités, quoique étant, au premier abord, d'une nature purement analytique, forment cependant, comme Grassmann le montra le premier, la base la plus simple des études de la géométrie à plusieurs dimensions. Mentionnons encore parmi les travaux récents, la démonstration de Weierstrass (433), établissant la possibilité d'une arithmétique des nombres complexes avec un nombre quelconque d'unités principales, et la conception due à Dedekind (103), des grandeurs hypercomplexes comme nombres ordinaires plurivalents. A ce dernier travail, se rattachent les études analytiques de Petersen (267), Berloty (22) et Weyer (434), sur la théorie de ces nombres. Par contre la représentation géométrique en fut donnée par Schur (365) qui considère les composantes d'un nombre complexe à n membres, comme coordonnées d'un point du R_n ; il donne pour établir la liaison entre ces nombres l'interprétation géométrique et rattache leurs relations fonctionnelles à la théorie des transformations de Lie, étude continuée par Study (413-414) et Schaeffers (320).

Schendel (322) donne des applications des méthodes de Grassmann, à la géométrie à plusieurs dimensions ; enfin Simony (403) étudie les opérations fondamentales des nombres supérieurs complexes. L'étude de ces nombres et de leurs opérations a éclairci notablement la manière de les envisager et simplifié les calculs. On reconnut que des symboles incommodes et des calculs symboliques peuvent être remplacés de la façon la plus avantageuse par l'introduction de ces nombres et des opérations les concernant ; tous ces essais ont abouti enfin aux unités et opérations

de l'Ausdehnungslehre. Les tentatives d'extension de la théorie des quaternions à un plus grand nombre d'unités ont eu le même résultat : l'exemple de Chapman qui, à cet effet, utilisa un nouveau symbole sans remarquer que celui-ci avait la même action que la « multiplication extérieure » de Grassmann, le montre du reste ; dernièrement encore Shaw (399), quoique travaillant dans un autre but, fit une erreur tout analogue.

Pour terminer rappelons encore la question suivante bien souvent discutée : Quelles sont, parmi les nombreuses formes d'espace *abstraites* des mathématiques celles qui possèdent leur image *concrète* dans notre univers, (domaine de l'expérience). Il est indiscutable aujourd'hui que notre univers n'est pas pourvu de plus de trois dimensions et que tous les essais tendant à lui en ajouter une quatrième sont à rejeter. Il existe par contre une question encore non résolue, celle de savoir si cet espace est sans courbure plan ; ou si, d'après une hypothèse émise par Zöllner (439), il possède une courbure positive, fût elle même inappréciable. Rien ne fait présumer non plus que notre univers se trouve dans un espace à quatre dimensions *existant réellement* comme un plan dans un espace à trois dimensions. Il est vrai que Bresch (52) a formulé une hypothèse analogue pour expliquer certains faits chimiques. D'après Most (249) aucun fait physique ne nécessite une telle hypothèse. Simony (402) y opposa des considérations sur la matière.

On connaît une série de phénomènes cinématiques qui sont impossibles dans un espace à trois dimensions et qui, par contre, sont exécutables dans l'espace à quatre dimensions. C'est ainsi que Newcomb (252) montra qu'au moyen d'un passage par l'espace à quatre dimensions, une surface matérielle fermée pouvait, par flexion, être transformée de telle façon que le côté intérieur devienne côté extérieur et vice versa, Hoppe (171-172) et Durège (109) qu'une certaine courbe gauche fermée et pourvue d'un lacet pouvait en être privée par un passage au travers de l'espace à quatre dimensions, passage durant lequel la courbe reste fermée.

Si on considère pour clore cet aperçu, tout le développement actuel de la Géométrie à n dimensions, développement qui est encore loin d'être terminé, on doit reconnaître que l'apparition de cette branche des mathématiques marque une ère nouvelle

dans l'histoire de la Géométrie ; de nouvelles voies sont ainsi ouvertes aux chercheurs dans des domaines inexplorés, et la Géométrie, même en restant dans son ancien domaine intuitif, est fructifiée et enrichie à bien des égards.

D^r^ Victor Schlegel (Hagen, Prusse).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE [1]

Amodeo. — 1. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine n normali di uno S_{n-1}. *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

2. Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche, armoniche ed equianarmoniche. *Annali di mat.* (2), 19, 1891.

3. Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno S_r. *Torino Atti*, 26, 1891.

4. Sulla linearità delle varietà ad un numero qualunque di dimensioni. *Riv. di Mat.* 2, 1892.

5. Un' osservazione sulle condizioni lineari della geometria. *Annali del. R. Ist. Tecn. e Naut. di Napoli*, 1892.

Andrade. — 6. Sur un point de doctrine relatif à la théorie des intégrales multiples. *C. R.*, 119, 1894.

Arnoux. — 7. Essais de psychologie et de métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques. Paris, 1894.

Aschieri. — 8. Sulla trasformazione omographica generale di uno spazio lineare di specie qualunque. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 18, 1885.

9. Delle corrispondenze lineari reciproche in uno spazio lineare di specie qualunque. *Lomb. Rend.* (2), 19, 1886.

10. Sulla curva normale di uno spazio a quattro dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 4, 1887.

11. Sulle omografie binarie e ternarie. — Sulle omografie binarie e i loro prodotti. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 24, 1891.

12. Fondamenti di geometria analitica. *Modena Mem.* (2), 11, 1895.

Ascione. — 13. Sulla Hessiana di una varietà nello spazio a 4 dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

Autonne. — 14. Sur les variétés unicursales à deux dimensions. *C. R.*, 121, 1895.

15. Sur les variétés unicursales à trois dimensions *C. R.*, 121, 1895.

Ball. — 16. A hypothesis relating to the nature of the ether and gravity. *Mess.* (2), 21, 1891.

Banal. — 17. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. *Annali di Mat.* (2), 24, 1896.

Becker. — 18. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. *Schlömilch Z.*, 17, 1872.

---

[1] Les titres des journaux sont abrégés en accord avec le *Jahrbuch uber die Fortschritte der Mathematik*. Berlin.

Beez. — 19. Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung. *Math. Ann.*, 7, 1874; *Schlömilch Z.*, 20, 1875; 21, 1876; 24, 1879.

Beltrami. — 20. Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. *Batt. G.*, 6, 1868.

21. Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. *Brioschi Ann.* (2), 2, 1868.

Berloty. — 22. Thèse d'analyse. Théorie des quantités complexes à *n* unités principales. Paris, 1886.

Bertini. — 23. Le omografie involutorie in uno spazio lineare a quasivoglia numero di dimensioni. *Lomb. Rend.* (2), 19, 1886.

24. Sui fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.

25. Sulla geometria degli spazi lineari in uno spazio ad *n* dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 19, 1886.

26. Costruzione delle omographie di uno spazio lineare qualunque. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 20, 1887.

27. Sulle scomposizione di certe omografie in omologie. *Torino Atti*, 22, 1887.

28. Intorno ad alcuni teoremi della geometria sopra una curva algebrica. *Torino Atti*, 26, 1890.

29. Sugli spazi lineari delle quadriche a numero pari di dimensioni. *Torino Atti*, 30, 1895.

Berzolari. — 30. Sulle curve razionali di uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Annali di Mat.* (2), 21, 1893.

31. Sulle corrispondenze algebriche fra *r* punti di uno spazio lineare di quante si vogl'ano dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 4, 1895.

32. Sulle secanti multiple di una curva algebrica dello spazio a tre od a quattro dimensioni. *Palermo Rend.*, 9, 1895.

33. Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 5, 1896.

Bettazzi. — 34. Sulla rappresentazione analitica delle funz'oni di più variabili reali. *Pisa Ann.*, 5, 1888.

Betti. — 35. Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni. *Brioschi Ann.* (2), 4, 1871.

Bianchi. — 36. Ueber die Normalformen $3^{ter}u\ 5^{ter}$. Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung. *Math. Ann.*, 17.

Biermann. — 37. Ueber die regelmässigen Körper höherer Dimension. *Wien. Ber.*, 90, 1884.

38. Ueber die regelmässigen Punktgruppen in Rauмen höherer Dimension und die zugehörigen linearen Substitutionen mehrerer Variablen. *Wien. Ber.*, 95, 1887.

Bolyai. — 39. Tentamen juventutem stud. in elementa math... introducendi. *Maros Vasarhelyini* 1831. I Appendix.

Bordiga. — 40. Di alcune superficie del 5° e del 6° ordine che si deducono dello spazio a sei dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

41. Rappresentazione piana della superficie rigata normale. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

42. La surface du sixième ordre avec six droites. *C. R.*, 102, 1886.

43. Nouveaux groupes de surfaces à deux dimensions dans les espaces à *n* dimensions. *C. R.*, 102, 1886.

44. Corrispondenza di polarità negli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (6), 3, 1886.

45. Complessi e sistemi lineari di raggi negli spazi superiori. Curve normali che essi generano. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

46. La superficie del 6° ordine con 10 rette nello spazio R_3 e le sue proiezioni nello spazio ordinario. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 3, 1887.

47. Di una certa superficie del 7° ordine. *Ven. Ist. Atti* (6), 5, 1888.

48. Dei complessi in generale nello spazio a quattro dimensioni ed in particolare di alcuni di primo ordine. *Ven. Ist. Atti* (6), 6, 1888.

49. Di una certa congruenza del terzo ordine e della sesta classe dello spazio ordinario. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 6, 1890.

50. Congruenza del 4° ordine e della 2ª classe nello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 5, 1894.

Brambilla. — 51. Un teorema nella teoria delle polari. Torino Atti, 22, 1887.

Bresch. — 52. Der Chemismus im Lichte mehr dimensionaler Raumanschauung. Leipzig, 1882.

Brill A. — 53. Bemerkungen ueber pseudosphärische Mannigfaltigkeiten von rei Dimensionen. *Math. Ann.*, 26, 1885.

Brill J. — 54. On certain general properties of point transformations. *Quart. J.*, 27, 1895.

Brückner. — 55. Die Elemente der vierdimensionalen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Polytope. *Jahresber. d. Ver. f. Naturk.* Zwickau, 1893.

Brunel. — 56. Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à *n* dimensions. *Math. Ann.*, 19, 1881.

57. Sur l'analyse indéterminée et la géométrie à *n* dimensions. 1888.

Brunn. — 58. Ueber Curven ohne Wendepunkte. München. 1889.

Buchheim. — 59. On the theory of screws in elliptic space. *Lond. M. S. Proc.*, 15, 1884 ; 16, 1885 ; 17, 1886 ; 18, 1887.

Burali-Forti. — 60. Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune. *Palermo Rend.*, 4, 1890.

Busche. — 61. Ueber das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden. *Math Ann.*, 41, 1893.

Cannizzo. — 62. Varietà di rotazione nello spazio a cinque dimensioni. Roma, Tipografia Sallustiana, 1896.

Cantor. — 63. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. *Crelles Journ.*, 84, 1877.

64. — Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Gött. N.*, 1879.

65. — Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 20, 1882.

66. Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à *n* dimensions. *Acta Math.*, 2, 1883.

67. Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raume. *Acta Math.*, 7, 1885.

Cassani. — 68. Sugli angoli degli spazi lineari. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 1, 1885.

69. Geometria pura euclidea degli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (9), 1, 2, 1885, 1887. — *Batt. G.* 23, 1885.

70. Ricerche geometriche negli spazi superiori. *Ven. Ist. Atti* (6), 4, 1886.

71. Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.

72. Sulla geometria pura Euclidiana ad n dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 5, 1894.

73. Sugli angoli degli spazi lineari in un ambiente a più dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 6, 1895.

Castelnuovo. — 74. Angoli di due spazi contenuti nello spazio a n dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 3, 1885.

75. Sopra una congruenza del 3° ordine e 6ª classe dello spazio ordinario e sulle sue projezioni nello spazio ordinario. *Ven. Ist. Atti* 6), 5, 1888. — Sulle congruenze del 3° ordine dello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (6), 6, 1888.

76. Geometria sulle curve ellittiche. *Torino Atti*, 24, 1888.

77. Su certi gruppi associati di punti. *Palermo Rend.*, 3, 1889.

78. Una applicazione della Geometria enumerativa alle curve algebriche. *Palermo Rend.*, 3, 1889.

79. Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

80. Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

81. Ricerche di geometria sulle curve algebriche. *Torino Atti*, 24, 1889.

82. Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti* (7), 2, 1891.

83. Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti appartenente ad una curva algebrica. *Palermo Rend.*, 7, 1893.

Cauchy. — 84. *C. R.*, 24, 1847.

Cayley. — 85. A memoir on abstract geometry. *Lond. Phil. Trans.*, 160, 1870.

Cesaro. — 86. Alcune misure negli iperspazii. *Batt. G.*, 24, 1886.

87. Sur l'analyse barycentrique des courbes. *Annali di Mat.* (2), 15, 1889.

88. Sulla geometria intrinseca degli spazi curvi. *Atti dell' Acc. di Napoli* (2), 6, 1894.

89. Le formole di Codazzi negli iperspazii. *Napoli Rend.* (2), 8, 1894.

90. Le deformazioni infinitesime degli iperspazi *Napoli Rend.* (3), 1, 1895.

91. Lezioni di geometria intrinseca. *Napoli*, 1896.

Chapman. — 92. On some applications of the units of an n-fold space. *American J.*, 10, 1888.

Chizzoni. — 93. Sulle corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario ed i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni. *Atti dell' Acc. Gioenia di Sc. nat.* in Catania (3), 20, 1888.

Christoffel. — 94. Ueber die Transformation der homogenen Differential ausdrücke zweiten Grades. *Crelle's Journ.*, 70, 1869.

Clifford. — 95. Mathematical papers. London, 1882. p. 605.

96. Classification of loci. *Phil. Trans.*, 169.

Cole. — 97. On rotations in space of four dimensions. *Americ. J.*, 12, 1890.

Cosserat (E.). — 98. Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques. *C. R.*, 124, 1897.

Craig. — 99. Note on the projection of the general locus of space of four dimensions into space of three dimensions. *Americ J.*, 2, 1879.

100. On certain metrical properties of surfaces. *Americ. J.*, 4, 1882.

Darboux. — 101. *Math. Ann.*, 5, 1872, p. 256.

102. Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques. *Bord. Mém.*, 9, 1873.

Dedekind. — 103. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Gött. Nachr.*, 1885.

Deruyts. — 104. Sur une propriété commune aux courbes normales des espaces linéaires. *Belg. Bull.* (3), 17, 1889.

105. Sur la correspondance homographique entre les éléments de deux espaces linéaires quelconques. *Belg. Mém.*, 23, 1892.

Dickstein. — 106. Bericht über die Arbeiten ausdem Gebiete der polydimensionalen Geometrie. *Prace mat. fiz.*, 1, 1888.

Dühring. — 107. Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin, 1873.

Durège. — 108. Ueber Körper von vier Dimensionen. *Wien. Ber.*, 83, 1881.

109. Ueber die Hoppe'sche Knotenkurve. *Wien. Ber.*, 1880.

Dyck. — 110. Beiträge zur Analysis situs. II. *Math. Ann.*, 37, 1890.

Eberhard. — 111. Ein Satz aus der Topologie, *Math. Ann.*, 36, 1890.

Eichler. — 112. Verallgemeinernde Betrachtungen über unsere Raumauffassung und ihre Verwendung für die analytische Geometrie. *Progr. Lingen*, 1874.

Emsmann. — 113. Zum vieraxigen Coordinatensystem. *Hoffmann Z.*, 11, 1880.

Engel. — 114. Zur Theorie der Zusammensetzung der endlichen continuirlichen Transformationsgruppen. *Leipzig Ber.*, 1886.

115. Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie. *Leipz. Ber.*, 1887.

Enriques. — 116. Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

117. Le omografie cicliche negli spazii ad n dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

118. Le omografie armoniche negli spazii lineari ad *n* dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

119. Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a quattro dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

120. Die Axiome der Geometrie. Leipzig, 1877. — Cf. Schlegel. Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke. Leipzig, 1878, p. 20.

Fabri. — 121. Sopra le funzioni di iperspazii. *Ven. Is. Atti* (7), 4, 1893.

122. Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono da altre funzioni e da linee. *Torino Atti*, 25, 1890.

Fano. — 123. Sui postulati fondamentali della geometria projettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. *Batt. G.*, 30, 1892.

124. Studiodi alcuni sistemi di rette considerati come superficie dello spazio a cinque dimensioni. *Annali di Mat.* (2), 21, 1893.

125. Sopra le curve di dato ordine e dei massimi generi in uno spazio qualunque. *Torino Mem.* (2), 44, 1894.

126. Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni projettive in sè. *Ven. Ist. Atti* (7), 7, 1896.

127. Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè. *Palermo Rend.*, 10, 1896.

128. Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive. *Palermo Rend.* 10, 1896.

129. I gruppi continui primitivi di trasformazioni Cremoniane dello spazio. *Acc. Real. delle Sc. di Torino*, 1898.

130. I gruppi di Jonquières generalizati. *Acc. Real. delle Sc. di Torino*, 1898.

Farjon. — 131. Note de Géométrie. *Nouv. Ann.* (3), 14, 1895.

Fiedler. — 132. Zur Geschichte und Theorie der elementaren Abbildungsmethoden. *Vierteljahrschr. d. naturf. Ges. in Zürich*, 27, 1882. Anhang.

Fine. — 133. A theorem respecting the singularities of curves of multiple curvature. *American J.*, 9, 1887.

Fontené. — 134. L'hyperspace à $(n-1)$ dimensions. Propriétés métriques de la corrélation générale. Paris, 1892.

Forchhammer. — 135. Pröver paa geometrie med fire dimensioner. *Zeuthen T.* (4), 5, 1881.

Frahm. — 136. Habilitationsschrift. Tübingen, 1873.

Frattini. — 137. I gruppi a k dimensioni. *Rom. Acc. L.* (3), 8, 1884.

Galdeano. — 138. Nota acerca de los poliedros de cuatro dimensiones. *Progreso mat.*, 2, 1892.

139. Las modernas generalizaciones expresadas por el algebra simbolica, las geometrias no-euclideas y el concepto de hiper-espazio. Madrid, 1896.

Gauss. — 140. *Briefwechsel* mit Schumacher. 2, 269, 431; 5, 47.

Geiser. — 141. Sopra una quistione geometrica di massimo e sua estenzione ad uno spazio di n dimensione (1868).

Genocchi. — 142. Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques. *Bull. de Belg.* (2), 36, 1873.

Gilles. — 143. Die Grundlagen der Mathematik. *Bayr. Bl.*, 18.

Giudice. — 144. Sulla corrispondenza fra due iperspazii. *Batt. G.*, 29, 1891.

Goursat. — 145. Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace. *Ann. de l'Éc. Norm.* (3), 6, 1889.

Grassmann. — 146. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig, 1844. — Die Ausdehnungslehre von 1844. Leipzig, 1878. — Gesammelte math. u. phys. Werke 1., 1. Leipzig, 1894.

Hait. — 147. La quarta dimensiou. *Soc. Argentinea.* 30, 1890.

Hall. — 148. The projection of fourfold figures upon a three-flat. *American J.*, 15, 1893.

Halphén. — 149. Recherches de géométrie à n dimensions. *Bull. S. M. F.*, 2, 1873.

Halsted. — 150. Bibliography of hyperspace and non-euclidian geometry. *Americ. J.*, 1, 2, 1878, 1879.

Harmuth. — 151. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren. *Hoppe Arch.*, 69, 1882.

Helmholtz. — 152. Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Gött. N.* 14, 1868.

Hess. — 153. Ueber die regulären Polytope höherer Art. *Marburg. Ber.*, 1885.

154. Ueber regelmässige Eintheilungen des dreidimensionalen sphärischen Raumes. *Marburg. Naturf. Ges. Ber.*, 1895.

Heyl. — 155. Properties of the locus $r =$ constant in space of n dimensions. *Publ. University of Pennsylvania*, 1897.

156. [Modèles des solides réguliers à quatre dimensions.] Philadelphia, 1897.

Hilbert. — 157. Ueber Singularitäten der Discriminantenfläche. *Math. Ann.*, 30, 1887.

Hirst. — 158. On the correlation of two spaces, each of three dimensions. *Lond. M. S., Proc.* 21, 1890.

Hoppe. — 159. Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen. *Hoppe Arch.* 64, 1879.

160. Ueber dreifach gekrümmte Curven und deren Parallelen. *Hoppe Arch.*, 65, 1880.

161. Ueber den Winkel von n Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 66, 1881.

162. Berechnung einiger vierdehniger Winkel. *Hoppe Arch.*, 67, 1882.

163. Innere Winkel aller regelmässigen linear begrenzten Figuren von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 68, 1882.

164. Ueber die Stellung der Ebene in der Vierdimensionen-Geometrie. *Hoppe Arch.*, 68, 1882.

165. Drei Sätze für Inhaltsberechnung in der Mehrdimensionen-Geometrie. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

166. Partielles Maximum eines Elementar-Tetratops. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

167. Numerische Berechnung der Winkel von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.* 69, 1883.

168. Relation zwischen fünf Elementar-Tetratopen mit vier unabhängigen Grössen. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

169. Tetratop auf beliebiger Basis. *Hoppe Arch.*, 69, 1883.

170. Regelmässige linear begrenzte Figuren von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 67, 1882.

171. Gleichung der Curve eines Bandes mit unauflösbarem Knoten, nebst Auflösung in vierter Dimension. *Hoppe Arch.*, 64, 1879.

172. Bemerkung, betr. die Auflösung eines Knotens in vierter Dimension. *Hoppe Arch.*, 65, 1880.

173. Regelmässig linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 3, 1885.

174. Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf n Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 3, 1886.

175. Das n-dehnige $(n+1)$ — Eck in Beziehung auf seine Hauptträgheits saxen. *Hoppe Arch.* (2), 5, 1887.

176. Erweiterung zweier Sätze auf n Dimensionen. *Hoppe Arch.* 2) 6, 1887.

177. Principien der n-dimensionalen Curventheorie. *Hoppe Arch.* 2), 6, 1888.

178. Erweiterung der Sätze über das Tetraeder, dessen Hohen sich in

einem Punkte schneiden, auf mehr Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 9, 1890.

179. Ueber Congruenz und Symmetrie der Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 9, 1890.

180. Fundamentalaxen der mehrfach gekrümmten Linien. *Hoppe Arch.* (2), 11, 1892.

181. Bedingung, unter der vier von einem Punkt aus gesehene Punkte in einem Raume liegen. *Hoppe Arch.* (2), 13, 1894.

182. Oskulirende Kugel nebst den analogen Gebilden für n Dimensionen. *Hoppe Arch.* (2), 12, 1894.

G. D. H. — 183. Anmaerkninger rörande kroppan af högre Dimensioner. *Zeuthen Fidskr.* (5), 6, 1888.

Jenrich. — 184. Beiträge zur Methodik des math. Unterrichts. *Progr.* Magdeburg, 1882.

Joly. — 185. The associative algebra applicable to hyperspace. *Proc. Irish Acad.* (3), 5, 1898.

Jordan. — 186. Essai sur la géométrie à n dimensions. *C. R.*, 75, 1872: *Bull. S. M. F.*, 3, 1875.

187. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. *C. R.*, 79, 1874.

188. Généralisation du théorème d'Euler sur la courbure des surfaces. *C. R.*, 79, 1874.

Kantor. — 189. Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à r dimensions. *Bull. S. M. F.*, 8, 1880.

190. Ueber eine Gattung von Configurationen in der Ebene und im Raume. *Wien. Ber.*, 1879, p. 227.

191. Sopra le caratteristiche delle trasformazioni quadratiche nello spazio a r dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 27, 1894.

192. Sopra le trasformazioni quadratiche periodiche nello spazio a r dimensioni. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 27, 1894: 28, 1895.

193. Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen. *American J.*, 18, 1896.

Killing. — 194. Ueber zwei Raumformen mit constanter Krümmung. *Crelle's J.*, 86, 1878.

195. — Grundbegriffe und Grundsätze der Geometrie. *Progr.*, Brilon, 1880.

196. Die Rechnung in den nichteuklidischen Raumformen, *Crelle's J.*, 89, 1880.

197. Ueber die nichteuklidischen Raumformen von n Dimensionen. Braunsberg, 1885.

198. Erweiterung des Raumbegriffes. *Prog.*, Braunsberg, 1884.

199. Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig, 1885.

200. Die Mechanik in den nichteuklidischen Raumformen, *Crelle's J.*, 98, 1885.

201. Zur Theorie der Lie'schen Transformationsgruppen. *Prog.*, Braunsberg, 1886.

202. Ueber die Grundlagen der Geometrie. *Crelle's J.*, 109, 1892.

203. Einführung in die Grundlagen der Geometrie I. Paderborn, 1893.

204. Zur projectiven Geometrie, *Math. Ann.*, 43, 1893.

205. Klein. Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. *Math. Ann.*, 5, 1872.

206. Ueber einen liniengeometrischen Satz. *Gött. N.*, 1872 ; *Math. Ann.*, 22.

207. Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen. *Katalog d. math. Ausstellung*, München, 1892.

Kretkowski. — 208. (Auflösung einer Aufgabe aus der polydimensionalen Geometrie). Paris, Denkschr, 1881.

Kronecker. — 209. Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variablen. *Berl. Monatsber*, 1869.

Kuehne. — 210. Beiträge zur Lehre von der *n*-fachen Mannigfaltigkeit. *Dissert*, Berlin, 1892 ; *Hoppe Arch.* (2), 11, 1892.

Laisant. — 211. Principes de la méthode de M. Arnoux concernant l'étude des espaces arithmétiques hypermagiques. *S. M. F. Bull.*, 22 (1894).

Landsberg (O.). — 212. Untersuchungen über die Gruppein einer linearen fünffachen Mannigfaltigkeit. *Dissert.*, Breslau, 1889.

Landsberg (G.). — 213. Zur Theorie der Krümmungen eindimensionaler, in höheren Mannigfaltigkeiten enthaltener Gebilde. *Crelle's J.*, 114, 1895.

Lasker (E.). — 214. Metrical relations of plane spaces of *n* dimensions. *Nature*, 52, 1895.

215. About a certain class of curved lines in space of *n* manifoldness. *Nature*, 52, 1895.

Leibniz. — 216. Lettre à Huygens, 1679. Cf. Hankel. Theorie der complexen Zahlensysteme. Leipzig, 1867.

Lie. — 217. Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht. *Gott. N.*, 1871.

218. Zur Theorie eines Raumes von *n* Dimensionen. *Gött. N.*, 1871.

219. Neue Integrationsmethode partieller Gleichungen erster Ordnung zwischen *n* Variablen. *Forh. af. Christ.* 1872 ; *Gött. Nachr.*, 1872.

219[3]. Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten. *Math. Ann.*, 25, 1885.

Liers. — 220. Ueber den Inhalt des vierdimensionalen Pentaeders. *Hoppe Arch.* (2), 12, 1894.

Lipschitz. — 221. Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von *n* Variablen. *Crelle's J.*, 70, 1869 ; 72, 1870.

222. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von *n* Differentialen. *Crelle's J.*, 71, 1870.

223. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung. *Crelle's J.*, 74, 1872.

224. Extension of the planet-problem to a space of *n* dimensions and of constant integral curvature. *Quart. J.*, 12, 1873.

225. Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. *Berl. Monatsber.*, 1872 ; *Crelle's J.*, 78, 1874.

226. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. *C. R.*, 82 ; *Crelle's J.*, 81, 1876.

227. Beitrag zur Theorie der Krümmung. *Crelle's J.*, 81, 1876.

228. Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges. *Crelle's J.*, 82, 1877.

229. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. *Berl. Ber.*, 1882.

230. Sur la théorie des diversités. *C. R.*, 102, 1886.

Lobatschewsky. — 231. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, 1840.

Loria. — 232. Su una generalizzazione delle proprietà involutorie del quadrangolo e del quadrilatero completi. *Lomb. Rend.* (2), 18, 1885.

233. Le definizioni di spazio a n dimensioni, etc. *Batt. G.*, 25, 1887.

234. Sul concetto di volume in uno spazio lineare qualunque. *Batt. G.*, 26, 1888.

235. Intorno alle curve razionali d'ordine n dello spazio a $(n-1)$ dimensioni. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

236. Sulle curve razionali normali in uno spazio a n dimensioni. *Batt. G.*, 26, 1888.

237. Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie. *Batt. G.*, 27, 1889.

238. Sugli enti geometrici generali da forme fondamentali in corrispondenza algebrica. *Batt. G.*, 34, 1896.

Maccaferri. — 239. Sugli insiemi continui e sugli insiemi connessi. *Rivista di Mat.*, 4, 1894.

Mansion. — 240. Sur la portée philosophique de la métagéométrie. *Brux S. sc.*, 17 A, 1893.

Maschke. — 241. The representation of finite groups especially of the Rotation groups of the regular bodies of three and fourdimensional space by Cayley's color-diagrams. *American J.*, 18, 1895.

Mehmke. — 242. Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viel Dimensionen. *Hoppe Arch.*, 70, 1883.

Meyer (F.). — 243. Apolarität und rationale Curven. Tübingen, 1883.

244. Ein neues Theorem a. d. projectivischen Geometrie von n Dimensionen. *Württembg. Correspondenzbl.*, 1884.

Millosi. — 245. Sulla impossibile coesistenza della univocità e della continuità nella corrispondenza che si può stabilire fra due spazi continui ad un numero differente di dimensioni. *Rivista di Mat.*, 2, 1892.

Mlodzieiowski. — 246. Ueber mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten. *Mosk. Nachr. Phys. Math. Abth.*, B, 8, 1889.

Monro. — 247. On flexure of spaces. *Lond. M. S. Proc.*, 9, 1878.

Moore. — 248. Algebraic surfaces of which every plane section is unicursal in the light of n-dimensional geometry. *American J.*, 10, 1887.

Most. — 249. Neue Darlegung der absoluten Geometrie und Mechanik, mit Berücksichtigung der Frage nach den Grenzen der Weltraumer. *Progr.*, Coblenz, 1883.

Mueller. — 250. Die vierte Raumdimension. *Hoffmann Z.*, 12, 1881, p. 50.

Mueller (R.). — 251. Ueber eine gewisse Gleichung $2\,n^{\text{ten}}$ Grades. *Dissert.*, Berlin, 1884.

Nagy. — 252. Sulla recente questione intorno alle dimensioni dello spazio. *Rivist. Ital. di Filosofia*, 1, 1890.

Nanson. — 253. The content of the common self-conjugate n-gon of two n-ary quadrics. *Messenger* (2), 26, 1896.

NETTO. — 254. Beitrag zur Mannigfsltigkeitalehre. *Crelles Journ.*, 86, 1878.

NEWCOMB. — 255. Note on a class of transformations which surfaces may undergo in space of more than three dimensions. *American J.*, 1, 1878.

NICOLI. — 256. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni di una equazione lineare a quattro variabili. *Modena Mem* (2), 7, 1890.

257. Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni reali di una equazione quadratica a quattro variabili. *Modena Mem.* (2), 8, 1892.

258. Intorno agli spazi lineari a tre dimensioni considerati nel nostro spazio. *Modena Mem.* (2), 10, 11, 1895.

VAN OSS. — 259. Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen. *Dissert.* Giessen, 1894.

D'OVIDIO. — 260. Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante sì vogliano dimensioni e di curvatura costante. *Acc. R. d. L.* (3), 1; *Math. Ann.*, 12, 1877.

PAGE. — 261. Transformation groups in space of four dimensions. *Annals of Math.*, 9, 1894.

262. On the primitive groups of transformations in space of four dimensions. *American J.*, 10, 1888.

PALATINI. — 263. Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a quattro dimensioni fondata sopra una corrispondenza univoca dei punti reali ed immaginari di R_2 coi punti reali di R_4. Palmi. Fip. G. Lopresti, 1891.

PANNELLI. — 264. Sulla più semplice trasformazione birazionale dello spazio ordinario rigato in uno spazio lineare a quattro dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 6, 1890.

DE PAOLIS. — 265. Sulle corrispondenze continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi. *Annali di Mat.* (2), 18, 1890.

PEDDIE. — 266. The theory of contours and its applications in physical science. *Edinb. M. S. Proc.*, 4, 1886

PETERSEN. — 267. Ueber n-dimensionale complexe Zahlen. *Gött. Nachr.*, 1877.

DEL PEZZO. — 268. Sulle quadriche ad n-1) dimensioni polari reciproche di sè stesse rispetto ad un altra. *Nap. Rend.*, 24, 1885.

269. Sulle superficie di ordine n immerse nello spazio di $n + 1$ dimensioni. *Nap. Rend.*, 24, 1885.

270. Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni. *Nap. Rend.*, 25, 1886.

271. Sulle projezioni di una superficie e di una varietà dello spazio ad n dimensioni. *Nap. Rend.*, 25, 1886.

272. Intorno ad una proprietà fondamentale delle superficie e delle varietà immerse negli spazi a più dimensioni. *Napoli Rend.* (2), 1, 1887.

273. Sulle superficie e le varietà a più dimensioni le cui sezioni sono curve normali del genere p. *Annali di Mat.* (2), 15, 1887.

274. Sulle superficie del n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni. *Palermo Rend.*, 1, 1887.

275. Extensione di un teorema di Noether. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

276. Appunti di geometria ad n dimensioni. *Batt. G.*, 31, 1893.

277. Alcuni sistemi omaloidici di quadriche nello spazio a quattro dimensioni. *Napoli Rend.* (3), 1, 1895.

278. Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni. *Napoli Rend.* (3), 2, 1896.

279. Formole e generalità sulla trasformazione cremoniana degli indici 2, 4, 8, fra spazi a quattro dimensioni e suoi casi particolari. *Napoli Rend.* (3), 3, 1897.

Philippow. — 280. Lobatschefsky's Raum und mehrfach ausgedehnter Raum. *Wissenfch. Revue*, 1894.

Pieri. — 281. Sul principio di corrispondenze in uno spazio lineare qualunque ad n dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 3, 1887.

282. Sopra un teorema di geometria a n dimensioni. *Batt. G.*, 26, 1888.

283. Sulla geometria projettiva delle forme di 4^a specie. *Batt. G.*, 28, 1890.

284. Sulla corrispondenza algebrica fra due spazi rigati. *Torino Atti*, 25, 1890.

285. Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio a n dimensioni. *Palermo Rend.*, 5, 1891.

286. Sopra un problema di geometria enumerativa. *Batt. G.*, 30, 1892.

287. Sul problema degli spazi secanti. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 26, 1893, 27, 1894.

288. Sul problema degli spazi secanti. Nota 3ª. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 28, 1896.

Pilgrim. — 289. Ueber die Anzahl der Theile, in welche ein Gebiet K^{ter} Stufe (Grassmann) durch n Gebiete $(k-1)^{ter}$ Stufe getheilt werden kann. *Schlömilch Z.*, 24, 1879.

Pincherle. — 290. Applicazione alla geometria d'una osservazione d'aritmetica. *Bologna Rend.*, 1892, 1893.

Pirondini. — 291. Sulle linee a tripla curvatura nello spazio euclideo a quattro dimensioni. *Batt. G.*, 28, 1890.

Poincaré. — 292. Sur l'analysis situs. *C. R.*, 115, 1892,

293. Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *C. R.*, 117, 1893.

Predella. — 294. Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. *Annali di mat.* (2), 17, 1889.

295. Sulla teoria generale delle omografie. *Torino Atti*, 27, 1892.

Puchta. — 296. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper im Raume von vier Dimensionen nebst einem allgemeinen Satz aus der Substitutions theorie. *Wien. Ber.*, 89, 1883.

297. Analytische Bestimmung der regelmässigen convexen Körper in Räumen von beliebiger Dimensionenzahl. *Wien. Ber.*, 90, 1884.

298. Ueber die allgemeinsten abwickelbaren Räume, ein Beitrag zur mehrdimensionalen Geometrie. *Wien. Ber.*, 101, 1892.

299. Erweiterung einer Gauss'schen Flächensatzes auf mehrdimensionale Räume. *Prag. Math. Ges.*, 1892.

300. Aufstellung eines neuen dreifach orthogonalen Flächensystems. *Wien. Ber.*, 102, 1893.

Rahnsen. — 301. Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de géométrie à n dimensions. *Delft. Ann. de l'Ec. Polyt.*, 4, 1888.

del Re. — 302. Sui sistemi lineari n-pli di n-spazii. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

303. Un teorema nella geometria di una certa classe di corrispondenze. *Batt. G.*, 26, 1888.

304. Sui gruppi completi di tre trasformazioni lineari involutorie negli spazi ad *n* dimensioni. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 6, 1890.

305. Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa. *Rom. Acc. L. Rend.*, (5), 5, 1896.

RICCI. — 306. Annali di Mat. (2), 12, p. 135.

307. Sui sistemi di integrali independenti di una equazione lineare ed omogenea a derivate parziali di 1° ordine. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 2, 1886.

308. Sulla teoria degli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.*, (5), 4, 1895.

309. Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque. *Rom. Acc. L. Mem.*, (5), 2, 1896.

RIEMANN. — 310. Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Gött. N.*, 13, 1867.

DE LA RIVE. — 311. Sur l'emploi d'une quatrième dimension. *C. R.* 120, 1895.

ROSANES. — 312. Zur Theorie der reciproken Verwandtschaften *Crelle's J.*, 90, 1881.

313. Erweiterung eines bekannten Satzes auf Formen von beliebig vielen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 23, 1884.

RUDEL. — 314. Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie. Bamberg, 1877.

315. Sich kreuzende Ebenen zweier Räume. *Bayr. Bl.* 13, 1877.

316. Congruenz und Symmetrie. *Bayr. Bl.* 13, 1877.

317. Vom Körper höherer Dimension. *Progr.* Kaiserslautern, 1882.

318. Ueber eine Gattung von Körpern höherer Dimension. Fürth, 1887.

SCHAPIRA. — 319. Anwendung der Cofunktionen auf die Integration linearer Differentialgleichungen. *Togebl. d. Naturforscher-Vers.* 1884, p. 61.

SCHEFFERS. — 320. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. — Ueber die Berechnung von Zahlensystemen. *Leipz. Ber.* 41, 1889.

SCHEFFLER. — 321. Die polydimensionalen Grössen und die vollkommenen Primzahlen. Braunschweig, 1880.

SCHENDEL. — 322. Grundüzge der Algebra nach Grassmann'schen Prinzipien. Halle, 1885.

323. Die *r*-stufige Determinante n^{ten} Grades. *Schlömilch. Z.* 32, 1887.

SCHERING. — 324. Linien, Flächen und höhere Gebilde im mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Raume. *Gött. N.* 1873.

325. Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gauss'schen und Riemann'schen Räumen. *Gött. N.* 1873.

326. Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Mass von der Bewegung der Körper abhängt. *Gött. Abh.* 18, 1873.

SCHLAFFLI. — 327. Ueber invariante Elemente einer orthogonalen Substitution. *Crelles J.* 56, 1859, 65, 1866.

SCHLEGEL. — 328. Quelques théorèmes de géométrie à *n* dimensions. *Bull. S. M. F.*, 10, 1882.

329. Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. *Nova Acta d. Leop. Carol. Akad.* 44, 1883.

330. Ueber die Auflösung des Doppelpunktes einer ebenen Curve im dreidimensionalen Raume. *Schloemilch. Z.* 28, 1883.

331. Sur le système de coordonnées réciproque à celui des coordonnées polaires. *Ass. Franç.* 1885 (Congrès de Grenoble).

332. Sur un théorème de géométrie à quatre dimensions. *Ass. Franç.*, 1887 (Congrès de Toulouse).

333. Ueber den sogenannten vierdimensionalen Raum. Berlin. Dümmler) 1888.

334. Sur une méthode pour représenter dans le plan les solides homogènes à n dimensions. *Palermo Rend.*, 5, 1891.

335. Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welche r beliebige Punkte im n-dimensionalen Raume bilden können. *Hoppe Arch.* (2), 10, 1891.

336. Ueber congruente Raumtheilungen. *Hoppe Arch.* (2), 1891.

337. Sur une méthode pour représenter dans le plan les cubes magiques à n dimensions. *Bull. S. M. F.* 20, 1892.

338. Projectionsmodelle der regelmässigen vierdimensionalen Körper. Darmstadt, 1886. — Ueber Projectionen der mehrdimensionalen regelmässigen Körper. *Deutsche Math. Ver.* 2, 1893.

Schlumberger. — 339. Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme. *Dissert.* Zürich, 1869.

Schoenflies. — 340. Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen aufeinander. *Gött. Nachr.*, 1896.

Schoute. — 341. Voordracht over de regelmatige lichamen in ruimte van meer dimensies. Algemeene Vergadering van het derde natuuren scheikundig congres to Utrecht, 1891.

342. Le déplacement le plus général dans l'espace à n dimensions. *Delft Ann. de l'Éc. Polyt.* 7, 1891.

343. Regelmässige Schnitte und Projectionen des Achtzells, Sechzehnzells und Vierundzwanzigzells im vierdimensionalen Raume. *Amst. Akad. Verh.*, Sect. 1, Deel. 2. 1893.

344. Regelmassige Schnitte und Projectionen des Hunderszwanzigzells und Sechshundertzells im vierdimensionalen Raume. *Amst. Akad. Verh.*, Sect. 1, Deel 2, 1893.

345. Sur trois divisions régulières de l'espace à n dimensions. *Assoc. Franç.* 1894. (Congrès de Caen).

346. Sur les types de cristaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions. *Assoc. Franç.* 1895. (Congrès de Bordeaux).

347. Het vierdimensionale prismoïde. *Amsterd Verhandl d. Akad.* 5, 1896.

348. Quelques figures à $(n+2)$ inversions dans l'espace à n dimensions. *Arch. Teyler.* (2), 5, 1896.

Schubert. — 349. Ueber eine gewisse Familie von Configurationen. *Hamb. Mitt.*, 1884.

350. Die dimensionalen-n Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dass es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden. *Hamb. Mitt.*, 1884.

351. Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anmahlen unseres Raumes. *Math. Ann.*, 26, 1885.

352. Die n-dimensionale Verallgemeinerung der Anzahlen für die vielpunktig berührenden Tangenten einer punktallgemeinen Fläche m^{ten} Grades. *Math. Ann.* 26, 1885.

353. Lösung des Characteristiken Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. *Hamb. Mitt.*, 1886.

354. Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension. *Acta Math.*, 8., 1896.

355. Ueber Räume 2^h Grades. *Hamb. Mitt.*, 1889.

356. Kegelschnitt-Anzahlen als Funktionen der Raumdimension *n*. *Hamb. Mitt.*, 1890.

357. Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren characteristischen Bedingungen. *Math. Ann.*, 38, 1891.

358. Mittheilung aus der abzählenden Geometrie *p*-dimensionaler Räume 1^{ten} *u.* 2^{ten} Grades. *Naturf. Ges. Halle.*, 64, 1891.

359. Beitrag zur Liniengeometrie in *n*-Dimensionen. *Hamb. Mitt.*, 1892.

360. Mittheilungen a. d. abzählenden Geometrie *p*-dimensionaler Räume ersten und zweiten Grades. *Deutsche Math. Ver.*, 1, 1892.

361. Allgemeine Anzahlfunktionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume 2^{ten} Grades in *n* Dimensionen. *Math. Ann.*, 45, 1894.

Schumacher. — 362. Klassifikation der algebraischen Strahlensysteme. *Math. Ann.*, 37, 1890.

Schur. — 363. Ueber die Deformation der Räume constanten Riemannschen Krümmungsmasses. *Math. Ann.*, 27, 1886.

364. Ueber die Deformation eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume. *Math. Ann.*, 28, 1887.

365. Zur Theorie der aus *n* Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlen. *Math. Ann.*, 33, 1888.

Segre. — 366. Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensione. *Torino Mem.* (2), 36, 1884.

367. Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche. *Torino Mem.* (2), 36, 1884.

368. Ricerche sui fasci di coni quadrichi in uno spazio lineare qualunque. *Torino Atti.*, 19, 1884.

369. Sulle teorie e sulle classificazione delle omographie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (3), 19, 1884.

370. Etude des différentes surfaces du quatrième ordre à conique double ou cuspidale considérées comme des projections de l'intersection de deux variétés quadratiques de l'espace à quatre dimensions. *Math. Ann.*, 24, 1884.

371. — Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque. *Torino Atti.* 19, 1884.

372, 373. Ricerche sulle omographie e sulle correlazioni in generale e particolamente su quelle dello spazio ordinario considerate nella geometria della retta. *Torino Mem.* (2), 37, 1885.

374. Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie simplici razionali di piani. *Torino Atti.*, 21, 1886.

375. Remarques sur les transformations uniformes des courbes elliptiques en elles-mêmes. *Math. Ann.*, 27, 1886.

376. Sugli spazi fondamentali di un'omographia. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 2, 1886.

377. Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine. *Torino Atti.*, 21, 1886.

378. Sur un théorème de la géométrie à *n* dimensions. *Math. Ann.*, 30, 1887.

379. Nuovi resultati sulle rigate algebriche di genere qualunque. *Torino Atti.*, 22, 1887.

380. Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. *Math. Ann.*, 30, 1887, 34, 1889.

381. Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazii. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 3, 1887.

382. Sulla varietà cubica con dieci punti doppii dello spazio a quattro dimensioni. *Torino Atti.*, 22, 1887.

383. Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p. *Palermo Rend.*, 1, 1887.

384. Intorno alla geometria su una rigata algebrica. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 3, 1887.

385. Sulle curve normali di genere p dei varii spazii. *Lomb. Ist. Rend.* (2), 21, 1888.

386. Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a quattro dimensioni. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

387. Un osservazione sui sistemi di rette degli spazii superiori. *Palermo Rend.*, 2, 1888.

388. Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario. *Torino Mem.* (2) 39, 1888.

389. Sulle variatà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. *Palermo Rend.* 5, 1891.

390. Sulla forma Hessiana. *Rom. Acc. L. Rend.* (5), 4, 1895.

391. — Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche. *Torino Atti.*, 31, 1896.

Sharp. — 392. Solution of question 8242. *Ed. Times*, 47, 1887.

393-394. On the properties of simplicissima (with especial regard to the related spherical loci). *Lond. M. S. Proc.*, 18, 1887.

395. On simplicissima in space of *n* dimensions. *Lond. M. S. Proc.*, 19, 1888.

396. Solution of question 9098. *Ed. Times*, 48, 1888.

Sharp et Sylvester. — 397. Solution of questions 8864 and 9004. *Ed. Times*, 48, 1888.

398. On simplicissima in space of *n* dimensions. *Lond. M. S. Proc.*, 21, 1890.

Shaw. — 399. Development of the Λ-process in quaternions, with a geometrical application. *American J.*, 19, 1897.

Simony. — 400. Ueber jene Flächen, welche aus ringförmig geschlossenen knotenfreien Bändern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugt werden. *Wien. Ber.*, 1880.

401. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. *Math. Ann.*, 19, 1882 : 24, 1884.

402. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. *Wien. Anz.*, 1882.

403. Ueber zwei universelle Verallgemeinerungen der algebraïschen Grund operationen. *Wien. Ber.*, 1885.

Spottiswoode. — 404. Sur la représentation des figures de géométrie à *n* dimensions par les figures corrélatives de géométrie ordinaire. *C. R.*, 71, 1875.

405. Nouveaux exemples de représentation par des figures de géométrie, des conceptions analytiques de géométrie à *n* dimensions. *C. R.*, 71, 1875.

STAECKEL. — §06. Ueber die Differentialgleichungen der Dynamik und den Begriff der analytischen Aequivalenz dynamischer Probleme. *Crelle's J.*, 107, 1891.

§07. Ueber die Bewegung eines Punktes in einer *n*-fachen Mannigfaltigkeit. *Math. Ann.*, 42, 1893.

§08. Ueber Biegungen von *n*-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten. *Crelle's Journ.*, 113, 1894.

STOUFF. — §09. Sur une généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique. *C. R.*, 122, 1896.

STRINGHAM. — §10. Regular figures in *n*-dimensional space. *American Journ.*, 3, 1880.

STUDY. — §11. Ueber Distanzrelationen. *Schloemilch Z.*, 27, 1882.

§12. Ueber die Geometrie der Kegelschnitte. *Habilitationsschrift*, Leipzig, 1885.

§13. Ueber Systeme von complexen Zahlen. *Gött. N.*, 1889.

§14. Complexe Zahlen und Transformationsgruppen. *Leipz. Ber.*, 41, 1889.

§15. Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einen Punktraum. *Math. Ann.*, 40, 1892.

SCHOROP. — §16. Extrait d'un mémoire Kasan. 1871) dans *Darboux Bull.*, 4.

TONELLI. — §17. Sulla connessione degli spazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

VAHLEN. — §18. Sur la surface de Fresnel. *Nouv. Ann.* (3), 14, 1895.

VERONESE. — §19. Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens. *Math. Ann.* 19, 1881.

§20. Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Characteren einer Curve im Raume von *n* Dimensionen stattfinden. *Math. Ann.*, 18, 1881.

§21. Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni. *Ven. Ist. Atti.* (5), 8, 1882.

§22. Formola di una serie comprendente le formole di Kantor. *Ven. Ist. Atti.* (6), 2, 1884.

§23. Fondamenti di geometria a più dimensioni ùa più spezie di unità rettilinee esposti in forme elementare. Padova. 1891.

VISALLI. — §24. Sulle correlazioni in due spazi a tre dimensioni. *Rom. Acc. L. Mem.* (4), 3, 1896.

VIVANTI. — §25. Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. *Annali di mat.* (2), 17, 1889.

VOLTERRA. — §26. Delle variabili complessi negli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

§27. Sulle funzioni conjugate. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

§28. Sulle funzioni di iperspazi e sui loro parametri differenziali. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 5, 1889.

§29. Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni conjugate. *Palermo Rend.*, 3, 1889.

§30. Sulle variabili complesse negli iperspazi. *Rom. Acc. L. Rend.* (4), 6, 1890.

Voss. — 431. Zur Theorie der Transformation quadratischer Differential-Ausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 16, 1880.

Waelsch. — 432. Zur Construction der Polargruppen. *Wien. Ber.*, 100 1891.

Weierstrass. — 433. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. *Gött. Nachr.* 1884.

Weyr. — 434. Note sur la théorie des quantités complexes formées avec n unités principales. *Darb. Bull.*, (2), 11.

Zecca. — 435. Sopra una classe di curve razionali. *Batt. G.*, 25, 1887.

Zimmermann. — 436. Henry More und die vierte Dimension des Raumes. Wien., 1881.

Zindler. — 437. Nachweis linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in unserem Raume: lineare Complexe und Strahlensysteme in demselben. *Wien. Ber.*, 101, 1892.

438. Synthetische Gewinnung geometrischer linearer Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen. *Crelles' J.*, 111, 1893.

Zœllner. — 439. Ueber die Natur der Kometen. Leipzig, 1872, p. 305-312.

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

ET LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES

I

Quelques analystes intransigeants ont décrété que la Géométrie ne saurait avoir d'existence propre et qu'elle ne pouvait prétendre qu'à illustrer parfois des concepts analytiques ; d'autres mathématiciens peut-être plus clairvoyants ont apprécié dans l'intuition de l'étendue une puissance synthétique organisée, une instinctive divination dont la science du nombre a pu recevoir quelque lumière.

Dans le procès de préséance qui reste ainsi pendant entre deux tendances de l'esprit humain gardons-nous d'affirmer un de ces arrêts que les progrès de la science révisent tous les jours.

Plus modeste et plus précis est le but que je poursuis en ce moment dans cet article ; je constate d'abord le rôle que la Géométrie joue nécessairement dans la phase primaire de la culture mathématique : c'est un rôle d'initiation ; je me demande

ensuite comment nous pourrons seconder le développement naturel de ce rôle dans l'enseignement *élémentaire* et dans l'enseignement *moyen*.

Questions pédagogiques ? Sans doute, mais ne sait-on pas combien cet humble mot effleure, sans fracas, la philosophie même de la science ?

Et nous savons encore que le cerveau vierge de l'adolescent, éminemment apte à sentir la dignité ou la frivolité des méthodes, peut recevoir de sa première initiation une empreinte ineffaçable.

La Géométrie est la première philosophie de l'enfant, la plus accessible à ses sens et à son imagination. Cette première école de logique doit être, à la fois, simple, intuitive, probe ; et dans la Géométrie primaire mieux vaut énoncer un postulat de plus qu'un axiome de moins.

La Géométrie de l'enfant doit évidemment rester euclidienne sous peine de le trop dépasser, mais le postulatum d'Euclide doit déjà lui être présenté comme un choix de l'esprit ; les besoins d'une représentation simple ont fait désirer à l'homme l'existence de la similitude et ont dirigé la Géométrie d'Euclide ; on peut déjà le faire pressentir à l'enfant.

Au contraire, la Géométrie de l'adolescent, celle qui appartient à l'enseignement moyen peut être facilement dépouillée de la spécialisation euclidienne et être exposée très simplement comme je le montrerai plus loin.

II

GÉOMÉTRIE QUALITATIVE ET GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE AU POINT DE VUE EUCLIDIEN

On se rend compte du degré de perfection relative de l'œuvre d'Euclide quand on la compare à l'œuvre géométrique de Legendre. Cet analyste distingué avait cru améliorer Euclide en prenant comme définition de la droite la propriété d'être plus court chemin entre deux de ses points. Je crois inutile de rappeler ici les critiques très fondées qui furent faites à cette malheureuse et illogique définition ; je ferai seulement remarquer que si Legendre

a mal défini la genèse des premiers principes de la Géométrie, on peut cependant trouver dans son erreur même le germe d'un nouveau postulat qu'il est nécessaire de souligner ici.

Pour être plus clair, rappelons d'abord comment on définit la droite après avoir guidé l'intuition de l'élève sur la signification des trois dimensions de l'espace :

Une ligne droite est un ensemble continu de points d'un corps rigide, ensemble qui peut rester immobile bien que le corps se meuve ; cet ensemble jouit des propriétés essentielles suivantes :

Un segment quelconque de cette ligne envisagé dans ses deux sens de parcours *peut être superposé* à un second segment de droite d'origine et de sens arbitraires.

On peut alors définir la longueur d'un segment et formuler cette autre propriété de la droite qui est sa définition logique :

Si les deux points A *et* B *font partie d'une droite et sont les extrémités d'un segment de longueur moindre que* l (l *désignant une longueur fixe mais suffisamment réduite*), *il n'existera qu'une droite possédant les deux points* A *et* B ; *et* (*au cas où la droite serait une courbe fermée*) *sur cette droite un seul segment ayant* A *et* B *pour extrémités aura une longueur moindre que* l.

La longueur de ce segment s'appellera la distance AB.

Après la définition de la droite on fera connaître l'existence du plan ou de la trame triangulaire considérée comme triple trame de droites. L'étude approfondie de cette trame met en jeu le postulat suivant *tacitement admis* dans les démonstrations usuelles.

Soit O un point quelconque, considérons deux segments rectilignes OA et OB passant par ce point, il existe une longueur fixe m (moindre que l) qui est telle que si les segments OA et OB sont moindre que m on pourra affirmer que :

1° Les deux points A et B seront à une distance réduite moindre que l, suffisante pour définir une droite ;

2° La *distance* de ces deux points étant représentée par AB on aura, en désignant par K un nombre fixe :

$$AB < K\,(OA + OB)$$

Ce postulat permet par un procédé de cheminement de ne considérer d'abord que des figures situées dans un domaine D fini,

mais suffisamment voisin d'un point O et d'appliquer à l'ensemble des points contenus dans ce domaine la proposition suivante.

Dans un domaine D toute droite AB d'un plan sépare ce plan en deux régions R_1 et R_2 dont voici la propriété : si deux points M et M′ appartiennent à une même région, le segment propre qui joint M et M′ ne rencontre pas AB. Si deux points M et M′ appartiennent à deux régions distinctes le segment propre qui les joint rencontre AB.

Bien entendu on conserve le postulat du double mode de recouvrement des angles plans égaux, le postulat qui définit la rotation égale à un tour, et celui relatif à la propriété du demi-tour.

On peut alors exposer toute la partie de la Géométrie qui est indépendante du postulatum d'Euclide ; c'est ce qu'on peut appeler la Géométrie *qualitative* ou mieux *la Géométrie du cheminement*, l'épithète *qualitative* restant alors réservée à l'*Analysis situs*.

Cette partie de la Géométrie est, depuis la détestable classification de Legendre, répartie dans les livres I et V et sur la Géométrie non métrique de la sphère, mais cet ensemble de la Géométrie non métrique qui réunit le triangle et le trièdre doit former le *premier livre* de la Géométrie naturelle.

En particulier, toute distinction entre une Géométrie plane et une Géométrie de l'espace est illogique car l'étude de la Géométrie dite plane nécessite des déplacements de figure hors du plan où l'on voudrait en vain se cantonner, que ces déplacement soient d'ailleurs possibles ou définis. En d'autres termes la notion d'orientation qui appartient déjà à l'étude du plan exige que l'observateur ait déjà prise sur l'espace à trois dimensions avant même de s'attacher au plan. — Parmi les théorèmes du premier livre de la Géométrie naturelle dont je viens d'esquisser l'allure il en est un qui offre à mes yeux une importance capitale : je veux parler du théorème d'Euler sur les déplacements finis d'un solide cloué sur un de ses points, c'est-à-dire de la composition des rotations finies, envisagées dans un certain ordre.

A ce théorème, en effet, on peut rattacher la naissance du second livre de la Géométrie naturelle ; cette Géométrie quantitative a pour objet la fixation des propriétés métriques.

Habituellement celles-ci sont reliées par *la similitude* au

fameux postulatum d'Euclide ; mais je crois qu'il est préférable, même dans la Géométrie élémentaire de faire apparaître la similitude et le postulatum d'Euclide comme la conséquence directe de l'adoption du mode le plus simple de *composition* pour les vecteurs d'un plan perpendiculaires à une même droite. L'idée de la composition des vecteurs et l'existence de leur groupe d'équivalence peuvent être présentées d'une manière extrêmement simple, et alors même que l'on ne voudra pas les conduire jusqu'à la théorie des fonctions circulaires, on peut en présenter l'origine assez nettement pour faire comprendre au débutant que la Géométrie euclidienne qu'il étudie dérive d'un choix entre plusieurs Géométries dont on ne le fatiguera pas.

J'indiquerai brièvement l'esprit de cette méthode.

Envisageons *dans un certain ordre* plusieurs vecteurs $V_1, V_2, \ldots V_K$, et concevons que les longueurs de ces vecteurs soient la représentation de nombres fixes, n_1, n_2, n_K proportionnels aux rotations respectives et simultanées d'un premier solide S_1 tournant sur V_1 par rapport à un solide de repère S_0, puis d'un second solide S_2 tournant sur V_2 par rapport à S_1, etc., etc.

Nous pourrons alors concevoir que les nombres $n_1, n_2, \ldots n_K$ soient à l'égard d'une variable auxiliaire t variant toujours dans le même sens, les mesures des vitesses constantes de ces rotations continues dont nous venons de parler et qui appartiennent à des systèmes solides successivement emboîtés les uns dans les autres.

Les postulats de la Géométrie métrique vont être alors les suivants :

Nous admettons d'abord que dans le mouvement ci-dessus défini du solide S_K par rapport à S_0 un point quelconque du solide aura à chaque instant *une vitesse*.

Nous admettons ensuite que :

La vitesse d'un point M dans un domaine D d'un solide S_K animé des mouvements de rotation ci-dessus définis varie d'une manière continue lorsque ce point M se déplace dans le domaine D.

Et, en se reportant à la définition de la *translation* non euclidienne d'un solide le long d'une droite donnée, *axe de translation*, voici d'une manière précise ce qu'il faut entendre par la *variation continue* d'un vecteur appliqué en M :

Soit R un vecteur appliqué en M et fonction de la position de M; soit R′ ce que devient ce vecteur quand son point d'application est devenu M′.

Si lorsque MM′ tend vers zéro la différence des longueurs de R et de R′ tend vers zéro, et si la droite R fait *après une translation d'axe MM′* un angle avec R′ qui tend aussi vers zéro, on dira que le vecteur R varie d'une manière continue.

La continuité de la variation de R est d'ailleurs uniforme dans tout domaine D où R ne s'annule pas.

On peut alors, au moyen du théorème d'Euler de la Géométrie qualitative, démontrer que les rotations continues définies plus haut, produisent dans le solide final S_K une distribution des vitesses qui est indépendante de l'ordre des emboîtements successifs des systèmes $S_1, S_2, \ldots S_K$.

Et en particulier on conclut de là qu'il existe *pour des vecteurs concourants* un mode de composition, mode continu, invariant, commutatif, associatif, et se réduisant sur une même droite à l'addition algébrique des segments.

Pour rechercher ce mode de composition on remarquera d'abord que le *vecteur résultant* de deux vecteurs concourants est dans le plan de ceux-ci et passe par leur point de concours, puis en considérant autour d'un point O et dans un même plan un vecteur R variable qui fait respectivement les angles α et β complémentaires avec deux axes rectangulaires OX et OY, on pourra représenter les deux composantes X et Y par deux fonctions associées

$$g(\alpha) \text{ et } h(\alpha) \qquad h(\alpha) = g(1^{\text{droit}} - \beta)$$

au moyen des formules

$$X = Rg(\alpha), \qquad Y = Rh(\alpha)$$

alors, les conditions de composition sont, on le vérifie aisément, exprimées par les équations fonctionnelles et les conditions initiales suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} h(\alpha+\beta) = h(\alpha)\,g(\beta) + h(\beta)\,g(\alpha) & g(0) = 1 \quad g(1^{\text{droit}}) = 0 \\ g(\alpha+\beta) = g(\alpha)\,g(\beta) - h(\alpha)\,h(\beta) & h(0) = 0 \quad h(1^{\text{droit}}) = 1 \\ g(\alpha+\beta) + g(\alpha-\beta) = 2g(\alpha)\,g(\beta) \end{cases}$$

On démontre que ces conditions déterminent d'une manière

unique les fonctions g et h, et cette démonstration peut se faire sans achever la détermination des fonctions, supposées simplement contenues.

Un vecteur, vitesse de rotation, n'ayant pas de point d'application déterminé sur la ligne qui le porte, on est conduit alors tout naturellement à la notion de l'existence d'un groupe d'équivalence pour tout système de vecteurs donné.

Et pour achever de constituer ce groupe d'équivalence il reste à composer les vecteurs d'un plan qui sont perpendiculaires à une même droite ; la question d'ailleurs se ramène au cas particulier de la composition de deux vecteurs égaux P perpendiculaires (d'un même côté) aux extrémités d'une même droite de longueur $2x$, le résultant de ces vecteurs perpendiculaire au segment $2x$ en son milieu a une intensité qui est nécessairement de la forme :

$$2\mathrm{PF}(x)$$

et la fonction F doit satisfaire aux conditions :

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(x+y)+\mathrm{F}(x-y)=2\mathrm{F}(x)\,\mathrm{F}(y) \\ \mathrm{F}(0)=1 \end{cases}$$

la fonction $\mathrm{F}(x)$ satisfait donc à la même équation fonctionnelle que la fonction $g(x)$, et de même que l'on avait $g(0)=1$ on a encore $\mathrm{F}(0)=1$.

Mais la condition $g(1^{\text{droit}})=0$ n'a plus ici son analogue pour la fonction $\mathrm{F}(x)$.

La fonction $\mathrm{F}(x)$ aura donc une détermination plus générale que la fonction $g(x)$.

Adoptons pour $\mathrm{F}(x)$ la *détermination très particulière*

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)=1$$

et montrons qu'elle entraîne la Géométrie euclidienne.

A cet effet, revenons à nos deux vecteurs P, et aux extrémités A et B de leur perpendiculaire commune, ajoutons deux vecteurs $\frac{\mathrm{P}}{2}$ égaux et contraires ayant AB comme droite de support ; nous avons formé un groupe de quatre vecteurs équivalent au groupe primitif.

Or les deux vecteurs $\frac{\mathrm{P}}{2}$ et P appliqués en A se composent en

une résultante partielle R′ appliquée en A, inclinée de α sur la droite AB et l'on aura

$$P = R' h(\alpha)$$

Si les deux résultantes partielles se rencontrent sur la résultante générale R sous l'angle 2β, la décomposition de chaque résultante R′ suivant la ligne qui porte R et suivant la perpendiculaire à celle-ci donne :

$$R = 2R' g(\beta)$$

donc :

$$R = 2P \frac{g(\beta)}{h(\alpha)},$$

mais par le choix de $F(x) = 1$ on a aussi :

$$R = 2P$$

donc enfin :

(3) $\qquad g(\beta) = (\alpha)$ donc après une discussion facile $\alpha + \beta = 1^{\text{droit}}$,

donc la somme des trois angles d'un triangle rectangle est égale à deux droits, et on en déduit aisément le postulatum d'Euclide.

On aurait pu encore opérer plus vite ainsi : les deux vecteurs P coupent une seconde perpendiculaire à leur résultant sous un même angle ω, si $2p$ est le segment AB et si $2q$ est le segment analogue détaché par les vecteurs P sur la seconde perpendiculaire A′B′ ; en appliquant les deux vecteurs respectivement en A′ et B′ on trouve pour l'intensité du vecteur résultant :

$$2P h(\omega) F(q)$$

on aurait donc :

$$2P h(\omega) F(q) = 2P F(p)$$

mais si $F = 1$ on aura :

$$(h(\omega) = 1$$

d'où on conclut facilement :

(1) $\qquad \omega = 1^{\text{droit}}$

et on tirerait même conclusion de l'équation (1) que de l'équation (3).

Indiquons maintenant la génération directe de la trigonométrie plane.

Nous nous appuierons à cet effet sur les théorèmes suivants qui découlent des postulats déjà utilisés.

Théorème I. — La vitesse d'un même point qui est due à la résultante de plusieurs rotations composantes est un vecteur qui est la résultante des vitesses dues aux rotations composantes.

Théorème II. — Lorsqu'un solide se déplace d'une manière continue, le travail d'un vecteur entraîné avec le solide est indépendant du point d'application que l'on voudra attribuer à ce vecteur.

Ces théorèmes renferment, avec le théorème du travail virtuel pour les corps rigides, la Trigonométrie plane de la Géométrie générale; mais nous nous plaçons pour le moment dans le cas euclidien de $F = 1$.

Considérons d'abord deux couples de vecteurs qui auraient même axe mais dont les bras de levier portés par la même droite auraient deux longueurs distinctes $2p$ et $2q$, soient P et Q les intensités respectives des vecteurs dans les deux couples.

La condition d'équivalence des deux couples, toujours sous l'hypothèse $F(x) = 1$, est :

$$Pp = Rq.$$

on obtient une seconde condition d'équivalence en appliquant ensuite le théorème du travail virtuel à ces deux couples équivalents; puis en comparant les deux conditions d'équivalence on voit que la vitesse d'un point qui tourne à une distance r d'un axe de rotation animé d'une vitesse angulaire n est de la forme

$$\lambda nr$$

λ étant une constante qui dépend de l'unité d'angle.

Ceci posé, considérons maintenant un triangle ABO rectangle en A, et un vecteur V dirigé suivant le côté BA; le travail virtuel du vecteur V tournant autour de O d'un angle θ sera, suivant qu'on considère le vecteur comme appliqué en A ou comme appliqué au sommet de l'angle B du triangle :

$$\lambda\theta b \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda\theta a h(B)$$

en égalant ces deux expressions on aura donc :

$$b = a h(B),$$

formule qui renferme avec la similitude, la Trigonométrie plane quand on lui adjoint le résultat trouvé déjà tout à l'heure.

Enfin, pour terminer ce paragraphe, j'indiquerai comment la seule Géométrie qualitative fournit la Trigonométrie sphérique : il suffit pour cela de décomposer un même vecteur issu de O suivant deux systèmes d'axes OX, OY, OZ ; OX', OY', OZ' ayant en commun les axes OX et OX' et de comparer les deux modes *équivalents* de décomposition.

III

LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Si l'on considère, et tel est mon avis, la notion d'intégrale définie comme plus simple que la notion des séries entières, on pourra ramener la recherche de la fonction g à celle de la fonction F.

La fonction F étant continue est intégrale, posons alors :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{F}(u)\, du$$

envisageons ensuite deux vecteurs P et R perpendiculaires *de même sens* aux extrémités d'une droite AB de longueur c, supposons d'ailleurs que la droite AB soit considérée de longueur assez réduite pour que l'on ait, pour $0 < x \leq \mathrm{AB}$:

$$\mathrm{F}(x) > 0$$

on voit alors aisément que l'on peut déterminer un vecteur ϖ et deux longueurs a et b de manière que l'on ait :

$$\mathrm{P} = 2\varpi f(b)$$
$$\mathrm{Q} = 2\varpi f(a)$$
$$c = a + b.$$

la méthode donnée par Archimède pour la composition des forces parallèles euclidiennes nous montrera ici que :

1° Sur AB le point d'application C de la résultante R des forces P et R sera aux distances respectives a et b des extrémités A et B.

2° Que la résultante R perpendiculaire à AB a pour intensité

$$R = 2\varpi\chi(c)$$

Il résulte de la méthode d'Archimède comme d'ailleurs de la définition de $\chi(x)$ que l'on a d'abord :

$$\chi(x+y) = \chi(x-y) + 2\chi(y)\,F(x)$$

et pareillement

$$\chi(x+y) = \chi(y-x) + 2\chi(x)\,F(y)$$

et par conséquent encore :

$$\chi(x+y) = \chi(x)\,F(y) + \chi(y)\,F(x) \tag{5}$$

la fonction $\chi(x)$ admettant par définition une dérivée, il en sera donc de même de la fonction F ; et alors en dérivant par rapport à x l'équation précédente il vient :

$$F(x+y) = F(x)\,F(y) + \chi(y)\,F'(x)$$

en dérivant la même équation par rapport à y on aurait :

$$F(x+y) = F(x)\,F(y) + \chi(x)\,F'(y) = 0$$

d'où, en comparant les deux derniers résultats :

$$\chi(x)\,F'(y) = \chi(y)\,F'(x) = 0$$

ce qui exige que l'on ait en désignant par μ une constante

$$F'(x) = \mu\chi(x)$$

en sorte que l'on aura aussi

$$F(x+y) = F(x)\,F(y) + \mu\chi(x)\,\chi(y) \tag{6}$$

La formule (5) permettra d'écrire la valeur précédente de R

$$R = 2\varpi\chi(a+b) = QF(b) + PF(a).$$

si elle n'est pas nulle la constante μ peut d'ailleurs être rendue égale à $+1$ ou à -1 par un simple changement de variable.

L'emploi des postulats cinématiques donnés dans le précédent paragraphe conduira dans le cas de $\mu > 0$ aux propriétés métriques de l'espace de Lobatchewsky et dans le cas de $\mu < 0$ aux propriétés métriques de l'espace de Riemann.

Désignons par S et C les fonctions χ et F réduites à l'hypothèse de $\mu^2 = 1$.

Nous pourrons résumer les propriétés des fonctions g et h d'une part et S et C d'autre part dans les deux tableaux ci-contre

$$h(x+y) = h(x)\,g(y) + h(y)\,g(x)$$
$$g(x+y) = g(x)\,g(y) - h(x)\,h(y)$$
$$h(0) = 0$$
$$h(1^{\text{droit}}) = 1$$
$$g[x+y] + g(x-y) = 2g(x)\,g(y)$$

$$S(x+y) = S(x)\,C(y) + S(y)\,C(x)$$
$$C(x+y) = C(x)\,C(y) + \varepsilon S(x)\,S(y)$$
$$S(0) = 0 \qquad \varepsilon = \pm 1$$
$$C(0) = 1$$
$$C(x+y) + C(x-y) = 2C(x)\,C(y)$$
$$\frac{dS}{dx} = C(x) \quad \text{d'où on conclut}$$
$$\frac{dC}{dx} = \varepsilon S(x) \quad C^2(x) - \varepsilon S^2(x) = 1.$$

Le tableau de gauche sera d'ailleurs ramené comme on l'a vu au tableau de droite par la considération de l'intégrale $\int_0^x g(x)\,dx$.

Les fonctions g, h, C, S dont les deux dernières coïncident avec les deux premières si $\varepsilon = -1$, sont donc ainsi déterminées par le seul tableau de droite qui comprend alors le premier *à cela près que la correspondance entre l'unité concrète et l'unité analytique d'angle n'est pas encore précise.*

Pour préciser cette correspondance nous chercherons une solution de l'équation

$$(7) \qquad F[x+y] + F(x-y) = 2F(x)\,F(y) \text{ avec la condition } F(0) = 1$$

sous forme de série entière ; nous trouverons aisément, k désignant une constante

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} (k_n)\,\frac{x^{2n}}{1.2.3.\ldots 2n}$$

forme qui, par le changement de variable,

$$x \left| \frac{x}{\sqrt{\text{mod}k}} \right.$$

se ramènera à l'une ou l'autre des deux formes, convergentes pour toute valeur de x

$$F_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

$$F_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

la solution la plus générale de l'équation (7) sera alors de l'une ou l'autre des deux formes :

$$F_1(mx), \qquad F_2(mx), \qquad m = \text{constante}$$

bien entendu en laissant de côté la solution déjà étudiée $F(x) = 1$. En appelant $\frac{\pi}{2}$ la plus petite racine de l'équation $F_1(x) = 0$ nous aurons exprimé l'angle droit avec l'unité analytique des angles.

Nous arrivons donc ainsi à réaliser dans un enseignement moyen la fusion de la Géométrie métrique générale, de la Statique et de la Trigonométrie plane.

Ces trois chapitres si distincts en apparence et si séparés par la classification usuelle, ne sont, comme on vient de le voir que les trois aspects d'une seule et même notion, la notion du groupe d'équivalence ; et ce groupe a pour symbole analytique la fonction exponentielle e^x.

IV

Mentionnons enfin, sans le développer, le troisième livre de la Géométrie naturelle : la mesure des étendues.

Quel que soit d'ailleurs le point de vue euclidien ou général, d'où l'on se place, il est nécessaire et facile de donner des trois étendues, *trois définitions présentant dans ses termes le caractère invariant*. Par exemple la définition usuelle des aires courbes doit être rejetée.

V

Pour résumer cet article en quelques lignes, il me suffira de dire que la statique de Poinsot domine sa traduction euclidienne, elle dérive du théorème d'Euler sur les rotations finies, et rattache celui-ci, dans une représentation *cinématique*, à la théorie analytique des fonctions circulaires créée par Euler. *Consciemment ou non, la Géométrie a été faite par la Cinématique.*

Euler et Poinsot : tels sont les noms qui résument le mieux la Géométrie naturelle. N'est-il pas temps que celle-ci soit enseignée ?

Jules ANDRADE (Montpellier).

SUR L'UTILITÉ DE LA NOTION DE L'INFINI

DANS L'ENSEIGNEMENT

DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Un caractère commun aux Cours de Géométrie plane est l'absence presque totale de notions sur l'infini, les points et la droite de l'infini. Il suffit de citer, à titre d'exemples et pour constater le fait, le traité de MM. Rouché et de Comberousse et les ouvrages récents de M. Hadamard et de MM. Niewenglowski et Gérard. C'est évidemment une omission volontaire, que ne suffirait pas à expliquer le silence des programmes, dans des ouvrages qui, avec raison, les complètent en beaucoup de points : elle prouve que l'introduction dans l'enseignement des notions dont il s'agit n'a pas été jusqu'à présent jugée utile. Mais l'enseignement de la Géométrie est actuellement dans une période de transformation qu'attestent surabondamment les nombreux ouvrages parus en France et à l'étranger depuis le commencement de 1898 [1]. Il est donc permis de se demander si l'omission des notions sur l'infini en Géométrie est logique et conforme à la situation générale actuelle de l'enseignement.

« La notion mathématique de l'infini s'est indirectement pré-
« sentée à nous dès le début de l'Arithmétique. En formant suc-
« cessivement les nombres entiers, il tombe sous le sens que la
« suite qu'ils forment ne s'arrête jamais... Cette notion revient
« encore à propos des nombres premiers... Mais c'est surtout

[1] Voir *Enseignement mathematique*, n° 1, p. 56, et, pour les ouvrages de M. Hadamard et de MM. Niewenglowski et Gérard, les n°s 2 et 3 du même recueil. Aux ouvrages cités au n° 1, on peut ajouter : en Belgique, *Cours de Geometrie elementaire*, de M. Ad. Mineur; en Allemagne, *Lehrbuch der Elementar-Geometria*, de MM. J. Henrici et P. Treutlein ; en Amerique, *New Plane and Solid Geometry*, de MM. W.-W. Beman et D.-E. Smith, et probablement d'autres.

« dans l'étude des fractions que l'idée de l'infini se présente sous « une forme qui nous oblige à l'introduire dans le calcul lui- « même : je veux parler de la conversion des fractions ordi- « naires en décimales, laquelle donne naissance aux fractions « décimales périodiques... Ce sont encore les fractions qui « amènent pour la première fois à l'idée de l'infiniment petit... » (C. A. Laisant, *La Mathématique*, p. 36).

En Algèbre, l'idée de l'infini se présente partout : dans les équations du premier degré avec l'interprétation de la forme $\frac{m}{o}$; dans les équations du second degré lorsque le coefficient du premier terme ou le terme tout connu tend vers zéro (racine infiniment grande ou infiniment petite) ; dans l'étude de la variation des fonctions, dans celle des progressions, etc. D'ailleurs, la notion de fonction est indissolublement liée à celle de continuité, qui tire son origine de l'infini et en implique l'idée (Chasles, *Aperçu historique*, Note XXIV).

Ainsi, la notion de l'infini se trouve bien nettement implantée dans l'enseignement de l'Arithmétique et de l'Algèbre ; elle se retrouve également en Trigonométrie : par exemple, dans l'identité $\sin a \equiv \sin (a + 2k\pi)$, pour l'infiniment grand, et dans la limite de $\frac{\sin x}{x}$, pour l'infiniment petit. Dans ces conditions, son exclusion de l'enseignement de la Géométrie, qui est la science la plus propre à en faire saisir l'utilité et les applications, ne serait justifiée que si cette notion y était inutile et inféconde, ou s'il était impossible de la présenter sous une forme suffisamment simple et élémentaire. Nous allons essayer de prouver qu'il n'en est pas ainsi [1].

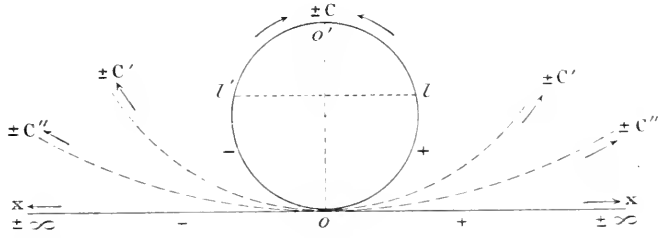
Parmi les ouvrages que nous avons cités, un seul, le Cours de MM. Niewenglowski et Gérard, introduit, comme il suit, la notion du point à l'infini d'une droite. Après avoir étudié, au début du Livre III, d'une manière analogue à celle que l'on trouve dans les autres ouvrages, la variation du rapport $\frac{MA}{MB} = \lambda$ quand le point M décrit la droite indéfinie déterminée par les points A et B, les auteurs disent (p. 120) : « Donc, λ prend une

[1] Nous ne nous occuperons que de l'infini (infiniment grand). L'infiniment petit est utilisé aux livres III et IV (périmètres et isopérimètres, aires).

« fois, et une fois seulement, toutes les valeurs positives ou « négatives, sauf la valeur $+1$. Pour combler cette lacune, nous « dirons que $\lambda = 1$, quand le point M est *à l'infini* à droite ou « à gauche, et, pour qu'il n'existe qu'une position de M cor- « respondant à chaque valeur de λ, nous dirons que le *point à* « *l'infini de droite* est le même que le *point à l'infini de gauche.* »

Certes, il y a là une indication excellente, et la division harmonique, que les auteurs exposent ensuite, fournit une application immédiate. Mais, cette façon de s'arranger pour combler une lacune ne peut satisfaire l'esprit qui reste inquiet devant deux points qui se confondent en un seul bien que paraissant situés à des antipodes, et cela d'autant plus que c'est la première fois que ce mode de raisonnement, qui pourra devenir très utile par la suite, se présente. C'est un postulatum très difficile à admettre et qui est cependant introduit sans nécessité, car on peut le faire disparaître en démontrant préalablement le théorème suivant :

Une droite indéfinie x'x, *sur laquelle* O *est l'origine des vecteurs et* x'x *le sens positif, n'a pas deux points à l'infini, l'un* x' *à la distance* $-\infty$, *l'autre* x *à la distance* $+\infty$, *mais un seul point* (x'x) *à la distance* $\pm\infty$.



En effet, traçons un cercle OO' de rayon arbitraire, tangent en O à x'x, et supposons deux courriers, partant de O au même instant précis, parcourant le cercle, l'un dans le sens positif OlO', l'autre dans le sens négatif OL'O', en marchant avec la même vitesse et dans des conditions absolument identiques. Ils seront toujours à la même hauteur (l, l') et ils arriveront *simultanément* au point O' diamétralement opposé à O. Chacun d'eux aura alors parcouru la moitié de la *circonférence* du cercle [1], que

(1) Les numéros renvoient au Cours de MM. Niewenglowski et Gérard.

nous désignerons par 2C. Or, le point O′ est évidemment à la distance ± C de l'origine O ; il doit être coté ± C, car il est + C du fait du courrier *positif* et — C du fait du courrier *négatif*. Il en sera ainsi quel que grand que soit le rayon du cercle, et, quand ce rayon, d'abord infiniment grand, deviendra, par convention, infini, le *point unique* ± C deviendra le *point unique* ± ∞. Mais le cercle se confond alors visiblement avec la droite x′x ; donc, etc.

La place de ce théorème est au début du Livre III, immédiatement après la définition du sens positif ou négatif des vecteurs (143), par conséquent avant l'étude (146) de la variation du rapport $\frac{MA}{MB} = 8$ qu'il élucide complètement. Il conviendra d'ailleurs de montrer sa concordance avec le théorème que l'on a dû démontrer en Algèbre : *l'infini, pas plus que zéro, n'a de signe déterminé ;* car, des égalités, telles que $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = \infty$, seraient dépouvues de signification si, en même temps que l'on peut remplacer identiquement o par ± o, on ne ne pouvait pas remplacer de même ∞ par ± ∞.

Examinons maintenant quelques conséquences.

On a défini la ligne droite en admettant sa propriété caractéristique : *Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une droite et on n'en peut faire passer qu'une*. On a spécifié, en général sans autre explication, que la ligne droite est indéfinie dans les deux sens ; un commentaire sur le mot *indéfinie* et ses synonymes (illimitée, de développement infini, d'arrêt impossible ou à l'infini) n'eût pas été inutile ; nous supposons qu'il a été fait dans l'enseignement oral et mis en concordance avec les explications de même nature déjà données au moins en Arithmétique. Un peu plus loin, on a appelé *droites parallèles* deux droites du plan qui, si loin qu'on les prolonge dans les deux sens, ne se rencontrent pas. On a dû faire remarquer alors que, par suite, si deux parallèles se rencontrent, ce ne peut être que dans leur région indéfinie (ou à l'infini, ou impossible) précédemment indiquée. Donc, *dès que le théorème du point à l'infini d'une droite aura été démontré*, il aura le corollaire suivant : puisqu'une droite n'a qu'un seul point à l'infini, on ne peut faire passer qu'une droite par un point A et ce point de l'infini ; en d'autres termes, *on ne*

peut mener par un point A, qu'une parallèle à une droite donnée.

Ce n'est pas une démonstration du postulatum d'Euclide, puisqu'elle ne vient pas à la place utile; mais c'en est une *justification a posteriori*, qui permettrait, lorsque l'on énonce ce postulatum au Livre I^er^, de dire : « Nous l'admettons ici comme un axiome, ou comme une vérité expérimentale et facile à comprendre ; nous le démontrerons plus loin. » C'est ce que l'on fait pour l'*existence* de la bissectrice, de l'aire, et pour bien d'autres notions qui se complètent et se précisent peu à peu et qu'il est nécessaire cependant de faire entrevoir le plus tôt possible, en les éclairant par des explications avant qu'on soit en mesure d'en donner une démonstration.

Peut-être même serait-il possible d'aller plus loin. En nous appuyant sur un principe qui n'est guère contesté aujourd'hui, celui de la marche parallèle de l'Algèbre et de la Géométrie, faisons les hypothèses suivantes : 1° On a commencé l'Algèbre, conformément au programme, par la définition des nombres négatifs, et entrepris ensuite l'étude de la Géométrie; 2° on a placé, avec MM. Niewenglowski et Gérard, dans l'Introduction même, les premières notions sur le cercle, comprenant sa division en deux parties égales par un diamètre OO', puis établi la théorie des perpendiculaires, mais pas encore celle des parallèles (contrairement à l'ordre adopté par les auteurs que nous venons de citer, mais conformément à l'usage traditionnel et aux programmes eux-mêmes). Rien ne nous semble empêcher alors de définir la tangente en cercle (86), de placer immédiatement après le théorème du point à l'infini, et enfin, la définition des parallèles donnée, d'en tirer la conclusion indiquée ci-dessus. Cette opinion est peut-être contestable; fût-elle juste, il y aurait lieu d'examiner si l'on doit faire, dans l'ordre des matières, les modifications qu'elle comporte. Mais, selon nous, MM. Niewenglowski et Gérard, en commençant la Géométrie simultanément par la droite et le cercle, sont entrés dans un ordre d'idées très important et dont il convient d'étudier les conséquences. En admettant même que notre argumentation soit insuffisante, la question suivante peut être posée : Toute idée de cercle étant exclue du premier Livre, le postulatum d'Euclide est reconnu

impossible à démontrer ; en est-il de même dans l'hypothèse contraire ?

Quoi qu'il en soit, le point à l'infini d'une droite ayant été défini, il y a évidemment lieu d'examiner ce qu'il donne quand on l'introduit dans les théories des transversales, du rapport anharmonique, de l'involution, des polaires, etc., puis de montrer que tous les théorèmes concernant les faisceaux de droites concourantes subsistant, *ipso facto*, pour les faisceaux de droites parallèles. Un grand nombre d'applications sont possibles.

Après la notion du point de l'infini d'une droite, doit venir, *en Géométrie plane même* [1], celle de la droite de l'infini du plan. Elle est une conséquence immédiate de la première : car une droite est la seule ligne avec laquelle une droite arbitraire puisse avoir un seul point commun [2].

Comme application, on peut dire : Si l'on considère une droite de direction fixe s'éloignant indéfiniment d'un cercle, son pôle, sur le rayon perpendiculaire, tend vers le centre ; d'où il résulterait, *comme première apparence*, que le centre est le pôle de toutes les droites de l'infini, dans toutes les directions. Mais un point quelconque du plan ne peut avoir qu'une polaire par rapport à un cercle donné (232 ; donc, la considération de toutes ces droites se confondant en une seule *de direction indéterminée* est justifiée, comme nécessaire et suffisante. D'ailleurs, il a été démontré (235) que toutes les droites qui pivotent autour d'un point fixe ont leurs pôles en ligne droite ; donc, les pôles de tous les diamètres, points à l'infini dans toutes les directions, sont situés sur une même droite, *la droite de l'infini*, etc.

---

(1) MM. Rouché et de Comberousse expliquent la conception de la droite de l'infini d'un plan à la fin du livre V (premier de la Géométrie de l'espace) comme conséquence de la projection perspective. La notion ainsi donnée est indiscutable ; mais elle semble tardive. Elle ne devrait venir à cette place, croyons-nous, que comme une confirmation des notions données en géométrie plane. — Dans le cours de MM. Niewenglowski et Gérard, la notion de la droite de l'infini est rejetée plus loin encore (Compléments du livre VIII).

(2) De même, la conception du plan de l'infini de l'espace résulte de ce qu'un plan est la seule surface : 1° qui soit rencontrée par une droite arbitraire en un point unique ; 2° qui soit coupée par un plan arbitraire suivant une droite unique. Ainsi l'ensemble des conceptions relatives à l'infini résulte de celle du point à l'infini d'une droite.

Toutes ces considérations et bien d'autres que l'on peut ajouter (hexagone de Pascal dont les côtés sont parallèles, triangles homologiques devenant homothétiques, etc.) sont du domaine élémentaire *du plan*. En les présentant, on pourra parler d'une lacune à combler ; le raisonnement sera alors compris, parce qu'on l'a déjà rencontré et commenté.

Ce qui précède suppose, bien entendu, que les élèves ont quelques notions sur la continuité. Mais d'abord, ces notions sont extrêmement simples : en second lieu, on commence à reconnaître (Voir, par exemple, les *Leçons d'Algèbre* de M. Bourlet) qu'il est indispensable de les introduire dans les cours d'Algèbre élémentaire, et dès lors, on doit en tenir compte dans les cours de Géométrie, au moins lorsque l'on arrive au Livre III. C'est dans ce livre en effet que l'on étudie la construction des racines des équations du second degré et ses applications géométriques ; ces équations et l'étude de variation des fonctions qui en est l'application algébrique immédiate, doivent donc être considérées comme acquises.

Si l'on admet en outre, avec M. Bourlet (et conformément d'ailleurs aux programmes classe de première sciences), que les premières notions de géométrie analytique relatives à la droite doivent accompagner la théorie des équations du premier degré, l'introduction en Géométrie de la notion de l'infini sera considérablement facilitée ; car il n'y a qu'un mot à dire pour faire comprendre que l'équation d'une droite est implicitement homogène, et passer de là à une notion analytique du point à l'infini d'une droite et de la droite de l'infini du plan, confirmant d'une manière éclatante, par une simple discussion de coefficients, les notions géométriques données.

Nous pensons donc, en résumé, que des notions sur l'infini géométrique sont très utiles, que l'on peut les exposer de façon qu'elles ne dépassent nullement le niveau des cours de mathématiques élémentaires, et que leur introduction s'impose *a fortiori* dans des Traités plus complets, tels que ceux que nous avons cités et qui ont unanimement reconnu la nécessité de compléments destinés à l'exposition des théories de la Géométrie moderne.

L. Ripert (Paris).

QUESTIONS DE LANGAGE GÉOMÉTRIQUE

1. Un plan variable qui dépend d'un seul paramètre reste tangent à une surface développable, et osculateur à une courbe gauche en écartant le cas où le plan passe par un point fixe ; c'est en raison de ce cas singulier que les théorèmes relatifs à la figure sont généralement énoncés pour la développable, plutôt que pour la courbe gauche qui peut faire défaut. On est alors conduit à dire que la transformée dualistique d'une *courbe* C est une *surface* développable S'.

Ne serait-il pas préférable, en écartant un cas singulier qui mérite un examen spécial, d'énoncer les théorèmes relatifs à un plan variable en parlant de la courbe gauche à laquelle il reste osculateur. Au lieu de considérer par exemple le degré μ de la surface développable, on donnerait des noms aux trois nombres fondamentaux relatifs à une courbe gauche, savoir : le nombre m des points en lesquels la courbe est coupée par un plan, le nombre μ des tangentes qui rencontrent une droite donnée, le nombre m' des plans osculateurs qui passent par un point ; le nombre m étant l'ordre, on pourrait dire que le nombre m' est la classe, et le nombre μ pourrait être appelé le rang de la courbe gauche [1]. On dirait alors que la transformée dualistique d'une *courbe gauche* C est une *courbe gauche* C', dont les plans osculateurs sont les plans transformés des points de C, ou dont les points sont les transformés des plans osculateurs de C, ou dont les tangentes sont les transformées des tangentes de C, ce dernier point de vue étant conforme à l'esprit de la Géométrie

[1] Cet article était composé quand je me suis aperçu que tout cela est dans l'ouvrage de Salmon ; il emploi le mot *classe* dans le sens indiqué ici, et se sert du mot *rang* pour designer le nombre μ ; ce sont d'anciens souvenirs qui me seront revenus, mais la chose reste utile à dire puisqu'on l'oublie souvent.

réglée ; les trois nombres fondamentaux pour la courbe C′ sont les nombres m', μ, m relatifs à la courbe C, l'ordre étant renversé. Il n'y a là qu'une question de langage, mais elle n'est pas sans intérêt.

2. D'une manière générale, le langage des choses tangentielles est à peine fait ou peu employé ; celui des choses ponctuelles est loin d'être toujours bon. Il y a en Géométrie plane des contours quadrangulaires, des quadrangles, des quadrilatères complets ; un quadriangle peut être inscriptible, un quadrilatère complet peut être circonscriptible ; un quadrangle peut être orthogonal, et le cercle des neuf points se rattache à cette figure, au moins autant qu'à l'un des quatre triangles auxquels elle donne lieu. En Géométrie conique, on peut appeler tétraode un système de quatre droites issues d'un point, et cette figure a pour corrélation (en corrélation conique) l'angle tétraèdre complet. Les noms des polyèdres réguliers rappellent le nombre des faces, sans rien dire sur le nombre des sommets [1]. Le mot *projectif* n'a pas son pendant, et l'on dit que le rapport anharmonique est projectif, sans mentionner la propriété corrélative, qui résulte de la première mais a son intérêt propre ; en définissant directement le rapport anharmonique d'un faisceau par un rapport de sinus, on démontre l'égalité $O(a, b, c, d) = \omega(A, B, C, D)$, et il est aussi intéressant de faire varier le point O que de faire varier la sécante ω.

G. Fontené (Paris).

---

[1]) A propos des polyèdres réguliers, il semble que, dans le cas de polyèdres étoilés, le *genre* devrait être pris en considération dans l'enseignement : le genre est bien plus important que l'*espèce* (Cf. Appell et Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, p. 231) ; les deux polyèdres de septième espèce sont de genre zéro ; les deux polyèdres de troisième espèce sont de genre quatre, ce qui leur donne un grand intérêt.

THÉORÈMES DE BEZOUT ET D'EULER

L'établissement de la formule $AU + BV = R_n$ et l'évaluation des degrés des polygones U et V se font généralement d'une façon lourde et pénible ; je me propose de donner une démonstration plus rapide et beaucoup plus facile à présenter.

A polynôme de degré m, B de degré p, $m > p$. La recherche du plus grand commun diviseur donne les identités

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A = BQ + R \\ B = RQ_1 + R_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n \end{array}\right.$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{r} R = A - BQ \\ R_1 + RQ_1 = B \\ R_2 + R_1Q_2 - R = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_n + R_{n-1}Q_n - R_{n-2} \ldots\ldots = 0 \end{array}\right.$$

1° $AU + BV = R_n$, U et V polynômes entiers.

Je résous le système (2) par rapport à R_n ; le déterminant des inconnues est ± 1.

$$(3)\qquad \pm R_n = \begin{vmatrix} A - BQ & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 1 \\ B & & 0 & 0 \ldots\ldots & 1\,Q_1 \\ 0 & \cdots\cdots & & & 1\,Q_2 - 1 \\ 0 & \cdots\cdots & & & 1\,Q_3 - 1\;0 \\ \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & & & \cdots\cdots \\ 0\;Q_n - 1 & 0 \ldots\ldots & & & \end{vmatrix}$$

d'où

$$R_n = AU + BV.$$

2° Si R_n est de degré q, U est de degré $p-q-1$ au plus et V de degré $m-q-1$ au plus.

Le terme de degré le plus élevé dans U est contenu dans $Q_1 Q_2 \dots Q_n$, celui de V dans $QQ_1 \dots Q_n$; je multiplie membre à membre les identités (1).

$$ABRR_1 \dots R_{n-2} = BRR_1 \dots R_{n-1} QQ_1 \dots Q_n + \dots$$

Si on tient compte des facteurs communs aux premiers termes des deux membres, on voit que $QQ_1 \dots Q_n R_{n-1}$ est du degré de A. Or R_n est de degré q, R_{n-1} est donc au moins de degré $q+1$, par suite $QQ_1 \dots Q_n$ est au plus de degré $m-q-1$ et comme Q est de degré $m-p$, $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ est au plus de degré $p-q-1$.

CONSÉQUENCES

I. Si R_n est le plus grand commun diviseur, U et V sont premiers entre eux.

R_n contient les facteurs communs à A et B et ne contient qu'eux, donc U et V ne peuvent avoir de facteur commun.

II. Les polynômes U et V sont les seuls polynômes de degré $p-q-1$, $m-q-1$ ou de degré inférieur vérifiant la relation $AU+BV=R_n$:

Si on avait

$$AU_1 + RV_1 = Rn$$

on en conclurait :

$$A(u-U_1) = B(V_1-V).$$

Or A et B ont q facteurs communs, donc les $m-q$ autres facteurs de A devraient diviser V_1-V qui est de degré $m-q-1$ au plus.

III. *Théorème de Bezout.* — $AU+BV=1$. — Si A et B sont premiers entre eux, q degré du plus grand commun diviseur est nul, divisant par R_n,

$$AU+BV=1.$$

Les théorèmes I et II s'appliquent encore à U et V.

IV. *Théorème d'Euler.* — La condition nécessaire et suffisante pour que A et B aient un plus grand commun diviseur de degré q, est qu'on puisse trouver deux polynômes premiers entre eux, U de degré $p - q$, V de degré $m - q$ et tels que :

$$AU + BV = 0.$$

1° La condition est nécessaire. Supposons $R_n = 0$, l'identité fondamentale devient

$$AU + BV = 0.$$

Le plus grand commun diviseur est alors R_{n-1} qui est degré q, il en résulte d'après le n° 2 que U est de degré $p - q$ et V de degré $m - q$.

U et V sont premiers entre eux, car s'ils avaient un commun diviseur du premier degré, on aura après l'avoir supprimé :

$$AU_1 + BV_1 = 0$$
$$U_1 \text{ de degré } p - q - 1 \qquad V_1 \text{ de degré } m - q - 1.$$

En admettant que les $p - q - 1$ facteurs de U_1 appartiennent à B, il y aurait encore $q + 1$ facteurs de B qui devraient appartenir à A, ce qui est contre l'hypothèse.

2° La condition est suffisante. V de degré $m - q$ est premier avec U, donc ses $m - q$ facteurs appartiennent à A et il reste q facteurs de A qui appartiennent à B.

A. Poussart (Paris).

CHRONIQUE

Le Congrès international des mathématiciens (6-12 août 1900, Paris).

En décembre 1899, le comité d'organisation du Congrès international des mathématiciens a arrêté le texte de l'importante circulaire que nous reproduisons ci-dessous. Nous comptions pouvoir la mettre sous les yeux des lecteurs de l'*Enseignement Mathématique* dans notre numéro de janvier. Malheureusement, le Congrès étant rattaché à l'Exposition Universelle, c'est l'Imprimerie Nationale qui est chargée de ces travaux. Or, à cet important établissement, il faut deux mois pour imprimer trois pages. De plus, en vertu de nous ne savons quelles règles surannées, elle refuse toute communication d'épreuves ; les organisateurs mêmes du Congrès ne peuvent en obtenir en double. Une tentative officieuse que nous avons faite en janvier auprès de cette administration, afin de lui permettre de réparer les conséquences de ses retards, a obtenu le plus radical insuccès.

Une seconde circulaire du comité, en date de janvier, et relative aux travaux, est actuellement à l'impression. Comme elle est fort courte, nous osons espérer qu'elle sortira de l'Imprimerie Nationale avant le mois d'août prochain. Mais nous ne voulons pas, même dans l'intérêt de la science, renouveler une tentative aussi inutile.

Il importe seulement que le public mathématique, dans le monde entier, sache que si le service des correspondances est fait de façon déplorable, la faute n'en incombe, ni au comité d'organisation, qui met à l'accomplissement de sa tâche toute la diligence possible, ni aux services de l'Exposition, qui secondent les organisateurs de la façon la plus bienveillante et la plus active, mais uniquement à un établissement qui abuse de son monopole pour faire mal, ou ne pas faire en temps utile, le travail qu'on lui confie.

Nous prions, en tous cas, nos correspondants de ne pas hésiter à s'adresser à nous pour obtenir tous les renseignements relatifs au Congrès qu'ils pourraient désirer. Nous serons bien volontiers leurs intermédiaires et leurs interprètes auprès du comité d'organisation.

Celui-ci a pour président M. H. Poincaré et pour bureau celui de la Société Mathématique de France. La commission administrative, pré-

sidée par M. G. Darboux, a pour secrétaires MM. C. A Laisant et E. Duporcq; le trésorier est M. C. Naud, 3, rue Racine.

Voici le texte de la circulaire en question :

« Paris, Décembre 1899.

« A la suite de la circulaire qui vous a été adressée, et qui porte la date de décembre 1898, de nombreuses réponses sont parvenues au Comité d'organisation qui tient tout d'abord à en remercier ses correspondants.

« Il résulte de ces réponses que le nombre des adhésions éventuelles, qui indiquent la présence probable des adhérents au Congrès de 1900, s'élève à 1,000 environ. En outre, plus de 680 personnes appartenant aux familles des adhérents sont annoncées comme devant les accompagner.

« Le Comité, après avoir eu connaissance de ces résultats qui assurent le succès, a pris un certain nombre de décisions qu'il est de son devoir de porter à votre connaissance. Les unes sont d'ordre purement administratif, les autres concernent les travaux du Congrès. Nous allons les énumérer brièvement.

« Cotisations. — Le prix de la carte du Congrès, vous le savez, a été fixé à *trente francs*.

« En outre, il a été décidé que le prix des *cartes de famille*, qui seront remises à chacun des membres de la famille, sera de *cinq francs* par personne.

« Ces cartes donneront droit de participer à tous les travaux, à toutes les assemblées et à toutes les visites qui seront organisées ; mais elles ne donneront pas droit d'assister au banquet, ni de recevoir les comptes rendus des travaux du Congrès.

« Les cotisations devront être versées *au plus tard, le 15 mai 1900*. Dès maintenant les adhérents peuvent en effectuer l'envoi à MM. Claude-Lafontaine, Martinet et C^ie^, banquiers, rue de Trévise, 32, à Paris, pour le compte du trésorier du Comité d'organisation du Congrès des Mathématiciens.

« L'envoi comprendra par conséquent 30 francs pour l'adhérent membre du Congrès, et 5 francs pour chacun des membres de sa famille devant l'accompagner. Il sera indispensable d'y joindre les indications ci-après, en remplissant *très lisiblement* l'imprimé que vous trouverez ci-inclus (1), et en l'envoyant à MM. Claude-Lafontaine, Martinet et C^ie^, en même temps que les cotisations :

(1) Nous ne reproduisons pas ici ce tableau, mais nous en enverrons des exemplaires à tous ceux de nos lecteurs qui nous en exprimeraient le désir, s'ils ne l'avaient pas déjà reçu. Il leur suffira de s'adresser, dans ce but, soit à M. Laisant, 162, avenue Victor-Hugo ; soit à M. Naud, 3, rue Racine, à Paris.

« 1° Le nom et l'adresse de chacune des personnes auxquelles s'appliquent les cotisations :

« 2° La localité d'où l'on compte partir pour venir au Congrès ;

« 3° Pour les personnes habitant l'étranger, la gare par laquelle se fera l'entrée en France.

« A mesure que les avis de cotisations arriveront au Comité, celui-ci fera parvenir aux adhérents, sans trop de délai, les cartes de membres et les cartes de famille auxquelles ils auront droit, ainsi que les bons de réduction dont il sera parlé plus loin.

« Les communications du Comité, à partir du 15 mai 1900, seront *exclusivement* adressées aux adhérents ayant effectué le versement de leurs cotisations.

« Secrétariat. — La Société mathématique devant quitter le local qu'elle occupe actuellement, avant le 1er juin 1900, le secrétariat du Congrès sera installé à une adresse qui vous sera indiquée en temps utile. Dès son arrivée à Paris pour le Congrès, chaque porteur de carte devra se présenter au Secrétariat pour y faire timbrer sa carte.

« Chemins de fer et transports maritimes. — Les négociations engagées avec les chemins de fer français nous ont déjà permis d'obtenir de toutes les grandes compagnies françaises et de l'administration des Chemins de fer de l'Etat une réduction de 50 p. 0/0, à la condition de fournir un état nominatif précis et d'indiquer par quelle gare se fera l'entrée sur le réseau français, en ce qui concerne les voyageurs venant de l'étranger.

« C'est la raison d'être d'une des formalités indiquées plus haut et que vous avez intérêt à remplir le plus tôt que cela vous sera possible, pour vous assurer le bénéfice de la réduction consentie.

« C'est également pour ce motif que nous avons pris la liberté de solliciter votre adhésion définitive pour la date du 15 mai, après laquelle nous ne serions plus assurés de disposer d'un délai utile pour obtenir la faveur des bons de réduction.

« La faveur dont il vient d'être question est *exclusivement applicable aux membres adhérents du Congrès*, mais non aux porteurs de cartes de famille.

« Les bons de réduction seront valables depuis le 20 juillet jusqu'au 31 août.

« Des démarches vont être faites également à bref délai auprès des Compagnies de transports maritimes pour obtenir des avantages en faveur des membres du Congrès. Le résultat vous en sera communiqué.

« Installation a Paris. — Le Comité vous a prévenu qu'il lui était matériellement impossible de s'occuper de cette question. Mais il s'est mis en rapport avec M. Lubin, directeur d'une agence de voyages, boulevard Haussmann, 36, à Paris, de qui vous avez dû recevoir déjà

une circulaire, et à qui vous pourrez vous adresser pour obtenir les renseignements que vous désirez, et pour prendre les arrangements de votre choix.

« Langues admises dans les travaux du Congrès. — Il a été décidé que les langues officiellement admises au Congrès seront : *l'allemand*, *l'anglais*, *le français* et *l'italien*.

« Sections. — Les travaux du Congrès seront répartis entre *six* sections, savoir :

« Section d'*Arithmétique et Algèbre ;*

« Section d'*Analyse ;*

« Section de *Géométrie ;*

« Section de *Mécanique*, *Mécanique céleste et Physique mathématique* ;

« Section de *Bibliographie et Histoire ;*

« Section d'*Enseignement et Méthodes*.

« Travaux scientifiques du Congrès. — Une prochaine circulaire vous donnera des renseignements complets et précis sur l'organisation des travaux du Congrès.

« La présente circulaire est adressée à toutes les personnes qui ont répondu affirmativement ou négativement à la précédente, les dispositions de chacun ayant pu subir des modifications. Mais le triage des adresses a été fait avec tout le soin possible, afin de faire disparaître des doubles emplois qui étaient inévitables dans le premier envoi.

« Comme précédemment, nous vous prions instamment de vouloir bien faire connaître le plus possible la présente circulaire aux mathématiciens de votre entourage.

« Nous insistons tout spécialement auprès de ceux d'entre vous qui participent à la publication de journaux mathématiques, en les priant de porter à la connaissance de leurs lecteurs un extrait des dispositions les plus essentielles énumérées ci-dessus.

« Nous vous remercions d'avance du concours que vous voudrez bien nous apporter dans la préparation de l'importante manifestation scientifique dont il s'agit, et nous vous prions, M. d'agréer nos cordiales salutations.

« Le Comité d'organisation.

« P. S. Les personnes qui, sans avoir reçu cette circulaire, viendraient à en prendre connaissance et désireraient assister au Congrès, sont priées de s'adresser sans retard au Président du Comité d'organisation, rue des Grands-Augustins, 7, Paris.

« Adresser toutes communications concernant le Congrès à *M. le Pré-*

sident de la Société mathématique de France, rue des Grands-Augustins, 7, Paris. »

Au dernier moment, nous avons pu nous procurer le texte de la circulaire concernant les travaux dont nous parlons plus haut, et qui portera sans doute la date de mars, à cause des retards de l'impression :

« La Commission d'organisation du Congrès international des Mathématiciens a pris les résolutions suivantes :

« I. Les travaux seront répartis en six sections :

1° Arithmétique et Algèbre ;
2° Analyse ;
3° Géométrie ;
4° Mécanique et Physique mathématique ; Mécanique céleste ;
5° Bibliographie et Histoire ;
6° Enseignement et Méthodes.

« II. Les adhérents au Congrès sont invités à indiquer, *avant le 1er mai 1900*, les sujets des communications qu'ils désirent faire et les sections auxquelles ces communications sont destinées.

« La durée de chaque communication ne devra pas excéder vingt minutes.

« Les sujets des communications devront être adressés à M. H. Poincaré, président de la Commission des travaux, rue des Grands-Augustins, 7, Paris.

« III. Il y aura, en outre des réunions des sections, deux séances générales consacrées à des conférences dont voici la liste :

1° *Le 6 Août :* « M. M. Cantor : Sur l'historiographie des mathématiques.

« M. Volterra : Trois analystes italiens, Betti, Brioschi, Casorati, et trois manières d'envisager les questions d'analyse ; leur influence.

2° *Le 11 Août :* « M. Mittag-Leffler : Une page de la vie de Weierstrass.

« M. H. Poincaré : Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques.

« IV. Pour les communications en sections, on pourra faire usage de l'allemand, de l'anglais, du français et de l'italien. »

Ajoutons, à titre de renseignement, que la Compagnie générale transatlantique a accordé, en faveur des congressistes, les réductions suivantes sur les tarifs de ses prix de passages :

10 p. 100 sur la ligne de New-York ;
20 p. 100 sur les lignes des Antilles ;
30 p. 100 sur les lignes de la Méditerranée.

Prix proposé par l'Académie de Madrid.

L'Académie royale des Sciences exactes, physiques et naturelles, de Madrid a proposé pour le prix de Mathématiques année 1901 le sujet suivant :

Exposé didactique des théories modernes de la Géométrie non-euclidienne, ou analyse raisonnée des principaux travaux sur cette partie de la science, à partir de l'époque de Gauss jusqu'à nos jours.

Les récompenses offertes, et qui seront distribuées suivant le mérite des mémoires présentés, seront de trois classes : prix proprement dit (1 500 pesetas et une médaille d'or), accessit et mention honorable.

Les mémoires devront être écrits en espagnol ou en latin et ne s'exprimer que dans ces langues, ceci pour la clarté du texte ; ils seront reçus au Secrétariat de l'Académie, avant le 31 décembre 1901.

Pour plus de détails, consulter la revue *El Progreso Matematico*, n° 8, Zaragoza, février 1900.

M. Rebière.

M. Alphonse-Michel Rebière, examinateur d'admission à l'Ecole spéciale militaire de Saint-Cyr, vient de mourir, le 21 février dernier, à l'âge de cinquante-huit ans. C'était à la fois un excellent professeur, qui a produit plusieurs ouvrages d'enseignement très appréciés, et un écrivain scientifique des plus distingués. Ses ouvrages : *Mathématiques et Mathématiciens*, *Les femmes dans la Science*, *La vie et les travaux des savants modernes d'après les documents académiques*, sont connus de tous ceux qui s'intéressent à la Science et à son histoire. Il venait de publier son nouveau volume *Pages choisies des savants modernes*, et se proposait d'en donner deux autres analogues, l'un concernant les savants de l'antiquité et du moyen âge, l'autre consacré aux contemporains. Il est à désirer que l'on trouve au moins des documents relatifs à ce projet, dans les papiers de l'auteur, et qu'un continuateur puisse en assurer l'exécution.

A côté du mathématicien et de l'écrivain, l'homme mérite tous les regrets. Son caractère droit, sa bienveillance extrême et ses vertus privées lui avaient valu la sympathie de toutes les personnes qui l'ont connu. Puisse cette assurance adoucir un peu la douleur de sa famille, à laquelle nous adressons nos plus respectueuses et sincères condoléances ! C.-A. L.

M. E. Beltrami.

La science mathématique vient encore de faire une perte cruelle en la personne de l'un des géomètres italiens contemporains les plus éminents. M. Eugène Beltrami est décédé à Rome dans le courant du mois de février dernier.

Né à Crémone le 16 novembre 1835, il fut président de l'Académie R. dei Lincei, sénateur, et membre de toutes les académies importantes de l'Italie ; il appartenait en outre, soit comme membre étranger, soit comme correspondant, à l'Académie des sciences de Paris, à celles de Göttingue, de Berlin, de Bruxelles, à la Société royale des sciences de Liége, à la Société philomathique de Paris, à la Société mathématique de Londres. Professeur honoraire de l'Université de Bologne et professeur de Physique mathématique et de Mathématiques supérieures à l'Université de Rome, ce géomètre a produit, pendant tout le cours de sa carrière, une suite de travaux qui révèlent une grande puissance d'invention et une habileté remarquable dans l'Analyse. Nous ne pouvons, dans cette insertion hâtive, que payer à sa mémoire le tribut d'admiration qui lui est dû ; mais nous espérons que l'un de ses compatriotes ne tardera pas à nous donner une étude plus approfondie sur sa vie et ses travaux ; et l'*Enseignement Mathématique*, en la publiant, considérera qu'il accomplit un véritable devoir.

Royal astronomical Society.

Cette Société vient d'attribuer la médaille d'or à M. H. Poincaré, pour l'ensemble de ses travaux. Cette distinction accordée à l'éminent géomètre obtiendra l'approbation unanime du monde scientifique.

Académie des Sciences de Paris.

Nous avons plaisir à signaler la nomination, comme membre correspondant, de M. Mittag-Leffler.

Mathematical Association.

La réunion annuelle de la *Mathematical Association* s'est tenue à Londres (University college), le 27 janvier dernier, sous la présidence de M. Robert S. Ball. Il a été décidé que la *Mathematical-Gazette*, organe de l'association, paraîtrait désormais six fois par an au lieu de trois. Ce recueil se consacrera de plus en plus aux questions qui intéressent l'enseignement, et se propose d'accorder une large place à la bibliographie, tout en cherchant à présenter l'histoire de chaque chapitre de la science et le tableau de ses progrès contemporains, plutôt qu'à discuter le mérite des ouvrages analysés.

Il y a trop de points communs entre ce programme et le nôtre pour que nous ne soyons pas disposés à saluer de toute notre sympathie ces tentatives nouvelles, qui finiront, croyons-nous, par se généraliser dans tous les pays.

BIBLIOGRAPHIE

E. Borel. — **Leçons sur les fonctions entières** (Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions) ; 1 vol. gr. in-8°, VI-124 p. : prix 3 fr. 50 : Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Dans son précédent ouvrage, *Leçons sur la théorie des fonctions* (1898 l'auteur avait exposé les éléments de la théorie des Ensembles, avec des applications à la théorie des fonctions. Celui-ci s'applique spécialement aux fonctions entières, comme l'indique le titre. Dans sa préface, M. Borel explique que ces volumes sont rédigés d'après les leçons faites à l'École normale aux élèves de seconde année, c'est-à-dire à des auditeurs dont les connaissances en Analyse sont peu étendues, mais solides. « Il est dès lors « possible, ajoute-t-il, après avoir choisi un sujet bien délimité, d'aller « assez vite, et d'arriver en peu de leçons à approcher, au moins sur cer- « tains points, des limites actuelles de la science. »

Malgré le peu d'étendue de ce volume, on se rendra compte de ce qu'il contient en réalité d'après l'énumération sommaire que nous reproduisons ici.

Ch. I. — *Le théorème fondamental de Weierstrass.* Généralités sur les fonctions entières. Les facteurs primaires. Quelques remarques sur les séries à termes positifs. L'exposant de convergence. — Ch. II. *Les idées de Laguerre.* La notion de genre. Les fonctions de genre zéro et de genre un. Les fonctions de genre fini. — Ch. III. *Les inégalités de M. Poincaré.* Le Mémoire de M. Poincaré. Le module maximum des fonctions d'ordre p. Le module maximum et la fonction majorante. — Ch. IV. *Les résultats de M. Hadamard.* Le premier théorème de H. Hadamard. Le deuxième théorème de M. Hadamard. Applications. — Ch. V. *Le théorème de M. Picard.* Le théorème de M. Picard. Le théorème de M. Picard généralisé. — Notes. I. *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières.* — II. *Les fonctions à croissance régulière.* Définitions et énoncés. Le premier théorème. Le deuxième théorème. Conclusion. — *Les fonctions à croissance irrégulière.*

Nous avons pleine confiance dans le succès de ce nouveau volume du jeune géomètre auquel la science mathématique est déjà redevable de si remarquables travaux : et nous espérons que, suivant sa promesse, il continuera à nous donner des volumes nouveaux, « écrits dans le même esprit, inspirés par les mêmes idées directrices, » et qui dans leur ensemble représenteront une œuvre capitale sur la théorie des fonctions.

C.-A. L.

G. Lazzeri. — **Manuale di Trigonometria piana** ; 1 vol. in-18, IV-124 p. ; prix 1 L. ; Livourne, R. Giusti, 1900.

Ce petit ouvrage est rigoureusement classique, et destiné aux étudiants. L'auteur y a apporté les grandes qualités pédagogiques qui font de lui l'un des représentants les plus distingués de l'enseignement secondaire en Italie : son manuel ne contient que les matières vraiment indispensables ; mais elles sont bien ordonnées et clairement exposées. L'ouvrage comprend deux livres : Théorie des fonctions circulaires ; Résolution des triangles. Dans les six chapitres du premier livre on trouve les définitions, l'étude des variations, les relations entre les fonctions circulaires d'un même angle ou de plusieurs, les tables, les identités et équations trigonométriques. Le livre II comprend trois chapitres : les relations, la résolution proprement dite et des applications diverses.

Au risque d'allonger un peu, nous aurions aimé peut-être à voir ce manuel accompagné d'un certain nombre d'exercices bien choisis. Malgré cette légère critique, nous regardons le petit livre de M. Lazzeri comme excellent, et appelé à rendre beaucoup de services.

C.-A. L.

P. Mansion. — **Theoria sucinta de las funciones hiperbolicas** trad. en espagnol par D. L. G. Gasco) ; 1 vol. in-8°, 44 p. ; prix, 1 fr. ; Valence, P. Aguilar ; Paris, Gauthier-Villars.

Ce petit ouvrage de M. Mansion est bien connu dans son édition française, et apprécié de tous ceux qui l'ont lu. La traduction espagnole que nous signalons aujourd'hui a été augmentée : 1° d'un résumé de Trigonométrie Lobatchefskienne ; 2° d'une citation d'Yvon Villarceau (dans la préface) ; 3° de petites améliorations de détail. Nous sommes heureux de voir cette importante théorie des fonctions hyperboliques se répandre en Espagne ; elle est à la fois intéressante au point de vue de la science pure, et tout à fait précieuse en ce qui touche les applications.

P. Mansion. — I. **Introduction à la théorie des déterminants**, avec de nombreux exercices, à l'usage des établissements d'instruction moyenne. Troisième édition. Un vol. in-8° de 50 pages ; prix, 1 fr. ; Gand, Hoste, 1899.

II. **Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen**. Un vol. in-8° de 50 pages ; prix, 1 mark ; Leipzig, Teubner, 1899.

III. **Éléments de la théorie des déterminants**, avec de nombreux exercices. Sixième édition, revue et augmentée. Un vol. in-8° de IV-91 pages ; prix 3 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

IV. **Elemente der Theorie der Determinanten**. Dritte vermehrte Auflage. Un vol. in-8° de 102 pages ; prix, 2 mark 60 ; Leipzig, Teubner, 1899.

Dans les deux premiers de ces opuscules, l'auteur expose les propriétés fondamentales des déterminants à deux ou à trois lignes, la théorie des équations linéaires à deux ou à trois inconnues, et celle de l'élimination entre deux équations dont le degré est au plus égal à trois.

Dans la nouvelle édition des *Éléments de la Théorie des déterminants* qui

comme l'*Introduction*, paraît à la fois en français et en allemand. L'auteur a introduit diverses améliorations de détail dont quelques-unes se trouvent déjà dans la quatrième édition (troisième édition française) et, dans la cinquième (seconde édition allemande). En outre, il donne, en appendice, quarante exercices supplémentaires. Mais à part cela, le plan des *Éléments* est resté le même.

Comme dans les précédentes éditions, il y a, en tête du livre, un chapitre préliminaire à l'usage des commençants, où les premières propriétés et les premières applications des déterminants à deux ou à trois lignes sont exposées d'une manière extrêmement élémentaire. Ce chapitre est extrait de l'*Introduction à la théorie des déterminants*, analysée plus haut.

Le grand texte des deux premiers chapitres de l'ouvrage est consacré à la définition et aux propriétés fondamentales des déterminants *généraux*.

Dans la définition, la question du signe de chaque terme est traitée de manière à ce qu'elle puisse s'appliquer sans modification aux déterminants cubiques ou même à un nombre quelconque d'indices.

Les propriétés fondamentales considérées ont été classées dans un ordre strictement logique et sont au nombre de *douze* seulement : sept sont relatives à des déterminants quelconques, deux à ces déterminants et à leurs mineurs, trois aux déterminants nuls et à leurs mineurs.

Les exercices des deux premiers chapitres et de l'appendice sont imprimés en petit texte. On y fait connaître : 1° divers théorèmes généraux moins élémentaires que ceux du grand texte (théorèmes de Laplace, de Muir, de Kronecker, etc.) ; 2° les définitions et les propriétés de la plupart des déterminants *spéciaux* remarquables : circulant, continuant, déterminant adjoint, gauche, symétrique, symétrique gauche, persymétrique, cyclosymétrique, etc.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution des équations linéaires, à l'élimination entre des équations linéaires (d'après Roché) et enfin à l'élimination entre deux équations algébriques quelconques. L'exposition de la méthode dialytique, qui est basée sur un théorème de Falk, est plus simple, plus complète ou plus rigoureuse que celle de la plupart des traités d'algèbre. En appendice, on trouve le principe fondamental sous une autre forme, indépendante du théorème : *toute équation algébrique a une racine* ; et aussi l'esquisse de la méthode de Grassmann.

Reinhold Müller. — **Leitfaden f. d. Vorlesungen über darstellende Geometrie** an der herzoglichen technischen Hochschule zu Braunschweig. 1 vol. in-8° de 88 p. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1899.

Ce petit ouvrage de Géométrie descriptive n'a pas été écrit pour la librairie, et cependant il y est arrivé. En effet l'auteur ne l'a entrepris que sur les instances de ses élèves et il pensait le faire paraître en autographie. Le but était de fournir aux étudiants un memento, qui leur permît de suivre facilement les cours en consacrant plutôt leur temps à la reproduction des épures qu'au relevé de notes théoriques.

Il ne faut donc pas s'étonner si cet ouvrage contient peu de figures, ni de la sobriété de ses explications. Les exercices y sont en nombre réduit, les développements étant donnés au cours que l'élève doit suivre parallèlement à son étude de l'ouvrage.

Ce volume ne conviendrait pas à une première étude de la Géométrie descriptive, mais il devient immédiatement utile à toute personne qui, ayant cultivé cette branche, désire en posséder sous un format restreint les principales théories et applications. C'est une carte à petite échelle, faisant connaître la configuration générale d'un pays, sans s'arrêter aux détails du terrain.

L'ouvrage est partagé en deux parties ; la plus importante est consacrée aux projections parallèles, soit obliques, soit orthogonales.

Après avoir passé rapidement en revue : conventions, définitions et symboles, l'auteur traite en quelques pages la représentation du point, de la droite et du plan, et les exercices sur ces trois éléments combinés. Un exemple de position quelconque est présenté et, dans de courts alinéas, les résultats provenant de modifications des données sont établis sans démonstration. C'est au lecteur à construire et à déduire : à lui de travailler le texte.

L'exposition des méthodes de rotation, les problèmes sur les angles nous font pénétrer plus avant dans la matière ; les explications sont alors plus amples et les constructions relatives aux exercices se précisent soigneusement. Passons rapidement sur les polyèdres, leurs sections et leurs pénétrations pour arriver aux chapitres qui traitent des projections du cercle et enfin à l'étude des surfaces.

Si rapidement exquissées qu'elles soient, les pages qui récapitulent les surfaces de révolution, les surfaces coniques et cylindriques, hélicoïdales et gauches sont des plus claires. Elles mettent en relief ce qu'il est nécessaire de posséder. Dans le cours de ces différents chapitres nous voyons apparaître plusieurs développements analytiques, des formules, dont le but est de démontrer rapidement certains théorèmes sans recourir soit à la Géométrie projective, soit à de trop longs raisonnements géométriques. La théorie des ombres, des plans cotés et l'axonométrie sont enlevées en une dizaine de pages.

La seconde partie du livre, consacrée à la projection centrale, est de beaucoup moins étendue ; l'auteur se borne à fournir quelques indications sommaires sur la représentation des éléments et sur quelques problèmes usuels.

Ce livre, l'auteur en convient lui-même, n'est pas écrit pour remplacer un manuel, il est beaucoup trop résumé ; mais c'est un petit guide qui conduira facilement les intelligences timorées à travers les écueils des ouvrages en plusieurs tomes. Nous pensons donc que, vu son contenu, il aidera non seulement les étudiants de Brunswick à s'assimiler le cours de leur professeur, mais qu'il contribuera aussi à faciliter l'étude de la Géométrie descriptive dans d'autres milieux.

ALPH. BERNOUD. (Genève.

H. LAURENT. — **Traité de perspective** à l'usage des peintres ou des dessinateurs de profession ou des personnes qui désirent se faciliter l'étude du dessin ; 1 vol. petit in-8°, 75 p. avec fig. ; Paris, C. Schmid.

« Ce petit Traité de perspective, annonce l'auteur dans sa préface, est surtout destiné aux peintres qui ont bien voulu se donner la peine d'apprendre même très superficiellement les notions de Géométrie élémentaire exigées pour le baccalauréat, abstraction faite de la mesure des surfaces et des volumes. Pour le lire avec fruit, il faut en outre posséder quelques notions de

Géométrie descriptive. Cependant, les premières pages peuvent être lues et comprises même sans connaître la Géométrie descriptive, et les procédés qui s'y trouvent démontrés suffisent déjà pour mettre en perspective un grand nombre d'objets et pour éviter des fautes grossières aux peintres compositeurs. »

Les artistes peintres se donneraient la peine d'apprendre la perspective s'ils savaient, d'une part, comme il est facile d'en comprendre, d'en retenir et d'en appliquer les règles, et, d'autre part, les immenses ressources qu'ils peuvent en tirer pour produire l'effet.

L'ouvrage est divisé de la manière suivante : Chap. Ier : Préliminaires. — Chap. II : Solution de quelques problèmes. — Chap. III : Perspective des ombres et contours apparents. — Chap. IV : Perspective sur un tableau qui n'est pas plan; notes diverses. — Chap. V : Copie d'après nature.

Ce petit volume est édité avec une rare perfection d'exécution matérielle; les figures sont d'une admirable clarté. Aussi croyons-nous, à cause du fond et de la forme, qu'il trouvera de nombreux lecteurs parmi les artistes, que l'auteur a surtout en vue. Les disciples de l'école réaliste eux-mêmes seront curieux de le consulter et y pourront éprouver quelque plaisir, malgré l'appréciation plutôt sévère de M. Laurent, qui accuse cette école de ne produire « que des effets repoussants ». Nous qui n'attachons qu'une importance secondaire aux questions d'étiquettes, de chapelles et d'enseignes, en matière d'art ou de science, nous croyons que des notions élémentaires de perspective, bien présentées, comme elles le sont ici, ne pourront jamais nuire au talent d'un artiste, qu'il soit sculpteur, architecte ou peintre, procédant de Raphael, de Michel-Ange, de Courbet ou de Manet.

Annuaire pour l'an 1900, publié par le bureau des longitudes : avec des notices scientifiques : 1 vol. in-18 de près de 800 p. ; prix : 1 fr. 50 : Paris, Gauthier-Villars.

Ce petit volume compact, contient comme toujours une foule de renseignements indispensables à l'ingénieur et à l'homme de science. Parmi les notices de cette année, signalons tout spécialement celle de M. A. Cornu, sur *Les machines génératrices des courants électriques* et celle de M. G. Lippmann, sur *Les nouveaux gaz de l'atmosphère*.

Il y a lieu d'attirer en outre l'attention sur une innovation fort importante, mais qui troublera pendant quelque temps bien des habitudes. A partir de 1900, toutes les heures sont exprimées en temps civil compté de 0 h. à 24 h. Par exemple, on dînera à 19 h. pour aller au théâtre à 20 h. 30 m. Plusieurs horaires de chemins de fer étrangers ont adopté déjà ce mode de division du temps ; et il est probable que d'ici peu, nous verrons apparaître des montres et des horloges graduées suivant ce système, où les heures du jour sont 6 h. à 18 h. et où les heures de nuit sont 0 h. à 6 h. et 18 h. à 24 h.

E. Lampe. — **Die reine Mathematik in den Jahren 1884-1899,** nebst Aetenstüken zum Leben von Siegf. Aronhold mit seinem Bildnisse. 1 broch. gr. in-8°, 48 p. W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1899.

Cet opuscule a été écrit à l'occasion du Centenaire de l'École technique supérieure de Berlin. Ce sont quelques pages d'histoire destinées non seule-

ment aux mathématiciens, mais à l'ensemble des savants. On y trouve un intéressant exposé du développement des sciences mathématiques pures pendant les quinze dernières années. L'auteur passe en revue les diverses branches et signale les travaux fondamentaux dont elles se sont enrichies pendant cette période. Placé depuis bien des années à la tête de l'important recueil les *Fortschritte der Mathematik*, M. Lampe était tout particulièrement désigné pour résumer en quelques pages un si vaste sujet.

L'ouvrage se termine par un certain nombre de documents officiels et autres concernant la vie de l'éminent géomètre Arnold (1819-1884) qui fut une des illustrations de l'Ecole technique supérieure de Berlin.

Cl. Vidal. — **Pour la Géométrie euclidienne** : étude critique élémentaire sur les fondements de la Géométrie ; gr. in-8°, 3. p. ; Paris, Croville-Morant, 1900.

Voici encore un plaidoyer, fort intéressant, en faveur de la Géométrie euclidienne, et contre l'impossibilité de la démonstration du célèbre postulatum. L'auteur se propose d'établir que la notion de droite lobatchefskienne, aussi bien que celle de droite riemannienne, est à rejeter, en tant que droite, et il arrive à cette conclusion : « il n'y a qu'une Géométrie, la Géométrie euclidienne, parce qu'il n'y a qu'une droite, la droite euclidienne. » La brochure est divisée en six paragraphes : les trois Géométries : — Démonstration du postulatum d'Euclide dans la théorie des parallèles : conséquences de cette démonstration : — Discussion des arguments sur lesquels se fonde la prétendue indémontrabilité du postulatum d'Euclide : — Identité de la droite riemannienne avec une circonférence de grand cercle d'une sphère : — Unité de la Géométrie : vraie signification des théories non euclidiennes : — Sur quelques définitions de la ligne droite.

Nous nous garderions bien, surtout dans cette Revue, de prendre parti dans un sens ou dans l'autre. Mais nous croyons que ce retour offensif des *euclidiens*, caractérisé par les travaux de M. le Général Frolov, par la brochure de M. Vidal, et par quelques autres tentatives, amènera de nouvelles discussions, dans lesquelles la Science Mathématique et la Philosophie ne pourront que gagner. Nous serons très disposés, à l'occasion, à mettre l'*Enseignement mathématique* à la disposition des deux camps. Ces polémiques forcément courtoises, entre adversaires également animés par l'amour sincère de la vérité, ne peuvent être qu'une source de progrès.

C.-A. Laisant

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences ; t. CXXIX ; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

N° 25 (18 décembre). — Prix décernés et proposés

N° 26 (26 décembre). — P. Vieille : Sur les discontinuités produites par la détente brusque de gaz comprimés.

T. CXXX ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

N° 1 (2 janvier). — Servant : Sur les systèmes orthogonaux.

N° 2 (8 janvier). — Estienne : Sur la théorie des erreurs.

N° 3 (15 janvier). — H. Padé : Sur la distribution des réduites anormales d'une fonction. — J. Proszycki : Sur la réduction d'un problème algébrique. — A. Boulanger : Détermination d'invariants attachés au groupe G_{168} de M. Klein. — A. Broca : Champ de vecteur et champ de force. Action réciproque des masses scolaires et vectorielles. Energie localisée. — A. Petrovsky : Sur la distribution du potentiel dans un milieu homogène.

N° 4 (22 janvier). — C. Guichard : Sur les surfaces isothermiques. — Riquier : Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque. — A. Petrovsky : Sur la mesure de la capacité dans un milieu hétérogène.

N° 5 (29 janvier). — H. Deport : Sur les équations aux dérivées partielles. — H. Petrini : Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel. — P. Vieille : Sur la loi de la résistance de l'air au mouvement des projectiles.

N° 6 (5 février). — J. Clairin : Sur une classe de transformation. — E. Cosserat : Sur la détermination de toutes les surfaces algébriques à double génération circulaire. — Autonne : Sur les équations algébriques anharmoniques. — G. A. Miller : Sur les groupes des isophmorismes. — A. Broca : Sur les masses vectorielles de discontinuité.

N° 7 (12 février). — Eug. Cosserat : Sur les cercles tangents à quatre plans isotropes et sur les surfaces à double génération circulaire. — A. Tuybaut : Sur les équations harmoniques et les surfaces isothermiques. — Autonne : Sur les équations algébriques anharmoniques. — Estienne : Valeur plausible d'une grandeur variable. — Andrade : A propos de deux problèmes de probabilités. — W. Stekloff : Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — Davidoglou : Sur les zéros des intégrales réelles des équations linéaires de troisième ordre.

N° 8 (19 février). — E. Picard : Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles par leurs valeurs sur un contour fermé. — R. Bricard : Détermination des surfaces ayant un système de lignes de courbure égales. — C. Guichard : Sur une transformation des surfaces

isothermiques. — Stekloff : Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. G. Humbert : Sur les fonctions à quatre paires de périodes. — Rateau : Théorie des hélices propulsives.

N° 9 (26 février). — M. d'Ocagne : Sur l'application de la Nomographie à la prédiction des occultations d'étoiles par la lune. — A. Korn : Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — N.-J. Hatzidakis : Sur les équations cinématiques fondamentales des variétés dans l'espace à n dimensions. — Gouy : Sur le mouvement lumineux et les formules de Fourier.

Annali di mathematica pura ed applicata, dirigées antérieurement par F. Brioschi et continuées par les professeurs E. Beltrami, L. Cremona, U. Dini et G. Jung : série 3, t. III : prix d'abonnement à un vol. : 16 L. : Milan, C. Rebeschini, 1899.

Fasc. 3, 4. — Bianchi : Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante. — Vitterbi : Sull' operazione funzionale rappresentata da un integrale definita, riguardata come elemento d'un calcolo.

American journal of mathematics, edited by S. Newcomb : prix d'abonnement annuel, 5 dollars : vol. XXII, Baltimore, John Hopkins Press, 1900.

N° 1 (janvier). — M. Petrovitch : Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certains types d'équations différentielles. — G. H. Ling et G. A. Miller : Proof that there is no simple Group whose order lies betwen 1092 and 2001. — T. E. Holgate : Note additional to a former Paper « on certain ruled surfaces of the fourth Order ». — H. Freimann Stecker : Non-euclidian Properties of plane cubics. — E. O. Lovett : Note on the differential Invariants of Goursat and Painlevé. — E. O. Lovett : Supplementary Note on projective Invariant. — L. E. Dickson : Certains Subgroup of the Betti-Mathieu Group. — W. H. Metzler : On the excess of the number of Combination in a Set which have an even number. — E. W. Ritter : On Lie's theory of continuous Groups. — V. Snyder : Liner of curvature on annular Surfaces having two spherical Directrices.

Periodico di mathematica per l'insegnamento secondario, dirigé par G. Lazzeri : organe de l'association « Mathesis » ; prix d'abonnement annuel, Italie, 8 L. ; Etranger, 9 L. : série II, vol. II, 1900 ; Livourne, R. Giosti.

Supplemento al periodico di mathematica : prix d'abonnement annuel : Italie, 2 L. : Etranger, 2 L. 50 : 3e année, 1900 : Livourne, R. Giusti.

Jornal de Sciencias Mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira, t. XIII, 1899. Imprensa da Universidade, Coimbra.

N° 6. — R. Marcolongo : Les composantes de déformation d'un milieu continu. — Bibliographie.

Nyt Tidsskrift for Matematik. rediger et of C. Jul. og V. Thiele : série A, 11e année, n°s 1 et 2 : série B, 10e année, n° 4, 1899. L. Jorgensens. Copenhague.

Nieuw Archief voor Wiskunde, dirigé par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg, et P.-H. Schoute; tweede Reeks, Deel IV, Derde Stuck, 1899; Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Revue semestrielle des publications mathématiques, publiée par P.-H. Schoute, D.-J. Korteweg, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn, P. Zeemann, t. VIII, 1re partie, avril-octobre 1899; Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Revue générale des sciences pures et appliquées, dirigée par L. Olivier, 11e année, 1900; Arm. Colin et Cie, Paris.

N° 2 (30 janvier). — A signaler le remarquable article de M. Em. Picard : L'idée de fonction depuis un siècle.

Zeitschr. für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwærtig herausgegeben von Dr R. Mehmke und Dr M. Cantor; t. XLV, n° 1, 1900; Teubner, Leipzig.

1 Heft. — Stan. Jolles : Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmæssig belasteten Balkens. — Jos. Grünwald : Lineare Lösung der Aufgaben ueber das Verbinden und Schneiden imaginærer Punkte, Geraden und Ebenen. — K. Heun : Neue methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhængigen Verænderlichen. — J. Jung : Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens. — J. Eggenberger : Zur Darstellung des Bernouillischen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — C. Burali-Forti : Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques. — H.-E. Timerding : Ueber einige conforme Abbildungen. — W. Elsasser : Die Funktion des Auges bei Leonardo da Vinci. — E. Wappler : Zur Geschichte der Mathematik.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von prof. G. von Escherich und prof. L. Gegenbauer, 11e année, 1900, Eisenstein et Cie, Vienne.

1. Vierteljahr. — J.-A. Gmeiner : Ueber die Primzahlen und Primideale im Rationalitætsgebiete der fünften Einheitswurzeln. — K. Zindler : Ueber Complexcurven. — K. Carda : Zur Theorie der algebraischen Gruppen der Geraden und der Ebene. — O. Biermann : Ueber die Evoluten von Raumcurven. — O. Stolz : Zum Existenzbeweis für das complexe Integral. — Erw. Dintzl : Bemerkung über einen Satz des Herrn Lerch. — A. Schwarz : Ueber die Krümmung der cyklischen Curven nebst einem Beitrage zur neueren Dreiecksgeometrie.

Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann; 31e année, 1900, Teubner, Leipzig.

N° 1. — Vorwort des Herausgebers zum XXXI. Jahrgang. — A. Schülke : Berechnung der Planeten-Erscheinungen. — Kleinere Mitteilungen.

Journal für reine und angewandte Mathematik, gegründet von A.-L. Crelle, herausgegeben von L. Fuchs, t. CXXI en 4 fascicules, 1899. Reimer, Berlin.

Fasc. 1 et 2. — L.-W. Thomé : Ueber lineare Differentialgleichungen mit

mehrwertigen algebraischen Coefficienten. — R. Dedekind : Ueber die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern. — K. Bohm : Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials. — L. Königsberger : Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale. — Ludw. Schlesinger : Ueber projective Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen.

Fasc. 3. — Ludw. Schlesinger : Ueber vertauschbare lineare Substitutionen. — Timerding : Ueber eine Kugelschar. — G. Wallenberg : Ueber *Riccati*'sche Differentialgleichungen hoherer Ordnung. — G. Wallenberg : Zur Theorie der Differentialinvarianten. — Rich. Fuchs : Ueber lineare Differentialgleichungen welche mit ihrer adjungirten zu derselben Art gehören. — G. Wallenberg : Die Differentialgleichungen deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Funktion der willkürlichen Constanten ist. — E. Grünfeld : Ueber die einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten und associerten Differentialgleichnung n-ter Ordnung. — Alf. Meder : Zur Theorie der singulæren Punkte einer Raumkurve. — G. Pirondini : Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique.

Fasc. 4. — M. Hamburger : Ueber die singulæren Lösungen der allgemeinen Differentialgleichungen höherer Ordnung. — Fr. Kötter : Ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flæchen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — P. Appell : Sur une forme générale des équations de la Dynamique. — L. Koenigsberger : Ueber die Entwickelungsform algebraischer Funktionen und die Irreductibilitæt algebraischer Gleichungen.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, im Verein mit andern Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe: t. XXVIII, année 1897 (en trois fascicules) : 3e fascicule, un vol. in-8° de LXVII-325 p., 1900. Georg Reimer, Berlin.

Le troisième et dernier fascicule du tome XXVIII contient les sections X (*Mecanique*), XI (*Physique mathématique*), et XII (*Géodésie, Astronomie, Météorologie*).

Unterrichtsblætter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von profess. Dr.-B. Schwalbe und profess. Fr. Pietzker, 5e année, 1899, O. Salle, Berlin.

Nos 5 et 6. — Ces deux fascicules contiennent les communications présentées par MM. Kiepert, Brahler, Habenicht, Kohlrausch, Richter, Schmidt, à la réunion annuelle de Hanovre et dont nous avons rendu compte dans le numéro 4 de *L'Enseignement mathématique* (1899, p. 298-301).

Formulaire de Mathématiques, publié par la *Revue de Mathématiques*, directeur G. Peano; t. II, n° 3, 1 vol. gr. in-8°, 199 p.: Logique mathématique : Arithmétique; Limites; Nombres complexes; Vecteurs; Dérivées : Intégrales. Prix : 5 L.: Turin, Bocca, Clausen, 1899.

E. Wallon. — **Leçons d'optique géométrique** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. 1 vol. grand in-8° de VII-342 pages, avec 169 figures ; prix, 9 fr. : Paris, Gauthier-Villars, 1900.

E. Cahen. — **Eléments de la théorie des Nombres**. congruences, formes quadratiques, nombres incommensurables, questions diverses : 1 vol. grand in-8° de VIII-503 pages : prix, 12 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Jacques Boyer. — **Histoire des mathématiques** : illustrée de fac-similés, de manuscrits et de portraits ; 1 vol. in-8° carré de 226 p., 30 fig., cartonné à l'anglaise : prix, 5 fr. : Paris, G. Carré et C. Naud, 1900.

G.-M. Testi. — **Elementi di matematica** ad uso degli alemni delle scuole normali : 3ª edizione.

Fasc. I : Nozioni di Algebra : radici quadrate e cubiche : pr., 0.80 L. — Fasc. II : Geometria piana : generalità : eguaglianza : equivalenza e misura : pr. 0.80 L. — Fasc. III : Aritmetica razionale : norme didattiche per l'insegnamento dell' Aritmetica nelle scuole elementari inferiori : pr. 0.90 L. — Fasc. IV : Proporzionalità e similitudine : norme per l'insegnamento della Geometria piana nelle scuole elementari : pr. 0.60 L. — Fasc. V : Proporzionalità e problemi relativi : norme didattiche per l'insegnamento dell' Aritmetica nelle scuole elementari superiori : pr. 0.70 L. — Fasc. VI : Geometria solida ; norme didattiche per l'insegnamento della Geometria solida nelle scuole elementari : pr. 0.90 L. — Livourne, R. Ginsti, 1900.

E. Cotton. — **Sur les variétés à trois dimensions** (thèse de doctorat présentée à la faculté des sciences de Paris : in-4°, 54 p. : Paris, Gauthier-Villars, 1899.

J. Pünchera. — **Der Geometrie Unterricht in der I et II Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**. 1 vol. in-8°, 195 p. L. Hitz. Chur. 1899.

Em. Bagnoli. — **Trattato delle Corde nel Circolo**. me broch. in-8°, 87 p. : Erm. Loescher et C^ie, Rome.

E. B. — **Geometria rettilinea e curvilinea**. trattata con metodo preeuclidico, e Cronogoniometria, un vol. in-8°, 295 p., avec un fascicule contenant 24 planches : prix : 5 lires ; 1899. Erm. Loescher et C^ie, Rome.

R. Böger. — **Ebene Geometrie der Lage**. un vol. in-8°, 289 : prix : 5 marks : t. VII de la *Collection de Schubert* : Goeschen, Leipzig.

F. Bohnert. — **Ebene und sphærische Trigonometrie**. un vol. in-8°, 160 p. ; prix : 2 marks : t. III de la *Collection de Schubert* : Goeschen, Leipzig.

Le Gérant : C. NAUD.

EVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LES IDÉES D'AUGUSTE COMTE

SUR LA

PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES (*)

Cent ans se sont écoulés depuis le 19 janvier 1798, jour de la naissance d'Auguste Comte.

Depuis sa jeunesse jusqu'aux derniers jours de sa vie, ce philosophe a constamment cherché à réaliser cet idéal : rétablir sur des bases nouvelles l'union des esprits que l'on possédait au moyen âge, quand l'Europe occidentale n'avait qu'un seul chef d'église, le pontife des catholiques.

Ce rêve d'Auguste Comte ne s'est jamais accompli : il faut reconnaître en effet qu'en dépit des efforts de Comte, l'anarchie intellectuelle, que lui-même croyait être un des plus grand maux de l'humanité, n'en subsiste pas moins et se manifeste dans l'appréciation, souvent si opposée, de l'œuvre de Comte. Tandis que ses adeptes peu nombreux, mais parsemés par tous les coins de la terre, voient en lui le fondateur d'une nouvelle religion, çà et là s'élèvent des voix qui lui refusent toute importance philosophique : on va même jusqu'à dire que ses idées furent les visions d'un fou. Il y a quelques années, parurent dans la *Revue des Deux-Mondes* les articles du célèbre mathématicien Joseph Bertrand, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences de Paris, articles consacrés à la mémoire de Comte. L'un de ces articles finit par ces mots : « Les pensionnaires de Charenton sont nombreux ; presque tous sont plus fous qu'Auguste Comte, mais j'en ai connu qui l'étaient moins ! ».

Il faut dire pourtant qu'il y a des gens d'une opinion intermédiaire, qui voient dans le *Cours de philosophie positive* de Comte,

(*) Traduit du journal philosophique de Moscou (*Voprossy filosofii i psichologii*: 1899), par Mlle A. Gromeka.

ainsi que dans le *Traité de la méthode* de Descartes, la plus brillante manifestation de la philosophie généralisatrice du peuple français. Les mêmes personnes croient également que l'introduction de la sociologie dans le cours des sciences positives, introduction due à Comte, est un grand service qu'il a rendu à la pensée humaine. Quant à l'importance des idées de Comte relativement à la philosophie des autres sciences particulières, c'est une question dont on s'est peu occupé. Or, la présente étude a précisément pour but d'attirer l'attention sur celles des idées de Comte concernant la philosophie des mathématiques et qui ont été confirmées plus tard par le développement des sciences mathématiques.

Dans les œuvres des grands penseurs, ce qui mérite vraiment notre attention, ce sont celles de leurs idées qui ont été en quelque sorte comme des jalons plantés sur le chemin de la pensée humaine ; quant à leurs erreurs, il n'y a ni intérêt ni utilité à les rechercher.

I

Un talent mathématique exclusif qui se manifesta chez Comte dès sa première jeunesse le décida à entrer en 1814 à l'École Polytechnique, laquelle alors, comme aujourd'hui, était en France le centre de toute éducation mathématique sérieuse. Dans une liste des candidats, dressée par un des quatre examinateurs, il fut inscrit le premier ; dans les autres listes, les premiers furent Duhamel et Lamé. Pendant tout le temps que Comte a passé à l'École Polytechnique, ses talents et son application lui valurent la bienveillance de ses illustres maîtres Poinsot et Navier.

En 1816, les malentendus de Comte avec un des répétiteurs de l'École, Lefébure de Fourcy (auteur d'un manuel bien connu de Géométrie analytique), l'obligèrent à suspendre ses études à l'École Polytechnique. Après avoir vainement cherché à devenir secrétaire de Casimir-Périer, le futur ministre de Louis-Philippe, Auguste Comte se voua à l'enseignement privé des mathématiques élémentaires. Cette occupation lui laissa assez de temps libre pour la lecture, l'étude et la préparation de ses six volumes de Philosophie positive, volumes dont le premier, paru en 1830, contient l'exposé des cours que Comte fit en 1829 devant un

auditoire choisi où l'on comptait entre autres Fourier, Poinsot, Navier et Blainville.

En 1832, Comte, recommandé par Navier, fut nommé répétiteur d'Analyse et de Mécanique à l'École Polytechnique ; et, après la mort de Navier, il occupa temporairement sa chaire. Cette place fut définitivement offerte à Duhamel, et à ce propos Bertrand raconte le trouble que ce changement de professeur provoqua à l'École Polytechnique, où les étudiants étaient ravis de l'enseignement de Comte. Dès la première conférence, Duhamel s'opposa à l'idée favorite de Comte — l'admission des séries divergentes — et prouva la nécessité de s'assurer d'avance de la convergence des séries dont on s'occupe dans l'Analyse. La démonstration de Duhamel prouve une plus parfaite connaissance des mathématiques contemporaines : car après les travaux d'Abel et de Cauchy il n'était que juste de prêter plus d'attention à la convergence des séries. Mais il serait quand même intéressant d'étudier les idées de Comte sur les séries divergentes qui, encore aujourd'hui, jouent un rôle important dans les mathématiques pures et dans la Mécanique céleste. Il y a trois années en effet, en 1897, l'Académie des sciences de Paris proposait au concours du Grand Prix des sciences mathématiques la question suivante : quel rôle les séries divergentes jouent-elles dans l'Analyse?

Si Comte ne fut pas choisi comme professeur à la chaire d'Analyse, l'année suivante, en revanche, il obtint une place bien importante, celle d'examinateur d'admission des candidats à l'École Polytechnique. Les questions qu'il posait à ces derniers passent pour des modèles du genre. Elles étaient assez simples pour être résolues par tout candidat bien préparé, et en même temps assez compliquées pour que les meilleurs pussent montrer leur talent.

Cette situation assura la vie matérielle de Comte pendant les sept années qu'il l'occupa, mais son amour-propre y était constamment mis à l'épreuve. Son prédécesseur Reynaud s'était vu déposséder de son emploi parce qu'il avait profité de son poste pour répandre son cours de Géométrie analytique. Aussi, après la démission de Reynaud, la situation d'examinateur cessa-t-elle d'être inamovible. Désormais, l'on dut être réélu chaque année. Comte, que l'on nommait sous ces conditions et qui venait en

outre d'échouer dans sa candidature à la place de professeur d'Analyse, place qui fut donnée à Sturm (1840), en conçut de l'irritation contre le Conseil de l'École ; et dans la préface du sixième volume de son Cours de philosophie positive, il attaqua ce Conseil comme représentant la classe des spécialistes : classe nuisible à l'enseignement. La conséquence de tout ceci fut pour Comte l'obligation de donner sa démission d'examinateur (1844).

On lui reprochait : 1° D'avoir édité en 1843 un traité de Géométrie analytique malgré le décret du Conseil qui défendait aux examinateurs de publier des ouvrages d'un caractère élémentaire, pouvant aider les candidats dans leur préparation aux examens ; 2° De poser chaque année aux candidats les mêmes questions, de sorte que les écoles préparatoires s'occupaient bien plus des questions que posait Comte que des études générales [1].

Tous ces déboires augmentaient son irritation contre ses chefs et ses collègues, irritation qu'il ne prenait d'ailleurs pas la peine de dissimuler. La conséquence fut qu'en 1852, Comte perdait sa place de répétiteur à l'École Polytechnique. Privé ainsi de tout moyen d'existence, Comte fut obligé jusqu'à sa mort (5 septembre 1857) de vivre exclusivement à la charge de ses adeptes qui croyaient voir en lui en même temps l'Aristote de la nouvelle philosophie et le Saint Paul de la nouvelle religion. Sa démission du poste de répétiteur était motivée par ces deux faits : abréviation du temps consacré aux répétitions (or, Comte se justifiait en alléguant son expérience qui lui permettait de gagner cinq minutes sur chaque élève) et refus systématique de répéter la théorie des probabilités, à laquelle Comte refusait toute importance.

Telle est en gros la vie d'Auguste Comte comme mathématicien et pédagogue. Les archives de l'École Polytechnique contiennent sans doute beaucoup de données qui permettraient de se renseigner plus exactement sur sa biographie. Ce que nous appor-

[1] Comte lui-même crut voir la cause de son insuccès, en partie dans l'antipathie qu'il inspirait à Arago, en partie dans la radicale contradiction qui existait entre son école philosophique et les tendances pédantocratiques des savants. Dans plusieurs de ses lettres adressées au ministre de la guerre (lettres imprimées dans le livre paru en 1877 sous le titre : *Lettres d'Auguste Comte à John Stuart Mill*) il engage ce ministre à procéder lui-même au choix des examinateurs.

tons est empruntée à M. P. Laffite [1], l'un des disciples de Comte les plus dévoués et qui, après la mort du philosophe, devint l'un des chefs des orthodoxes du positivisme. Dans cet article sont imprimées les observations dont Comte accompagnait la réponse de chacun des élèves. Elles témoignent de l'attention avec laquelle il accomplissait ses devoirs d'examinateur et de sa connaissance nette et précise des mathématiques. Le traité de Géométrie analytique, qu'il a publié en 1843, ne contient pas de nouvelles déductions ; il est consacré au développement des idées relatives à l'importance et au système de la Géométrie analytique, idées qu'il avait exposées auparavant dans sa *Philosophie positive*. Mais s'il n'a pas donné aux mathématiques de nouvelles déductions, il leur a néanmoins rendu de grands services en présentant une revue systématique de ses principales doctrines, revue toute pénétrée d'un esprit de philosophie généralisatrice. On trouve, il est vrai, dans les œuvres des mathématiciens du XVII[e] et du XVIII[e] siècles, des idées sur les principes et sur la méthode des mathématiques ; et Carnot a consacré un volume entier à la métaphysique du Calcul infinitésimal. Mais personne ne donna un exposé aussi logique et aussi profond des questions principales de la philosophie des mathématiques, que celui présenté par Comte dans son ouvrage, publié en 1830.

II

Dans le premier volume de la Philosophie positive, les leçons 3-14 sont consacrées à la philosophie des mathématiques [2], y compris la Géométrie. Dans la seconde leçon, Comte établit une hiérarchie entre les sciences — hiérarchie fondée sur la transition graduelle des sciences, depuis celles qui s'occupent des phéno-

---

[1] Auguste Comte examinateur d'admission à l'École Polytechnique. *Nouvelles annales de mathématiques*, t. XIII (1894), p. 68-80, 113-120, 505-528 et 562-580.

[2] Comte a écrit encore deux livres sur le même sujet : *Essais sur la philosophie des mathématiques* (1822) et *Synthèse subjective ou système universel des conceptions propres à l'état normal de l'humanité* ; Tome premier : *Le système de logique positive ou traité de Philosophie mathématique*, Paris, 1856. La première de ces œuvres est une curiosité bibliographique ; quant au second, il ne présente aucun intérêt scientifique. Les études des mathématiques y sont considérées comme l'école préparatoire des serviteurs de l'humanité.

mènes les plus simples jusqu'à celles qui s'occupent de phénomènes plus spéciaux et plus compliqués) et considère les mathématiques comme une pierre fondamentale de la Philosophie positive ; il en détermine l'importance dans les termes suivants :

« Dans l'état actuel du développement de nos connaissances positives, il convient, je crois, de regarder la science mathématique, moins comme une partie constituante de la Philosophie naturelle proprement dite, que comme étant, depuis Descartes et Newton, la vraie base fondamentale de toute cette philosophie, quoique, à parler exactement, elle soit à la fois l'une et l'autre. Aujourd'hui, en effet, la science mathématique est bien moins importante par les connaissances, très réelles et très précieuses néanmoins, qui la composent directement, que comme constituant l'instrument le plus puissant que l'esprit humain puisse employer dans la recherche des lois des phénomènes naturels. » [1]

Sous le nom commun de sciences mathématiques, comme le dit Comte, on doit distinguer deux sciences bien séparées par leur caractère : la Mathématique abstraite ou le calcul ; et la Mathématique concrète, qui se compose de la Géométrie générale et de la Mécanique rationnelle.

La Mathématique abstraite est une admirable adaptation de la Logique naturelle à une certaine série de déductions. « La Géométrie et la Mécanique doivent, au contraire, être envisagées comme de véritables sciences naturelles, fondées, ainsi que toutes les autres, sur l'observation, quoique par l'extrême simplicité de leurs phénomènes elles comportent un degré infiniment plus parfait de systématisation qui a pu quelquefois faire méconnaître le caractère expérimental de leurs premiers principes. » [2] Dans l'une des premières leçons consacrées à l'étude de la Géométrie, Comte examine, si elle est une science purement rationnelle, indépendante de l'observation, ou bien au contraire une science naturelle, mais bien plus simple et par conséquent plus parfaite, que toute autre : « Il est néanmoins évident pour quiconque examine avec attention le caractère des raisonnements géométriques, que si les faits qu'on y considère sont beaucoup plus

---

[1] *Cours de philosophie positive ;* t. I (édit. 1830), p. 112.

[2] *Ibid.*, t. I, p. 113.

liés entre eux, que ceux relatifs à toute autre science, il existe toujours cependant, par rapport à chaque corps étudié par les géomètres, un certain nombre de phénomènes primitifs qui, n'étant établis par aucun raisonnement, ne peuvent être fondés que sur l'observation et constituent la base nécessaire de toutes les déductions. L'erreur commune à cet égard doit être regardée comme un reste d'influence de l'esprit métaphysique, qui a si longtemps dominé, même dans les études géométriques. » [1]

L'opinion de Comte, qui reconnaissait la Géométrie, ainsi que la Mécanique, comme sciences expérimentales, était tout opposée aux doctrines philosophiques qui régnaient sur le continent. Le nombre des savants qui, ayant mûrement réfléchi aux bases de la Géométrie, étaient du même avis que Comte, était fort restreint. Parmi eux il faut citer Gauss qui, dans sa correspondance privée, dit souvent que la Géométrie, semblable à la Mécanique, dépend de l'expérience [2]. Lobatchevsky dit dans le travail qu'il lut le 12 février 1826 : « Nos premières notions sont acquises par les sensations ; on ne doit pas ajouter foi aux notions innées. » Dans son principal ouvrage, intitulé : *Nouvelles bases de la Géométrie* (1835), Lobatchevsky se prononça encore plus nettement, relativement à l'origine des notions géométriques :

« Dans la nature, nous ne concevons que le mouvement, sans lequel les impressions des sens sont impossibles. Toutes les autres notions, par exemple les notions géométriques, étant empruntées aux propriétés du mouvement, sont acquises par notre esprit artificiellement, et par conséquent l'espace n'existe pas séparément. »

Les recherches des géomètres contemporains sont le dévelop-

---

(1) *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 349-350.

(2) On connaît depuis longtemps sa lettre à Bessel (9 avril 1830), où il exprime son opinion concernant « notre connaissance de la Géométrie, privée de conviction en sa nécessité et par conséquent en sa vérité, connaissance, que nous avons de la science des quantités. Nous devons avouer que si le nombre est le produit de notre esprit, l'espace est réel en dehors de nous et nous ne pouvons lui donner des lois *a priori* ». On a aussi retrouvé sa lettre à Olbers (28 avril 1817), où il dit à peu près la même chose. « Je me persuade de plus en plus, que la nécessité de notre Géométrie ne peut être démontrée, du moins par l'esprit d'un homme et à l'esprit d'un homme : peut-être dans la vie future comprendrons-nous ce qu'il nous est impossible de comprendre maintenant, la nature de l'espace. Jusque-là nous devons comparer la Géométrie à la Mécanique et non à l'Arithmétique, qui est fondée sur des combinaisons *a priori* ».

pement de cette ingénieuse idée de Lobatchevsky concernant les notions géométriques et leur entière dépendance des propriétés du mouvement. Ueberveg fut le premier, après Lobatchevsky, qui traita cette question, indépendamment d'ailleurs de ce dernier. Dans son traité de 1851 : *L'exposé scientifique des bases de la Géométrie* [1], il se propose de fonder uniquement la Géométrie, ainsi que toute science naturelle, sur des bases expérimentales ; et comme telles il considère : 1° la mobilité libre des corps solides, 2° et 3° la possibilité du mouvement des corps matériels dans le cas d'un ou de deux points fixes, et 4° l'impossibilité du mouvement dans le cas de trois points fixes. Les recherches sur l'optique physiologique ont amené Helmholz aux mêmes conclusions ; mais ses investigations mathématiques sur le même sujet lui ont permis de surpasser Ueberveg [2].

Helmholz a démontré que plusieurs Géométries peuvent exister, avec les mêmes faits empiriques pris pour bases, tandis que Ueberveg, ayant introduit la notion de la direction et s'appuyant sur le théorème que la droite définie comme axe de rotation a une direction constante, aboutit à la Géométrie d'Euclide. Le célèbre mathématicien Sophus Lie, dont tous les savants déplorent la mort récente, compléta les recherches mathématiques de Helmholz par l'application de la théorie, dont il est l'inventeur, des groupes de transformations ; l'importance de la théorie des groupes de mouvements pour la Géométrie est expliquée dans le travail de M. Poincaré : *On the foundations of geometry* [3].

---

[1] *Die principien der Geometrie, wissenschafftlich dargestellt* Archiv für Philologie und Pädagogik). La traduction française se trouve dans l'appendice du livre de Delboeuf : « *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats.* » Liège, 1860.

[2] Pour apprécier les idées d'Ueberveg sur la Géométrie, il est important de connaître ses ouvrages, « *System der Logik und Geschichte der logischen Lehren* » et « *Zur Theorie der Richtung des Sehens* » (Zeit. für rat. Medecin-Henle und Pfeuffer, 1858, Bd 5, S. 268-289) et sa critique des œuvres de Delboeuf, critique imprimée dans la *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, herausg. von Fichten, Ulrici Bd 37. Halle, 1860, S. 148-167.

[3] Monist. October 1898, V, aussi « *l'Espace et la Géométrie* » (Revue de métaphysique et de morale, 1895, novembre). Selon M. Poincaré, ce que nous appelons la géométrie n'est que l'étude d'une classe particulière de phénomènes que nous appelons déplacements et qui forment « un groupe. »

III

Après avoir établi cette distinction entre le caractère philosophique de la Mathématique pure et abstraite et celui de la Mathématique concrète (Géométrie et Mécanique) Comte développe en détail ses idées sur la relation qui existe entre les deux branches de cette science. Il commence l'exposé de ses idées par une définition générale de toutes les mathématiques : « Nous sommes donc parvenus maintenant à définir avec exactitude la science mathématique, en lui assignant pour but la mesure indirecte des grandeurs et en disant qu'on s'y propose constamment de déterminer les grandeurs les unes par les autres d'après les relations précises qui existent entre elles. [1] »

Étant obligé d'examiner dans chaque phénomène plusieurs quantités liées dans leurs changements : « il en résulte l'étendue naturellement indéfinie et même la rigoureuse universalité logique de la science mathématique. » La définition que Comte donne des mathématiques le persuade en même temps que ce n'est qu'en les étudiant que nous pourrons acquérir les véritables notions de la nature de la science : « Toute science consiste dans la coordination des faits ; si les diverses observations étaient entièrement isolées, il n'y aurait pas de science. On peut même dire généralement, que la science est essentiellement destinée à dispenser, autant que le comportent les divers phénomènes, de toute observation directe, en permettant de déduire, du plus petit nombre possible de données immédiates, le plus grand nombre possible de résultats. »

Ces particularités caractéristiques d'une science sont fortement prononcées dans les mathématiques. C'est pour cela que : « toute éducation scientifique qui ne commence point par une telle étude pèche nécessairement dans sa base. C'est donc par l'étude des mathématiques, et seulement par elle, que l'on peut se faire une idée juste et approfondie de ce que c'est qu'une science. C'est là uniquement qu'on doit chercher à connaître avec précision la méthode générale que l'esprit humain emploie constamment

---

(1) *Cours de philosophie positive*, t. I, p. 129.

dans toutes ses recherches positives, parce que nulle part ailleurs les questions ne sont résolues d'une manière aussi complète, et les déductions prolongées aussi loin avec une sévérité rigoureuse. » C'est en mathématiques que notre esprit, selon Comte, a prouvé le plus sa force.

Le but des recherches mathématiques étant toujours la détermination de quantités inconnues à l'aide des relations qui existent entre elles et d'autres quantités données, chaque recherche doit comprendre deux parties : 1° la définition des relations qui existent entre les quantités qui varient ensemble dans le cas donné; et 2° le calcul des quantités inconnues à l'aide des relations données. La première partie (concrète) de chaque recherche mathémathique dépend du phénomène considéré ; et la solution de la question demandée doit être nécessairement fondée sur la considération du monde extérieur, et ne peut jamais être remplacée par une série d'opérations intellectuelles. Le but de cette partie concrète est de remplacer les relations entre les quantités (fonctions concrètes) par les équations entre les nombres, où ne peuvent entrer que des fonctions abstraites, examinées dans les mathématiques pures. C'est par ce remplacement qu'a lieu le passage du concret à l'abstrait, et c'est sur l'importance de ce passage que Comte s'arrête avec détail. L'idée mère de ce passage, il la voit dans la Géométrie analytique ; et c'est par là qu'on peut expliquer le respect qu'il éprouvait pour Descartes et la révolution philosophique qu'il opéra dans la Géométrie. Le seul traité de Comte concernant les mathématiques, *Traité élémentaire de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions* (1), avait pour but d'expliquer l'avantage des méthodes générales sur les méthodes spéciales applicables seulement à de certaines courbes, traitées par les géomètres de l'antiquité. Le traité de Comte se distingue avantageusement des autres manuels de Géométrie analytique par l'attention avec laquelle il étudie les théories géométriques générales pour toutes les courbes : la théorie du nombre de points nécessaire pour la définition des courbes, celle des tangentes et des asymptotes, celle des diamètres, celle des courbes semblables,

(1) Paris, 1843. Une nouvelle édition a été publiée par les positivistes du Brésil en 1894.

des quadratures, etc. L'importance du remplacement des relations concrètes entre les quantités liées dans leurs variations, par les relations abstraites entre les nombres, dépend surtout de ce que les recherches des mathématiques abstraites sont générales et peuvent être également appliquées aux différents cas.

Les mêmes relations peuvent se rencontrer dans l'étude de phénomènes différents ; et dans ce cas la théorie de ces phénomènes présente aux mathématiciens la même question : « La même loi, qui règne entre l'espace et le temps, quand on examine la chute verticale d'un corps dans le vide, se retrouve pour d'autres phénomènes qui n'offrent aucune analogie avec le premier d'entre eux, car elle exprime aussi la relation entre l'aire d'un corps sphérique et la longueur de son diamètre ; elle détermine également le décroissement de l'intensité de la lumière ou de la chaleur à raison de la distance des objets éclairés ou échauffés, etc. » [1]

L'Analyse mathématique permet d'établir une coordination parfaite dans l'étude des phénomènes. Car les conceptions ayant été généralisées et simplifiées le plus possible, à tel point qu'une seule question analytique, résolue abstraitement, renferme la solution implicite d'une foule de questions physiques diverses, il doit nécessairement en résulter pour l'esprit humain une plus grande facilité à apercevoir des relations entre des phénomènes qui semblaient d'abord entièrement isolés les uns des autres. C'est ainsi qu'en examinant la marche de notre intelligence dans la solution des questions importantes de la Géométrie et de la Mécanique, nous voyons surgir naturellement, par l'intermédiaire de l'Analyse, les rapprochements les plus fréquents et les plus inattendus entre des problèmes qui n'offraient primitivement aucune liaison apparente. » [2]

Ces raisonnements de Comte sur l'analogie des formules mathématiques dans les divers phénomènes sont une prévision ingénieuse du chemin que la Physique mathématique suivit au XIX^e^ siècle.

Cauchy, Lamé, Chasles, Thomson (Lord Kelwin), Helmholz, Kirchoff et d'autres ont recouru aux analogies mathématiques dans leurs recherches sur les lois d'attraction, sur le calorique, etc. Mais c'est surtout depuis les recherches de Maxwell que l'étude

---

(1) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 137. — (2) *Ibid.*, t. I, p. 146.

des analogies qui existent entre les différentes parties de la Physique est devenue de toute importance pour l'étude des phénomènes physiques; elle a eu de l'influence sur la nature des théories physiques et l'importance des formules mathématiques. Nous avons rompu avec la mythologie mécanique et, comme le dit Mach : les formules mathématiques ne sont pas considérées comme des lois qui gouvernent le monde, mais comme les descriptions les plus concises des phénomènes, par conséquent les plus économiques.

Le côté économique de la pensée scientifique, bien prononcé dans les Mathématiques, est parfaitement expliqué par Mach [1]. Mais quand on lit ses raisonnements, on se rappelle involontairement que Comte aussi, en examinant la Géométrie de Descartes, voyait son importance dans le fait d'épargne cérébrale que nous venons de signaler : « instituant une meilleure économie de nos forces spéculatives, » dit-il textuellement (*Traité élémen. de Géométrie analytique*, p. 3).

IV

Une fois que les lois mathématiques des phénomènes ont été exprimées à l'aide des fonctions analytiques, le reste est simplement l'affaire des mathématiques pures ou abstraites, qui comprennent les opérations les plus ordinaires des nombres comme les combinaisons les plus compliquées de l'Analyse transcendante. Les équations que nous donne l'étude du phénomène dans la partie concrète des recherches mathématiques deviennent le point de départ des mathématiques pures. Ainsi, d'après l'ordre logique, la Mathématique abstraite suit la concrète, de même que dans le développement historique des mathématiques, les progrès de la partie concrète des mathématiques ont assuré ceux de la partie abstraite. En développant et démontrant cette dépendance logique et historique, Comte voyait clairement, du même coup, que les mathématiques abstraites forment par elles-mêmes une branche du savoir pleinement indépendante, et que leur étude doit pré-

[1] Mach. *Prinzipien der Wärmelehre*. 1896, p. 396. V. aussi le beau discours de Zurich de M. Poincaré.

céder l'étude philosophique de la Géométrie et de la Mécanique. Il insiste sur le fait que les mathématiques pures peuvent et doivent être exposées en un système unique et discontinu, indépendant de toutes combinaisons géométriques ou mécaniques. Il est certain que les méthodes supérieures de l'Analyse infinitésimale ont été inventées pour la solution des questions géométriques et mécaniques, et, comme conséquence, elles ont reflèchi l'influence des combinaisons géométriques et mécaniques. Le calcul des fluxions de Newton est fondé sur l'examen d'une courbe décrite par un point matériel qui se meut, d'après la loi de l'accélération. Les combinaisons géométriques ont de l'influence sur les méthodes des infinitésimaux de Leibniz. L'illustre Lagrange a fait le premier la tentative d'exposer l'Analyse à un autre point de vue. Dans sa : « Théorie des fonctions analytiques » et ses « Leçons sur le calcul des fonctions » il détermine la dérivée comme le coefficient du premier degré de l'accroissement h dans le développement de la fonction $f(x+h)$, et de cette manière il fonde toute l'Analyse sur la théorie du développement des fonctions en séries. En examinant dans la sixième leçon l'Analyse des infinitésimaux à tous les points de vue, Comte prend le parti de Lagrange et considère son point de vue comme « le plus rationnel et le plus philosophique ». « Écartant avec soin toute considération hétérogène, Lagrange a réduit l'Analyse transcendante à son véritable caractère propre, celui d'offrir une classe très étendue de transformations analytiques... En même temps, cette Analyse est nécessairement présentée par là comme une simple extension de l'Analyse ordinaire : elle n'a plus été qu'une Algèbre supérieure. Toutes les diverses parties, jusqu'alors si incohérentes, de la Mathématique abstraite, ont pu être conçues, dès ce moment, comme formant un système unique. » [1]

Pendant les soixante-dix années qui se sont écoulées depuis que Comte a écrit ces lignes, la tendance dominante chez les mathématiciens a été de donner de l'unité aux mathématiques pures et d'en bannir toutes les combinaisons prises dans d'autres sciences, surtout en Géométrie. Un mathématicien qui se rangea aux idées de Lagrange, en voulant fonder la théorie des fonctions

[1] *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 268.

sur la théorie des séries de puissances, fut Weierstrass. Il manque en effet à la théorie de Lagrange l'ensemble et la précision ; car il examinait seulement les séries développées d'après les puissances de la variable réelle, et ne faisait aucune attention aux lois de convergence. Pour Weierstrass, la base de la théorie des fonctions est aussi une série de puissances, mais une série développée d'après les puissances de la variable complexe, et convergente dans un certain « cercle de convergence ».

Le principe de « la continuation analytique » nous permet d'observer la marche d'une fonction en dehors du cercle primordial de convergence ; et de cette façon toute la théorie des fonctions devient le résultat de la théorie des séries ; pareillement à cette dernière, elle est fondée sur des bases solides et purement arithmétiques (1). La théorie des nombres incommensurables est fondée par Weierstrass et d'autres mathématiciens sur de semblables bases arithmétiques, indépendantes de l'évidence des combinaisons géométriques. Le plus important à ce point de vue fut Kronecker, qui voulait réduire toutes les Mathématiques aux opérations des nombres entiers. C'est dans l'arithmétisation des mathématiques et dans la tendance à rendre toutes les démonstrations des théorèmes de l'Analyse exclusivement arithmétiques, que nous trouvons les particularités caractéristiques des mathématiques contemporaines (2). Les vérités, qui semblaient auparavant être démontrées d'après l'évidence géométrique, comme par exemple l'existence d'une dérivée de toute fonction continue, sont reconnues aujourd'hui comme admettant des exceptions. Je ne puis m'empêcher de rappeler, à ce sujet, que Lobatchevsky a devancé ses contemporains dans la solution de la question, relativement à la différentiation et à la discontinuité.

En se plaçant au point de vue de Lagrange et en ne voyant dans l'Analyse transcendante que la suite de l'Algèbre ordinaire, Comte présente le système de la pure Mathématique de la manière suivante. D'un côté les équations entre les nombres exprimés à l'aide d'éléments analytiques (fonctions abstraites),

(1) V. H. Poincaré : *L'œuvre mathematique de Weierstrass* (Acta mathem. XXII, 1898) et notre article : « Weierstrass et la Mathématique contemporaine ». (*Bull. de la Soc. physico-mathématique de Kasan*. Série I, V. 4, 1886.)

(2) F. Klein. *Arithmetisation des mathématiques* (Nouv. Ann. de Mathém., 1897.)

équations qui proviennent de la solution de chaque question concrète, doivent être tranformées pour démontrer plus précisément de quelle manière les quantités inconnues sont composées à l'aide des quantités connues ; de l'autre, après que les transformations ont conduit aux formules les plus simples et les plus élégantes, il est nécessaire de trouver des nombres inconnus. Conformément à ces deux problèmes, l'Analyse se divise en deux parties : l'Algèbre ou le Calcul des fonctions et l'Arithmétique ou le Calcul des quantités (nombres). Comte rapporte à l'Arithmétique beaucoup de questions qu'on ne lui attribue pas d'ordinaire, comme la construction des Tables logarithmiques et trigonométriques, la résolution numérique des équations, l'interpolation, l'intégration approximative, etc.

L'Algèbre ou le Calcul des fonctions se divise à son tour en deux parties : le Calcul des fonctions directes (Analyse ordinaire ou Algèbre proprement dite) et Calcul des fonctions indirectes (Analyse transcendante). La première partie a pour but la transformation immédiate et la résolution des équations formées entre les quantités examinées ; la seconde s'occupe des quantités auxiliaires ordinairement liées à celles qu'on examine dans la question et qu'on introduit pour faciliter l'opération. Telles sont les différentielles, dérivées, ou fluxions, selon que nous prenons tel ou tel des trois points de vue sur l'Analyse transcendante. Enfin l'Analyse transcendante se divise en deux parties, selon qu'elle a pour but la déduction des équations entre les quantités corrélatives dérivantes (Calcul différentiel, Calcul des fonctions dérivées, des fluxions) ou le problème inverse (Calcul intégral, Calcul des fonctions dérivantes, Calcul des fluentes). La septième leçon du cours de Comte est consacrée à l'explication des relations entre ces deux problèmes ; la fin de son exposé du système des mathématiques pures est entièrement consacrée au Calcul des variations (huitième leçon) et au calcul des différences finies (neuvième leçon).

J'ai ainsi terminé l'exposé des idées d'Auguste Comte sur la Philosophie des mathématiques, et je considère que mon but est atteint, si cet exposé persuade le lecteur, que les idées de Comte sur la relation entre les mathématiques pures ou abstraites et les mathématiques appliquées ou concrètes, sur la Géométrie considé-

rée comme science naturelle, et sa conviction qu'il faut atteindre l'unité parfaite de l'Analyse, se confirment et s'expliquent par tous les progrès des mathématiques pendant les soixante-dix années écoulées depuis l'apparition du premier volume de la Philosophie positive.

Les progrès de la Physique mathématique ont mis beaucoup de branches des mathématiques concrètes au même rang que la Thermologie que Comte a si chaudement accueillie : et Maxwell, auquel nous devons la création de la théorie électro-magnétique de la lumière, s'exprime dans les termes suivants, conformes aux idées de Comte : « toutes les applications des mathématiques à la Philosophie naturelle sont basées sur les relations entre les lois des quantités physiques et les lois des nombres, de même que l'aspiration fondamentale des sciences précises est la réduction des problèmes de la nature à la détermination des quantités, à l'aide des operations sur les nombres. » [1]

Le mouvement scientifique et philosophique en Géométrie, étroitement lié au nom (inoubliable pour nous) de Lobatchevsky, donne l'explication des relations qui existent entre deux sciences naturelles, la Géométrie et la Mécanique, et la solution du problème discuté par Comte, à savoir : séparer dans les notions fondamentales de ces sciences « le physique et le logique ». [2] L'arithmétisation des mathématiques a pour but de créer l'unité parfaite des mathématiques pures.

En étudiant les œuvres d'Auguste Comte, on comprend pourquoi son nom occupera toujours une place importante dans l'histoire de la Philosophie des mathématiques, bien qu'il n'ait jamais eu les succès brillants que Sturm, par exemple, a remportés dans l'Analyse mathématique. En tout cas, le mathématicien qui lira le premier volume de la Philosophie positive aura beaucoup à gagner au contact des idées qui y sont exprimées ; il gagnera plus encore en s'assimilant cet esprit d'admiration pour la méthode mathématique, qui caractérise le livre entier de Comte. D'après ce dernier, cette méthode est la manifestation la plus brillante de l' « esprit positif. »

A. VASSILIEF (Kazan).

---

(1) *On Faraday's lines of force. Scientific papers*, Cambr., 1890 ; vol. I, p. 156.

(2) *Cours de phil. posit.*, t. I, p. 541.

EUGÈNE BELTRAMI: SA VIE ET SES TRAVAUX [1]

Quand on jette un simple coup d'œil sur les travaux d'Eugène Beltrami, l'œuvre scientifique de ce grand Italien apparaît comme un océan étincelant de lumière mathématique. Les investigations analytiques et celles de la Géométrie pure alternent avec les recherches les plus savantes de Physique mathématique : mérite considérable, aujourd'hui que le génie italien, ayant rompu avec les traditions de Galilée et de Léonardo, récolte sa meilleure moisson de lauriers dans le champ des abstractions spéculatives ; et que dans cette même Géométrie, science à base expérimentale, on se met à la torture pour réduire à rien et pour isoler la source de l'expérience, comme du bon grain on sépare les mauvais.

Revenant aux travaux de Beltrami, il me semble que mon jugement, malgré mon souci de la vérité, ne serait pas digne de l'homme : aussi ne puis-je mieux faire que de passer la parole à un maître illustre qui fut jadis un émule de celui dont nous déplorons la perte, aux temps où ce génie naissant prenait son premier vol. Voici comment le sénateur Ulysse Dini s'exprimait au sujet de la mort de Beltrami :

« Ses travaux atteignent leur hauteur géniale, autant par l'im-
« portance des matières qui y sont traitées que par la lumière
« et l'élégance qu'il a su y mettre ; ces grandes qualités le ren-
« dirent bientôt célèbre ici et au dehors ; de plus il savait
« inculquer à tous ceux qui l'écoutaient ou qui le lisaient l'amour
« des mathématiques ; il arrivait à ce résultat par sa bonté,
« sa rare modestie, son affabilité; c'est ainsi qu'il a inspiré à
« un si grand nombre le culte de la science. »

[1] Article publié dans le *Periodico matematico* 1900), et trad. de l'italien.

On ne saurait esquisser plus brièvement et avec plus de justesse la figure de Beltrami, savant, artiste, éducateur ; chez lui le style fut l'homme, c'est-à-dire que son style a été égal à la naïveté de son âme et à la génialité de son esprit. Cet éloge d'écrivain génial, Beltrami le devait à sa nature d'artiste autant qu'à l'étude infatigable des classiques pour lesquels il avait un véritable culte qui, à quelques innovateurs, put paraître de l'idolâtrie. Des classiques il a appris comment à la hauteur de l'argument, à la profondeur de l'investigation, peuvent s'allier la simplicité et l'élégance du style, propres aux grands écrivains. Il a montré ainsi par un exemple nouveau que Science et Littérature peuvent et doivent s'allier au lieu de se combattre, comme le voudrait un préjugé tout moderne, engendré par la paresse et qui porte un si grand dommage à la culture nationale.

Telle page de préface est par elle-même un chef-d'œuvre ; et déjà, Beltrami a suscité chez son lecteur une vision claire et précise, une compréhension parfaite de la question, en même temps qu'il l'intéresse au plus haut point. Cette préface est l'essence et le résumé des résultats obtenus, c'est-à-dire ce qui importe le plus pour le lecteur. Celui qui aurait le désir de suivre Beltrami dans ses démonstrations verrait vite que s'il recourait au symbole quand il y voyait une ressource ou une nécessité, il en recherchait immédiatement le sens, et le traduisait en propositions et en images d'une admirable évidence.

De la notion des choses, le symbole ; du symbole, la nouvelle expression, qui satisfait l'esprit et parle à l'imagination ; tel fut, à mon sens, le secret de l'art de Beltrami.

Il sut ainsi, du sommet à la base, créer une œuvre magistrale. La simplicité de ses œuvres est si grande, on s'aperçoit si peu de la pente par où il vous mène à des hauteurs sublimes, que l'on se prend parfois à penser que l'on marche dans des sentiers déjà battus, sentiers que votre esprit aurait déjà parcourus auparavant.

Cette illusion, on l'éprouve seulement à la lecture des œuvres des grands maîtres ; elle atteste l'excellence de ces œuvres ; là où l'humanité retrouve ou croit retrouver son âme, là est le sceau du génie et le germe de l'immortalité.

Tel fut l'écrivain, tel fut le maître, et (pourquoi ne le dirais-je pas ?) mon maître. Notre cours se composait de quatre élèves [1], c'est peu à la vérité pour organiser la « fête joyeuse » chantée par Giusti ; mais c'est assez pour qu'en d'autres circonstances on eût cédé à l'envie de manquer la leçon et d'aller vagabonder dans la campagne, sous le délicieux soleil du ciel romain. Mais les leçons de Beltrami n'étaient pas de celles que l'on manque ; elles étaient attendues comme une fête de la forme littéraire et de la pensée. Je me rappelle que Beltrami faisait peu de crédit à la culture de ses élèves, et que dès le début de la leçon, il leur aplanissait le chemin en expliquant les principes qui devaient reparaître au cours de la leçon elle-même.

Qu'il s'agît de quelque propriété élémentaire des formes quadratiques ou des déterminants, ou du théorème le plus connu de la Géométrie d'Euclide, ces propriétés et ce théorème, en tombant de ses lèvres, nous semblaient transfigurés et colorés d'une lumière nouvelle. Effet de suggestion ? Fascination exercée par le maître sur l'esprit de ses disciples ? — Cela peut être. Mais combien y a-t-il de maîtres à exercer une influence semblable ?

Bon, plein de douceur, affable avec tous, Beltrami, bien qu'il aimât à se tenir chez lui, était enclin à la conversation et à l'anecdote de bon ton ; en causant, il prenait des soins exquis pour cacher aux autres sa propre supériorité. Ce souci le rendait circonspect et mesuré dans ses jugements, et sage appréciateur de ceux d'autrui. Dans sa crainte d'humilier ses interlocuteurs par sa supériorité, il se laissait difficilement aller à traiter une question de mathématiques en dehors de l'école ; il eût été moins difficile (bien que peu facile de lui faire jouer au piano un morceau de musique, car il était un excellent musicien.

Un jour (et ce n'était pas le premier), moi et mes trois camarades de cours, nous arrivâmes en retard à l'école ; Beltrami, qui avait dû nous attendre, nous adressa des reproches dans un petit discours empreint de sévérité, mais qui se terminait par ces mots : « Dans ce monde, nous sommes tous égaux ». La grande

[1] Parmi eux Caporali et de Paolis, qui sont morts bien jeunes, mais ont laissé une renommée impérissable dans les annales de la Science.

modestie de l'illustre mathématicien lui avait fait oublier, en ce moment, jusqu'à la notion de l'égalité.

Il ne faudrait pas croire que la nature de Beltrami fût, comme on dit, un gâteau de lait et de miel. Bon, certes, il l'était ; mais d'une bonté assaisonnée d'un grain de ce sel « manzoniaque » qui plaît tant au monde, bien qu'il soit la plus piquante satire de ses mœurs. Profond connaisseur des hommes, et en cela semblable à Manzoni, Beltrami peut-être aima moins ses semblables qu'il n'en fut aimé. Il faut excepter cependant deux seules personnes : sa mère et sa femme, pour lesquelles il eut une tendresse et un abandon d'une ingénuité pour ainsi dire enfantine. Sa bonté fut, en somme, sereine et exempte de faiblesse ; cette opinion très franche qui m'est personnelle se rencontre avec le sentiment universel ; j'en trouve la preuve dans ce fait que si beaucoup de mathématiciens ont eu recours au professeur Beltrami pour avoir de lui des conseils ou une aide scientifique, personne n'a jamais tenté de se concilier la cordialité de l'illustre savant, pour tirer parti de sa célébrité en vue de son intérêt privé. D'ailleurs, pourquoi Beltrami aurait-il dû se faire l'artisan de fortunes souvent imméritées, lui qui n'avait jamais rien cherché pour lui-même et n'avait dû qu'à sa valeur de pouvoir guérir les blessures que le destin et les haines des partis lui avaient portées dans sa première jeunesse ?

Né à Crémone, le 16 novembre 1835, il avait étudié trois ans à l'Université de Pavie, comme élève du collège Ghislieri, quand d'amers malheurs de famille le contraignirent à abandonner ses études pour accepter une place de secrétaire chez le directeur des chemins de fer, à Vérone. Devenu suspect au gouvernement autrichien, à cause des opinions politiques qu'affichaient ses parents, il alla à Milan où, en 1859, il quitta sa place et entra en relations avec Brioschi et Cremona. En 1862, le ministre de l'instruction publique, Matteucci, sur la proposition de Brioschi, son secrétaire général, nomma le jeune Beltrami professeur extraordinaire à l'Université de Bologne ; Beltrami n'avait aucun diplôme, mais il était déjà célèbre par ses travaux publiés dans les « *Annali di matematica* ». Une année plus tard, il fut nommé professeur ordinaire à Pise ; il retourna ensuite à Bologne, puis à Pavie, et de nouveau à Rome. Il y a deux ans, à la mort de

Brioschi, l'académie des Lincei le nommait à l'unanimité président ; et en juin dernier, au cours de la première séance royale à laquelle il présidait, Beltrami reçut de la bouche de Sa Majesté le Roi, l'avis de sa nomination de sénateur. Sa Majesté voulut ainsi par la solennité de la forme et le choix opportun du lieu, réparer l'injustice d'un oubli déplorable et durant depuis trop longtemps.

Beltrami est mort à Rome, le 18 février 1900, à l'Institut clinique de la Via Milazzo, succombant à l'épuisement de ses forces, le quatrième jour après une opération sur l'estomac, opération bien conduite, mais faite trop tardivement.

Qu'il soit permis à l'un de ses plus humbles disciples, de tresser à la mémoire du maître vénéré, une couronne pour laquelle il a lui-même fourni durant sa vie les pierres précieuses et les lauriers ; cette couronne ne redoute, ni les injures du temps, ni l'éternelle et glaciale froideur de l'égoïsme humain. C'est la liste de ses œuvres.

G. Frattini (Rome).

Publications du professeur EUGÈNE BELTRAMI

Intorno ad alcuni sistemi di curve piane. *Annali di Matematica*. Roma e Milano, 1861. — Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie (lettera). *Ibid.* — Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppate. *Ibid.* — Soluzione generale del problema : Rappresentare le parti di una superficie data sopra un'altra superficie parimenti data, in guisa che la rappresentazione riesca nelle parti infinitesime una figura simile alla figura rappresentata (traduzione da C. F. Gauss). *Ibid.* — Intorno ad alcune proprietà delle superficie di rivoluzione. *Ibid.* 1865. — Sulla flessione delle superficie rigate. *Ibid.* — Risoluzione d'un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe. *Ibid.* — Risoluzione del problema di riportare i punti d'una superficie su quelli d'un piano in modo che le linee geodetiche sieno rappresentate da linee rette. *Ibid.* 1866. — Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque. *Ibid.* 1867. — Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante. *Ibid.* 1868. — Sopra una Nota del Prof. Schlaefli. *Ibid.* 1872. — Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi. *Ibid.* 1873. — Intorno ad alcuni nuovi teoremi di Carlo Neumann. *Ibid.* 1880. — Sulle equazioni generali dell'elasticità. *Ibid.* 1881. — Sul potenziale magnetico ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico. *Ibid.* 1882. — Soluzione d'un problema relativo alle superficie di 2° ordine. *Giornale di Battaglini*. Napoli, 1863. — Sulle equazioni algebriche. *Ibid.* — Estensione allo spazio di tre dimensioni dei teoremi relativi alle coniche di nove punti. *Ibid.* — Ricerche di analisi applicata geometria. *Ibid.* 1864-65. — Di alcune proprietà generali delle curve algebriche. *Ibid.* 1866. — Dimostrazione di due formole del Sig.

Ossian Bonnet, *Ibid.* — Di una proprietà delle linee a doppia curvatura. *Ibid.* 1867. — Intorno ad una trasformazione di variabili. *Ibid.* — Sulla minima distanza di due rette. *Ibid.* — Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea. *Ibid.* 1868. — Alcune formole per la teoria delle coniche. *Ibid.* 1871. — Intorno ad una trasformazione di Dirichlet. *Ibid.* 1872. — Teorema di geometria pseudosferica. *Ibid.* — Del moto geometrico d'un solido che ruzzola sopra un altro solido. *Ibid.* — Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche. *Ibid.* — Sulle funzioni bilineari. *Ibid.* 1873. — Nella solennità della nascita di C. F. Gauss, discorso di Ernesto Schering (traduzione). *Ibid.* 1878. — Intorno alle coniche di nove punti. *Memorie dell'Accademia di Bologna*, 1865. — Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima. *Ibid.* 1868. — Sulla teorica generale dei parametri differenziali. 1869. — Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche. *Ibid.* 1870. — Ricerche sulla cinematica dei fluidi. 1871-74. — Intorno ad alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner. *Ibid.* 1875. — Esercitazione analitica sopra una proposizione di Steiner. *Ibid.* 1877. — Intorno ad alcuni punti della teoria del potenziale. *Ibid.* 1878. — Ricerche di geometria analitica. *Ibid.* 1879. — Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi. *Ibid.* 1880. — Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche. *Ibid.* 1881. — Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili. *Ibid.* 1882. — Delle funzioni associate e specialmente di quelle della calotta sferica. *Ibid.* 1884. — Sulla teoria dell'induzione magnetica. *Ibid.* — Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità. *Ibid.* 1885. — Sull'interpretazione meccanica delle formole di Maxwell. *Ibid.* 1886. — Intorno ad alcuni problemi di propagazione del calore. *Ibid.* 1887. — Considerazioni sulla teoria matematica del magnetismo. *Ibid.* 1891. — Due Note sulla teoria delle cubiche gobbe. *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, Milano, 1868. — Sulla teoria delle linee geodetiche. *Ibid.* — Intorno ad un nuovo elemento indrodotto dal Sig. Christoffel nella teoria delle superficie. *Ibid.* 1869. — Sulla teoria analitica della distanza. *Ibid.* 1872. — Di un sistema di formole per lo studio delle linee e delle superficie ortogonali. *Ibid.* — Considerazioni sopra una legge potenziale. *Ibid.* 1876. — Intorno ad alcune questioni di elettrostatica. *Ibid.* 1877. — Intorno ad alcune proposizioni di Clausius. *Ibid.* — Intorno ad un caso di moto a due coordinate. *Ibid.* 1878. — Sulle funzioni potenziali di sistemi simmetrici intorno ad un asse. *Ibid.* — Sull'equazione pentaedrale delle superficie di 3° ordine. *Ibid.* 1879. — Intornoad una formola integrale. *Ibid.* — Intorno ad un teorema di Abel. *Ibid.* 1880. — Intorno ad alcune serie trigonometriche. *Ibid.* — Sulla teoria della scala diatonica. *Ibid.* 1882. — Sulla teoria dei conduttori elettrizzati. *Ibid.* — Sulla teoria degli strati magnetici. *Ibid.* 1883. — Sull'equivalenza delle distribuzioni magnetiche e galvaniche. *Ibid.* — Sulla teoria del potenziale. *Ibid.* — Intorno ad un problema relativo alla teoria delle correnti stazionarie. *Ibid.* 1884. — Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. *Ibid.* — Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici. *Ibid.* 1885. — Sulla teoria delle onde. *Ibid.* 1886. — Sulle funzioni sferiche d'una variabile. *Ibid.* 1887. — Sulle funzioni complesse. *Ibid.* — Considerazioni idrodinamiche. *Ibid.* 1889. — Sul principio di Huygens. *Ibid.* — Due Note intorno al mezzo elastico di Green. *Ibid.* 1891. — Sulle funzioni complesse. *Ibid.* 1894. — Sulle equazioni dinamiche di Lagrange. *Ibid.* 1895. — Sulla teoria delle funzioni sferiche. *Ibid.* 1896. — Sulla determinazione della densità elettrica alla

superficie dei corpi conduttori. *Atti della R. Accademia dei Lincei*. Roma, 1877. — Sull'attrazione d'un anello circolare od ellittico. *Ibid.* 1880. — Un precursore italiano di Legendre e di Lobatchewsky. *Ibid.* 1889. — Sull'estensione del principio di d'Alembert all'elettrodinamica. *Ibid.* — Sull'espressione analitica del principio di Huygens. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1° sem. 1892. — Osservazioni su una Nota del prof. Morera. *Ibid.* — Sui potenziali termodinamici. *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1° sem. 1895. — Sull'espressione data da Kirchhoff al principio di Huygens. *R. Accademia dei Lincei*, 2° sem. 1895. — Sul teorema di Kirchhoff. *Ibid.* — A proposito di una nuova ricerca del Prof. C. Neumann. *Ibid.* — Commemorazione di F. Brioschi. *Ibid.* (Rendiconto dell'adunanza solenne del 12 giugno 1897). — Note fisico-matematiche. *Atti del Circolo Matematico di Palermo*, 1889. — Sulla funzione potenziale della circonferenza. *Ibid.* — Sulla teoria generale delle onde piane. *Ibid.* 1891. — Sur la déformation d'un milieu continu. *Comptes rendus dell'Accademia delle scienze di Parigi*, 1889. — Quelques remarques au sujet des fonctions sphériques. *Ibid.* 1890. — Enrico Betti (commemorazione). *Ibid.* 1892 — Discorso sulla vita e sulle opere di Domenico Chelini. *Collectanea Mathematica*. Milano, Hoepli, 1881. — Sulla teoria degli assi di rotazione. *Ibid.* — Sur la courbure de quelques lignes singulières. *Nouvelles Annales de Mathématiques di Parigi*. 1864. — Zur Theorie des Krummungsmaasses. *Mathematische Annalen di Lipsia*, 1869. — Sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici. *Nuovo Cimento*, Pisa, 1872. — Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. *Bulletin de Darboux*. Parigi 1876. — Sulle funzioni cilindriche. *Atti della R. Accademia di Torino*. 1881. — Sur les couches de niveau électromagnétiques. *Acta mathematica di Stoccolma*, 1883.

CONSIDÉRATIONS
SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

La Géométrie non euclidienne, créée par Gauss et ses collaborateurs Lobatschevsky et Bolyaï, et qui, selon l'illustre M. J. Bertrand, n'a eu, il y a trente ans, aucun disciple sérieusement convaincu, est très en vogue de nos jours. Elle compte, parmi ses partisans, des membres des académies des sciences et des professeurs des universités et des collèges. On s'en sert pour intégrer des équations différentielles; on espère même résoudre le problème des trois corps, en l'envisageant dans son domaine.

Des centaines d'écrits sont publiés par ses adeptes, dans le but de développer et de propager cette doctrine, dont le trait le plus caractéristique est la plus complète confusion des lignes droites et des lignes courbes, de sorte qu'on y perd facilement toute notion de la ligne droite, sans laquelle l'étude de la Géométrie devient illusoire. Autant vaudrait étudier la musique sans avoir d'oreille. Ce n'est pas tout : on invoque la Géométrie des êtres sans épaisseur et de ceux qui habitent des sphères creuses. On présente des thèses de doctorat sur cette doctrine. On distribue des prix d'encouragement et des mentions honorables pour des ouvrages qui contribuent à son perfectionnement. Enfin, on lui attribue *une grande portée philosophique, car*, selon ses adeptes, *en montrant l'inanité des idées de Kant sur l'espace, elle a ruiné, par la base, la métaphysique du criticisme* [1].

Ce sont des symptômes très inquiétants, qui font craindre que cette doctrine ne tardera pas à conquérir une place dans l'enseignement, d'autant plus qu'elle a déjà pénétré dans quelques traités de Géométrie. On a beau affirmer que les néogéomètres n'ont d'autre objet que de s'exercer à des analyses mathématiques sur des hypothèses variées. Il semble que les hypothèses ne devraient jamais être admises en mathématiques et qu'il est urgent que les revues spéciales, consacrées à l'enseignement mathématique, s'occupent de la question importante qui se résume en une évidente alternative : la Géométrie non euclidienne est-elle vraie ou fausse?

Désirant contribuer à l'éclaircissement de cette question, nous exposerons dans cet article quelques remarques sur la Géométrie non euclidienne. Des partisans de cette doctrine, si pleins d'artifices, ne manqueront pas de faire leurs objections.

1. La Géométrie non euclidienne est une doctrine toute hypothétique, reposant sur la négation de l'axiome XI ou du postulatum d'Euclide, qui fut, avec raison, considéré pendant plus de vingt siècles comme une vérité évidente, confirmée par tous les faits physiques.

Cette hypothèse, que rien ne justifie, conduisit immédiatement

[1] Mathesis, Octobre 1896, *Métagéométrie*, de M. Mansion, p. 41.

à un enchaînement continu de paradoxes qui a paru à ses inventeurs ne contenir en lui aucune contradiction. On a cru avoir découvert une doctrine merveilleuse, appelée à changer la face de la Mathématique et à verser sur elle des flots abondants de lumière.

Ses partisans s'empressèrent aussitôt de la rendre inattaquable, en multipliant les preuves pour établir : 1° que quelque loin que l'on pousse les conséquences de l'hypothèse admise, on ne se heurtera jamais à rien de contradictoire, et 2° que le postulatum d'Euclide est indémontrable. Au contraire, les mathématiciens de profession paraissent n'avoir rien fait pour défendre la Géométrie d'Euclide et d'Archimède de l'invasion de cette doctrine subversive renversant tous les faits géométriques du monde physique. On ne peut signaler dans cette voie que les Mémoires du général de Commines de Marsilly, insérés dans les Comptes rendus, de 1888 et 1889, de l'Association française pour l'avancement des sciences, dans lesquels il réfute les arguments des non euclidiens, qui n'ont pas pu répondre à ses objections.

2. L'hypothèse, admise par les non-euclidiens, ne s'impose pas nécessairement quand on rejette le postulatum d'Euclide. Elle n'est pas l'opposée de celui-ci et n'est pas la seule sur laquelle on puisse baser une Géométrie quelconque, quand on admet la possibilité d'un nombre arbitraire de Géométries différentes. Ainsi, pour établir la Géométrie qui porte le nom de Riemann et qui n'est autre chose que la Géométrie sphérique, on est parti de l'hypothèse opposée à celle de Gauss.

On a récemment affirmé qu'il est possible de fonder une Géométrie, dans laquelle *une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même*. Enfin, Lobatschevsky reconnaissait lui-même que son hypothèse (la même que celle de Gauss) pourrait être remplacée par d'autres hypothèses, quand il disait qu'*on pourrait essayer de substituer à ses équations d'autres équations* [1].

3. Notons que l'hypothèse non euclidienne n'est ni motivée, ni absolue, car elle est sujette aux exceptions. En effet, considérons une droite quelconque TT' (fig. 1) et une perpendiculaire

[1] *Œuvres*, *Pangeometrie*, p. 678.

AA'. Il est possible, selon cette hypothèse, de mener des différents points B, C, D.... pris sur TT' des obliques BB', CC', DD'... qui soient *parallèles* ou, à proprement parler, *asymptotes* à la perpendiculaire AA'. Les angles ABB', ACC'... qu'elles font avec

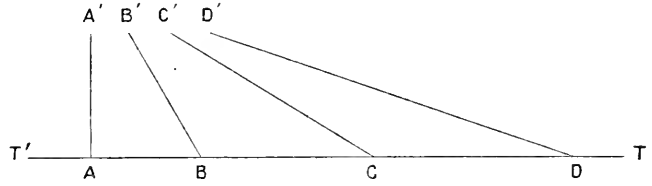


Fig. 1.

TT', à mesure de leur éloignement de AA', diminueront de plus en plus, et, si l'hypothèse était générale, en reculant l'asymptote à l'infini elle ferait avec TT' un angle égal à zéro, c'est-à-dire, elle se confondrait avec celle-ci et, par suite, couperait la perpendiculaire AA' en A. Donc, l'hypothèse présente une solution de continuité. Pour échapper à la contradiction, les non euclidiens sont obligés d'admettre que leur hypothèse n'a lieu que tant que l'angle fait par l'oblique et la droite TT' n'est pas égal à zéro. Ils prétendent qu'alors l'oblique, au lieu de se confondre avec la droite TT', se détache d'elle subitement pour devenir asymptote commune de AA' et de TT'.

Gauss lui-même ne connaissait pas cet artifice, quand il expliquait à Schumacher, dans sa lettre du 12 juillet 1831, qu'à la limite, le triangle équilatéral ABC (fig. 2), dont on agrandit les côtés, se transforme en trois droites O*a*, O*b*, O*c* qui sont ses bissectrices. Ce sont ses adeptes, plus hardis sinon plus judicieux que lui, qui ont expliqué que le maître s'était trompé et que le triangle équilatéral se transforme, à la limite, non pas en ses bissectrices, mais en trois droites QR, ST, UV, asymptotes réciproques deux à deux. Cette correction devenait nécessaire, car il serait étrange d'admettre que les côtés du triangle rectiligne se brisent

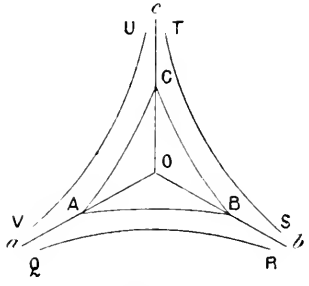


Fig. 2.

d'eux-mêmes. Mais une telle explication suppose une force occulte qui détache brusquement les côtés du triangle l'un de l'autre, car s'il est facile de concevoir des droites qui ne se rencontrent pas, il est difficile de comprendre ce qui empêcherait de joindre entre eux les points a, b, c pris sur les bissectrices du triangle équilatéral, aussi loin que l'on veut du centre O. La conception de Gauss semble plus claire que celle de ses disciples. Mais, au lieu de débrouiller cette confusion inutile, il vaut mieux reconnaître qu'avec l'agrandissement du triangle ses angles ne varient pas et que leur somme reste constante, ce qui revient à rejeter l'hypothèse et à accepter le postulatum d'Euclide.

4. Autrement, on se heurtera inévitablement à une foule de nouvelles contradictions, encore plus manifestes. En voici une que nous avons signalée l'année passée au Congrès de Boulogne-sur-Mer de l'Association française pour l'avancement des sciences, et nous la reproduirons en abrégé, sous une forme différente : Lobatschevsky établit dans le § 30 de ses *Recherches géométriques* la possibilité de triangles rectilignes, dont les trois perpendiculaires, élevées sur les milieux des côtés, que nous appellerons *perpendiculaires médianes*, sont asymptotes l'une à l'autre. C'est une conséquence immédiate de son hypothèse, exposée dans le § 16.

Pour simplifier, considérons un triangle isoscèle ABC (fig. 3) et supposons que ses trois perpendiculaires *médianes* Ee, Gg, Kk sont asymptotes entre elles.

Pour construire l'asymptote commune IJ, aux côtés AC et BC, il suffit de faire CN = CD = CF, car les biangles ACNI et BCNJ seront superposables aux biangles EDCK et GFCK, et, par conséquent, IJ sera asymptote à AC et à BC. On voit que l'angle C doit surpasser le double de la somme des angles A et B, car l'angle C est égal à la somme de quatre angles égaux DCL = LCN = FCM = MCN, dont chacun surpasse A et B. Il s'ensuit l'inégalité $C > 2(A+B) = 4A$.

Prenons sur Ee et sur Gg deux points symétriques D′ et F′, tels que les perpendiculaires D′C′ et F′C′ se coupent en C′ sous un angle moindre que toute grandeur assignée. Prolongeons-les, faisons A′D′ = C′D′, B′F′ = C′F′ et joignons A′ et B′. Nous aurons

le triangle isocèle $A'B'C'$. Enfin, menons par ses sommets A' et B' les droites $A'A''$ et $B'B''$, asymptotes aux trois perpendiculaires médianes. Si l'on recule encore les côtés $A'C'$ et $B'C'$ de ce triangle jusqu'aux points E' et G', l'angle C' s'annulera et ces

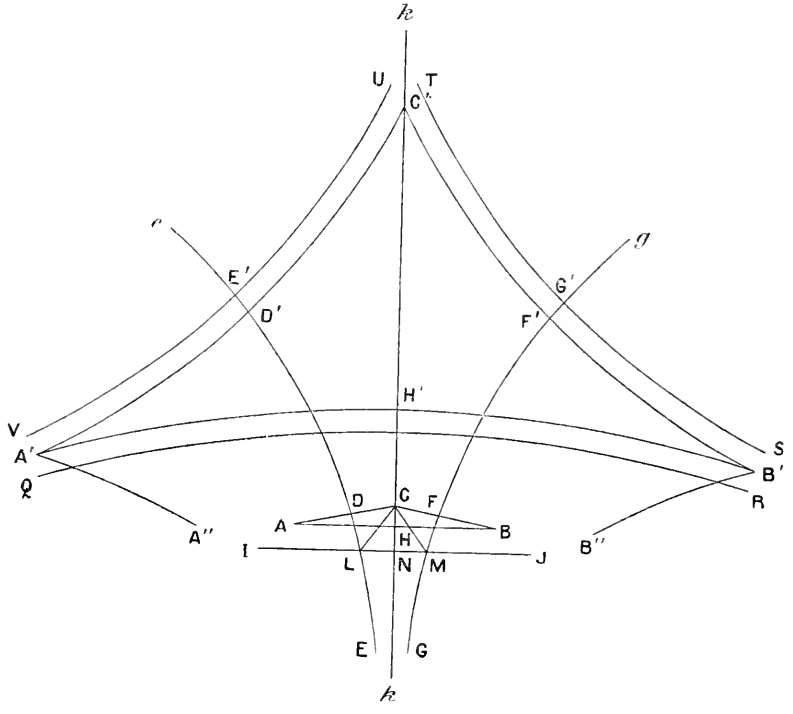


Fig. 3.

côtés se détacheront en C' l'un de l'autre et deviendront asymptotes réciproques. Se détacheront-ils en même temps du côté $A'B'$? Si les points E' et G' doivent rester encore les milieux des côtés $A'C'$ et $B'C'$, il faut admettre que les angles A' et B' s'annuleront en même temps que C' et que les trois côtés se transformeront simultanément en trois droites infinies QR, ST, UV, asymptotes l'une à l'autre. Mais rien n'empêche aussi d'admettre que les côtés $A'C'$ et $B'C'$ se détacheront seuls en C' et que le triangle se transformera en un biangle, de sorte que les points E' et G' cesseront d'être les milieux des côtés, comme nous l'avons fait précédemment.

Supposons ici que le triangle se transforme en trois droites asymptotes QR, ST, UV. Remarquons que dans ce cas les droites AA'' et BB'', reculées à l'infini, se confondront avec la ligne QR et, par suite, deviendront sécantes des trois perpendiculaires médianes Ee, Gg, Kk.

Il est évident que lors de cette transformation du triangle, par raison de la loi de continuité, ses trois angles, passeront successivement par des phases, où l'on aura d'abord $C' = 2(A' + B')$ et l'asymptote commune deviendra impossible ; on aura ensuite $C' = A' + B'$ et les perpendiculaires médianes se couperont en H, au milieu du côté AB, et enfin on aura $C' < A' + B'$, quand elles se rencontreront à l'intérieur du triangle. Ainsi ces perpendiculaires, supposées asymptotes réciproques, se couperont entre elles et seront en même temps asymptotes et sécantes.

C'est une contradiction évidente, qui a échappé aux inventeurs de la Géométrie non euclidienne. Nous montrerons qu'il y en a bien d'autres.

5. Nous présenterons maintenant une démonstration très simple et très directe de la *possibilité des droites équidistantes*, niée par les non-euclidiens, contrairement au témoignage de nos sens, et qui peut remplacer le postulatum d'Euclide, comme base de la théorie des parallèles. Dans un de nos opuscules nous avons montré que cette vérité évidente n'est qu'un corollaire du théorème du n° XVI du célèbre Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circà superficies curvas*, et nous avons conclu que c'est Gauss qui établit le premier la possibilité des droites équidistantes [1].

Considérons deux droites SS' et TT' fig. 4, telles qu'en abaissant d'un point M, pris sur SS' une perpendiculaire MN sur TT', l'angle NMS soit aigu et NMS' obtus. On pourra alors du point N abaisser sur SS' la perpendiculaire NM_1, du point M_1 sur TT' la perpendiculaire M_1N_1 et ainsi de suite, de sorte qu'on obtiendra un réseau de perpendiculaires, dont chacune sera moindre que la précédente et qui évidemment augmenteront dans la direc-

[1] *Recherches sur la théorie des parallèles*, 1897. Paris, librairie scientifique de M. A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne.

tion inverse. Ces perpendiculaires, désignant les distances des points des deux droites, il s'ensuit que celles-ci s'approchent l'une de l'autre vers S et T, *du côté de l'angle aigu* NMS, et s'éloignent dans le sens opposé. Ce réseau ne se termine jamais et l'on pourra le continuer indéfiniment, même si les lignes SS′ et TT′ devenaient courbes. Mais on ne peut pas déterminer même approximativement les longueurs des segments MM_1, M_1M_2, M_2M_3... On sait seulement que le complément de l'angle aigu NMS a une grandeur finie et non infiniment petite, car autrement cet angle NMS deviendrait droit, et que, par conséquent, la portion MM_p de la droite SS′, le long de laquelle se développe le réseau des perpendiculaires, a aussi une longueur finie. Cela suffit pour le raisonnement qui va suivre.

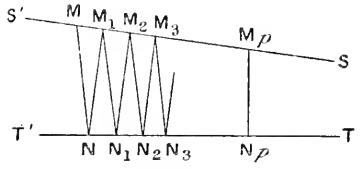


Fig. 4.

Considérons maintenant deux droites SS′ et UU′ (fig. 5) passant par l'extrémité B de la perpendiculaire AB élevée sur TT′, et supposons que les angles aigus ABS et ABU′ sont égaux. Nous savons déjà que les distances de BS et de AT diminuent de plus en plus *à partir de* AB vers S et T et que celles de BU et de AT augmentent de plus en plus dans le même sens. Il s'ensuit tout naturellement qu'il existe, entre les droites BS et BU, — dont la première fait avec AB un triangle aigu et la seconde un angle obtus, — une droite intermédiaire BV, dont les distances à AT ne subissent aucune variation et restent constantes. Comme l'angle ABV ne peut être ni aigu, ni obtus, il est droit et, par suite, BV est perpendiculaire à AB. Ainsi la droite BV est équidistante de AT, et l'*équidistance des droites* est prouvée géométriquement, uniquement au moyen des propriétés des perpendiculaires et des obliques, sans le secours d'aucune supposition arbitraire. Les non euclidiens auront de la peine à y trouver un postulat dissimulé quelconque.

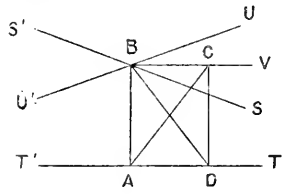


Fig. 5.

6. On prouvera immédiatement la possibilité des *rectangles*.

D'un point C (fig. 5), pris sur BY, abaissons sur AT la perpendiculaire CD et nous obtiendrons le quadrilatère ABCD, dont les côtés AB et CD sont égaux. Menons la diagonale AC et nous aurons deux triangles égaux : $\Delta ABC = \Delta ACD$, car AC est leur côté commun, $AB = CD$ et les angles en *B* et en D sont droits. Par suite $BC = AD$. Menons la diagonale BD et nous aurons encore deux triangles égaux : $\Delta ABD = \Delta BCD$, car les deux côtés de l'un d'eux sont égaux aux deux côtés correspondants de l'autre, et le troisième côté BD est commun. Par suite, l'angle en C, étant égal à l'angle en A, est droit. Il s'ensuit que le quadrilatère ABCD est un *rectangle*, car tous ses angles sont droits et ses côtés opposés sont égaux. On en conclura que la somme des angles d'un triangle rectiligne est égale à deux angles droits et que le postulatum d'Euclide, qui a subi tant de persécutions injustes au XIX^e^ siècle, est une vérité incontestable.

7. Ainsi toute la théorie des parallèles se trouve établie, sur une base solide, et l'on est débarrassé définitivement d'une hypothèse qui répugne au bon sens et exige *des figures qu'on ne sait pas construire* et qui ne sauraient exister non seulement en réalité, mais même dans l'imagination. Si l'analyse moderne ne distingue pas le réel de l'imaginaire, le possible de l'impossible, le vrai du faux, cette distinction aura toujours une grande importance en géométrie. On ferait bien de se rappeler que Lobatschevsky lui-même a reconnu que *la Géométrie non euclidienne ne peut avoir d'application que dans l'analyse, puisque*, selon lui, *les mesures directes ne nous montrent pas dans la somme des angles d'un triangle la moindre distinction de deux angles droits.*

On a donc le droit de souhaiter que cette doctrine paradoxale et contradictoire ne soit pas introduite dans l'enseignement, où elle pourrait fausser l'intelligence des élèves.

M. Frolov (Genève).

AU SUJET DE QUESTIONS CHRONOLOGIQUES

Les polémiques d'un grand nombre de journaux et même les dispositions prises par certaines autorités pour célébrer l'avènement d'un nouveau siècle au moment où l'on entrait seulement dans la dernière année de celui qui est en train de s'achever, nous montrent combien il y a encore de gens qui ne sont capables d'observer les objets en eux-mêmes, mais qui les voient à travers des signes représentatifs ou à travers des formules toutes faites. Ce qui est arrivé là nous montre un des grands défauts de l'ancienne manière d'enseigner, en recourant à la mémoire et à la foi due à la parole du maître, là où ni l'une ni l'autre n'ont que faire. Ce défaut dans l'ancienne manière d'enseigner, défaut qui n'a pas encore disparu de nos écoles élémentaires, a laissé de nombreuses traces dans la phraséologie de l'Arithmétique : les 4 *règles*, la *règle* de 3, la *règle* d'intérêts, la *règle* d'alliage : tout se faisait par *règles* apprises par cœur. C'est ainsi qu'on a appris à distinguer les siècles au moyen d'une *règle :* si vous voulez savoir de quel siècle est une année, vous n'avez qu'à augmenter d'une unité le nombre de centaines comprises dans le millésime de l'année ; d'après cette règle 1900 est en effet du XX^e^ siècle, car $19 + 1 = 20$.

C'est une fausse idée qu'on a prise en apprenant une règle de la raison d'être de laquelle on ne se rendait pas compte, de manière qu'on ne pouvait pas se rendre compte non plus de l'unique exception qu'elle devait subir. Je me rappelle que quelqu'un m'a demandé un jour : « Pourquoi dit-on de François I^er^, monté sur le trône en 1515, qu'il a régné dans le XVI^e^ siècle et non dans le XV^e^ — puisqu'il y a quinze cents, etc. » J'ai répondu : « Parce que c'était le XVI^e^ siècle ; vous n'avez qu'à compter vous-même pour vous en assurer. » Alors il se mit à dire : « le premier siècle va de 1 à 100 inclus ; donc le deuxième de 101 à 200 inclus.

Ah ! tiens ! c'est vrai. » — Je suis sûr que celui-là ne croira pas être dès maintenant dans le XX^e^ siècle.

Donc, première cause d'une erreur trop commune : une règle sue par cœur, sans s'être rendu compte des causes qui ont pu la motiver. Morale pour l'instituteur donnant les premiers principes d'Arithmétique : Moins s'adresser à la mémoire des élèves et plus à leur raison.

Mais une seconde cause est encore la confusion qu'on met dans la manière de compter les longueurs, soit de chemin, soit de temps, et les points qui les limitent. Ainsi de ce qu'au point de départ des chemins qui de la capitale d'un pays rayonnent vers les extrémités il y a une borne marquée 0, il ne s'ensuit pas qu'il y ait un 0^me^ kilomètre ; mais le kilomètre qui, partant de la borne 0

va à la borne 1, c'est celui-là qu'on nomme le premier ; celui qui va de la borne 1 à la borne 2 est le second ; et chaque fois la borne à laquelle on arrive indique combien on a fait de kilomètres.

Le numéro d'ordre d'un kilomètre se trouve donc à la fin du kilomètre et non au commencement.

Il n'en est pas de même pour les années ; quand on décroche le vieil almanach pour en raccrocher un autre, c'est au commencement de l'année auquel il doit servir qu'on l'accroche au mur. Mais de ce que cet almanach, qui fait pour ainsi dire office de borne, porte 1900, il ne s'ensuit pas que l'ère a déjà atteint 1900 ; elle a, chaque fois qu'on consulte l'almanach et l'horloge, 1899 ans, plus le nombre de mois, de jours, d'heures, de minutes et secondes déjà écoulées de l'année courante. Victor Hugo est né en février 1802 ; le siècle n'avait donc pas deux ans, comme il l'a écrit dans le plus célèbre de ses vers, mais un an un mois et je ne sais plus combien de jours.

J'ai lu dans un raisonnement ayant pour but de prouver que nous étions au XX^e^ siècle : « Belle chose que les chiffres. Les savants prétendent qu'il n'y a pas eu d'an 0 ; pourtant ils décident qu'on compterait les heures de 0 à 24, les degrés de 0° à 360°, etc. »

Ici encore on fait confusion par suite d'un même nom accordé à des espaces de temps et aux limites qui les séparent.

$0^{\text{heure}} \equiv 24^{\text{heures}}$ c'est le petit espace de temps, infinitésimal, le point, s'il est permis d'appliquer au temps cette expression employée pour l'espace, qui sépare le jour qui vient de s'écouler de celui qui arrive, qui sépare la dernière heure du jour passé de la première de celui qui le remplace. Il n'y a donc pas plus d'heure zéro qu'il n'y a d'an zéro ; mais il y a un moment noté 0 ou 24 qui finit la vingt-quatrième heure du jour passé et commence la première du nouveau jour ; et cette première heure va de 0 à 1, comme la seconde de 1 à 2, la n^{me} de $n-1$ à n. Là, comme pour les kilomètres, la borne est posée au point d'arrivée, et non au point de départ, et il ne viendra à l'idée de personne de prétendre qu'à onze heures du soir une nouvelle journée commence. Ces choses sont élémentaires, mais fait-on réfléchir les élèves là-dessus ? Tout ce qu'on voit nous répond que non.

Il en est de même des degrés. Ce mot a deux sens ; le plus vrai indique un espace angulaire dont il faut 90 pour faire un angle droit ; mais par extension on a donné ce nom aussi aux traits. $0^\circ \equiv 360^\circ$ n'est donc qu'un trait qui indique à la fois le point dont on part pour compter les angles et celui où on arrive à partir de 0° après avoir fait un tour d'horizon complet. Or, il n'est encore venu à l'idée de personne de prétendre qu'en arrivant au trait marqué 99° on avait parcouru la première centaine de degrés.

Il y a beaucoup de mots dans la science mathématique qui ont ainsi plusieurs sens, et il me semble qu'il serait urgent de prendre compte de cela, car il serait impossible de changer cela sans trop inventer de termes nouveaux. Ainsi le mot nombre indique non seulement les symboles écrits ou parlés qui distinguent une quantité d'une autre, mais indiquent encore ces quantités elles-mêmes ; et il me semble qu'admettre exclusivement une seule des trois définitions auxquelles cela donne lieu, serait mettre beaucoup d'obscurité dans bien des raisonnements.

Une autre moralité que je tiens à tirer de la polémique relative à la fin du siècle est celle-ci : chaque fois qu'un professeur, soit de mathématique, soit de logique, trouve un sophisme ou un faux raisonnement dans un journal ou dans un livre, il devrait

en prendre note et, comme devoir écrit, le donner à réfuter à ses élèves. Jamais, par exemple, il n'aurait trouvé plus abondante récolte que pendant les quelques mois qui viennent de s'écouler ; et ce qu'il y a de plus curieux, ce sont les raisonnements où l'on accumule d'abord des faits qui doivent irréfutablement conduire à la vérité et qu'on termine par une conclusion fausse, par exemple (je résume) :

Jésus-Christ un an après sa naissance comptait un an, deux ans après sa naissance il en comptait deux ;... donc, s'il était devenu centenaire, au bout de la quatre-vingt-dix-neuvième, il aurait eu cent ans.

Pas plus difficile que cela.

Aucun des abonnés de ce journal ne vivra plus en 1999 et ne sera donc plus exposé à ce déchaînement de sophismes. Il n'en est pas moins vrai que dans l'enseignement on devrait rechercher les moyens d'empêcher dans la suite ces espèces de logomachies que certaines gens prennent pour des raisonnements ; les moyens de faire aller au fond des choses, au lieu de s'arrêter à l'habit dont les revêtent les mots, les chiffres et autres signes.

Qui ne se rappelle qu'en ses premières études d'histoire il n'a su se rendre le moindre compte des espaces de temps plus ou moins considérables séparant les faits qu'il avait étudiés. En effet, une année des annales contemporaines fournit plus de faits et occupe plus de place dans un livre que n'importe lequel des millénaires qui précèdent les guerres médiques. Les mille ans de l'histoire du moyen âge n'en fournissent pas plus que les trois siècles et demi allant de la prise de Constantinople à la Révolution française.

Pour se rendre un juste compte des temps il faudrait donc une espèce d'atlas chronologique où à chaque siècle serait consacrée une page rangée en carré polonais. En notant dans les cases de ces carrés les dates des événements les élèves d'histoire se rendraient même compte des espaces de temps qui les séparent.

Mais qu'on ne m'accuse pas de sortir ici du cadre des études de ce journal. La Chronologie est une étude qui relève des mathématiques, et voici en effet deux problèmes à données contradictoires qui embarrasseraient au premier abord des élèves assez forts en calcul et dont la solution serait enfantine au moyen de ces carrés.

I. Les Marseillais ont célébré en 1899 le vingt-cinquième anniversaire séculaire de la fondation de leur ville ; supposant qu'ils aient bien choisi leur date, en quelle année Marseille a-t-il été fondé ? (— 602).

II. M. Ch. Dreyss, dans la *Chronologie Universelle* (Hachette, 3e édit., 1864, p. 25), porte à 600 avant Jésus-Christ la fondation de Marseille. A ce compte quel serait son vingt-cinquième anniversaire séculaire ? (+ 1901).

Le rapprochement de ces deux problèmes et de leurs solutions nous montre que M. Dreyss ou les Marseillais se sont trompés de deux ans. Peut-être faut-il partager l'erreur entre les deux, car il paraît qu'ailleurs on trouve 601 avant Jésus-Christ pour la date du même événement, ce qui mettrait son vingt-cinquième anniversaire séculaire en 1900.

La simple inspection des deux carrés polonais ci-contre nous

Schéma d'un siècle antérieur à J. C

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
90									81
80									71
70									61
60									51
50									41
40									31
30									21
20									11
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Schéma d'un siècle postérieur à J. C.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11									20
21									30
31									40
41									50
51									60
61									70
71									80
81									90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

montre que, pour qu'une année postérieure à Jésus-Christ soit la séculaire d'une année antérieure à Jésus-Christ, il faut et suffit que la somme des deux millésimes soit terminée à droite par 01 ; la partie à gauche de ce 0 donne le numéro d'ordre de l'anniversaire. Ainsi 600 + 1901 = 2501.

La numération ne comprend pas seulement, comme on pourrait le croire en lisant les premiers chapitres de la plupart des Arithmétiques, l'écriture en chiffres d'un nombre prononcé en paroles, et la traduction en paroles d'un nombre écrit en chiffres ;

elle consiste aussi à compter de la manière la plus simple possible une quantité d'objets rassemblés, en facilitant ce comptage par la manière de les disposer.

Le carré polonais, surtout si on donne à ce carré la dimension d'un décimètre et aux petits carrés qui les subdivisent celle d'un centimètre, est un instrument parfait pour montrer aux enfants à compter un nombre de pommes inférieur à 100 sans s'époumonner à dire la suite des nombres ; mais il a de plus l'avantage de montrer intuitivement les rapports qui existent entre la numération cardinale et la numération ordinale ; et surtout entre les diverses manières de compter ordinalement, par unités, par dizaines ou par centaines. Un enfant qui par le carré polonais aura été exercé à désigner la troisième case de la deuxième dizaine du tableau, puis à nommer le numéro d'ordre naturel de cette case, à savoir : 13, et réciproquement ; un enfant qui saura ainsi que 50 est le dernier nombre de la cinquième dizaine et 51 le premier de la sixième ; un enfant qui, même avant l'âge du raisonnement, aura appris tout cela par l'intuition, saura, une fois l'âge de la raison venu, raisonner ces matières, et ne sera pas plus embarrassé quand il s'agira de centaines, ou siècles, surtout si on lui donnait de temps en temps à faire des transformations de dates dans le genre de celles-ci :

Bataille de Valmy, 20 septembre 1792 = dernier jour de la deuxième dizaine du neuvième mois de la deuxième année de la dixième décennie du XVIII^e^ siècle. Bataille de Marathon (— 490) première année de la seconde décennie du V^e^ siècle avant Jésus-Christ.

On pourrait même transformer XVIII^e^ siècle en VIII^e^ siècle du second millénaire.

Il est à noter qu'après avoir exercé les enfants à trouver la case d'un rang indiqué sur des carrés polonais à cases numérotées, il faudra les exercer sur des carrés non numérotés. Le boulier russe à dix tringles de dix boules chacune pourrait dans cette seconde période remplacer le carré polonais.

Au risque d'avoir contre moi les professeurs d'histoire, de grammaire et de littérature, je trouve que dans l'explication d'auteurs, soit anciens soit modernes, il y aurait lieu de faire traduire en dates et en mesures modernes les expressions telles

que : *la troisième année de la douzième olympiade* ;... *trente-six parasanges*,... 37 *millia passuum*. Ces traductions en langage moderne seraient mises en marge de la traduction avec les expressions anciennes ; évidemment alors il faudrait aussi expliquer la manière d'opérer les transformations ; et partout où elles pourraient se faire par le calcul simplement mental il y aurait lieu de l'exiger dans des questions posées verbalement. En résumé général, pour transformer des enfants en hommes capables de calculer et de raisonner leurs paroles et leurs actes, il faut les habituer à calculer et à raisonner dans toutes leurs études, même dans celles qui semblent le plus ne s'appuyer que sur la mémoire.

Ch. Berdellé (Rioz, Haute-Saône).

SUR LES DÉFINITIONS

Les définitions de mots ou de locutions, sont logiquement arbitraires, pourvu qu'un mot ou une locution ayant été définis, on ne leur attribue jamais dans le discours un sens autre que celui qui a été adopté, à moins de prévenir celui auquel le discours s'adresse. Tout le monde, je pense, sera d'accord avec moi sur ce point.

On peut ranger les mots ou les locutions à définir dans deux catégories ; il peut arriver, en effet, que l'objet à définir soit bien connu de tout le monde, sans toutefois que sa propriété caractéristique se dégage assez nettement pour intervenir efficacement dans le raisonnement ; dans ce cas une définition devient nécessaire, mais il faut absolument que dans la définition que l'on donne de l'objet en question, on le reconnaisse immédiatement.

Si au contraire l'objet à définir est peu connu, la définition que l'on en donne est arbitraire, pourvu, bien entendu, qu'elle soit exacte.

Nous avons tous, dès la plus tendre enfance, l'idée du nombre, surtout du nombre entier, idée qui naît de la possibilité de répé-

ter une opération ou d'assembler des objets ; cette notion admise sans autre explication n'est peut-être pas très claire, mais passons ; si, comme le proposent les géomètres de l'École allemande, on définit la fraction comme l'ensemble de deux entiers placés dans un certain ordre, puis si l'on continue à définir l'égalité et l'addition des fractions au moyen d'équations, on jette nécessairement le trouble dans l'imagination de celui à qui l'on donne de pareilles définitions, s'il n'est pas déjà très familiarisé avec les abstractions de la Mathématique.

Tout enfant qui sait parler sait ce que c'est que la moitié ou les $\frac{2}{3}$ d'un gâteau ; dites-lui pour lui expliquer le sens de cette locution « deux tiers » : c'est l'ensemble de 2 et de 3 placés dans un certain ordre, et continuez comme il a été dit tout à l'heure, il croira que vous voulez le mystifier ; et si pareille définition tombe du haut d'une chaire, elle risque de dégoûter des sciences à tout jamais les enfants auxquels on veut enseigner les premières notions de l'Arithmétique. Logiquement le nombre abstrait peut être conçu indépendamment du nombre concret, mais dans l'ordre naturel des choses, et historiquement, la notion du nombre concret précède celle du nombre abstrait. Dans l'enseignement, il faut, autant que possible, exposer les doctrines dans l'ordre où elles se sont naturellement présentées, ou au moins dans un ordre tel qu'elles auraient pu se présenter à un chercheur. En d'autres termes, il faut s'adresser au bon sens des élèves et non à leur mémoire.

Le point de vue auquel se place l'École allemande, intéressant sans doute, et qui mérite d'être signalé à des élèves très forts, a l'inconvénient de compliquer énormément les choses ; et pour cette raison encore je rejetterais sa définition des nombres. Mais il arrive souvent que des définitions bien plus fécondes que d'autres doivent céder le pas à d'autres pour les raisons que j'ai invoquées tout à l'heure. Ainsi, par exemple, les définitions classiques de la surface, de la ligne et du point, sont tout à fait défectueuses, et l'on s'en aperçoit dès que l'on aborde la Géométrie analytique, car il est impossible de démontrer qu'une équation entre x et y représente une ligne en Géométrie plane, et l'on considère alors comme un paradoxe qu'il existe des fonctions continues sans

dérivées, paradoxe qui n'en est un que pour des élèves déjà forts, alors que les commençants s'étonnent qu'on ne leur démontre pas l'existence de la dérivée.

Le simple bon sens nous défend de définir le point comme ce qui dans l'espace peut être déterminé par trois nombres, et c'est cependant là la seule définition qui rend compte de toutes les difficultés que l'on rencontre en Géométrie. Je regrette, pour ma part, que l'enseignement de la Géométrie analytique ne se fasse pas en partant de ce point de vue si clair et si fécond ; mais il est bien évident que l'esprit d'un commençant se révolterait si de prime abord on se plaçait sur un pareil terrain, il veut, en effet, reconnaître dans les définitions des mots point, ligne, surface, l'image qu'il s'est faite des choses représentées par ces mots qui lui sont familiers. H. Laurent (Paris).

SPHÈRE ET ELLIPSOIDE

SPHÈRES CONCENTRIQUES ET ELLIPSOIDES CONCENTRIQUES HOMOTHÉTIQUES (1)

Dans une note précédente (2) nous avons fait voir comment on peut dériver des théorèmes sur l'ellipse et sur des ellipses concentriques homothétiques des théorèmes correspondants du cercle et des cercles concentriques, quand les cercles et les ellipses sont en affinité. Le présent travail contient une étude analogue sur la sphère et l'ellipsoïde, ainsi que sur les sphères concentriques et les ellipsoïdes concentriques homothétiques. Pour entrer en matière, nous allons rappeler quelques propositions sur les systèmes alliés de l'espace.

Si deux systèmes de l'espace Σ et Σ_1 sont alliés, ou en affinité,

(1) Reye, *Geometrie der Lage*, 2. Abthlg : 3. Auflage, Vortrag 8 ; 3. Abthlg ; 3. Auflage, Vortrag 5.

(2) « Cercle et ellipse », etc. *L'Enseignement math.*, 1re année, 1899, p. 452.

leurs plans à l'infini se correspondent l'un à l'autre. Comme, d'après cela, toute droite à l'infini dans Σ a pour correspondante une droite à l'infini dans Σ_1, deux systèmes plans homologues dans Σ et Σ_1 sont aussi en affinité ; et de même, deux ponctuelles homologues de Σ et Σ_1 sont projectives semblables. Il s'ensuit que non seulement les points milieux de deux segments rectilignes homologues de Σ et Σ_1 sont des points homologues, mais encore qu'à deux segments égaux quelconques d'une droite dans Σ correspondent deux segments égaux sur la droite homologue dans Σ_1. A des lignes et des plans parallèles correspondent des lignes et des plans parallèles. A tout parallélogramme de Σ doit donc correspondre un parallélogramme de Σ_1 et à tout parallélipipède un parallélipipède.

Deux solides quelconques de Σ sont entre eux dans le même rapport que les solides homologues de Σ_1, et, par suite, quand deux solides de Σ sont égaux, il en est de même des solides homologues de Σ_1.

Supposons dans les deux systèmes alliés Σ et Σ_1 deux surfaces homologues quelconques. Comme tout système de cordes parallèles dans l'une des surfaces a pour correspondant un système de cordes parallèles dans l'autre et que tout point milieu d'une corde correspond au point milieu de la corde homologue, il en résulte que dans deux surfaces alliées du second ordre, un plan diamétral correspond à un plan diamétral et deux diamètres conjugués ou un plan diamétral et son diamètre conjugué correspondent respectivement à deux diamètres conjugués ou à un plan diamétral et son diamètre conjugué.

Une sphère quelconque peut être alliée à un ellipsoïde, et les deux surfaces peuvent être regardées comme surfaces homologues des systèmes alliés de l'espace. Soient donnés la sphère $\varkappa$ et l'ellipsoïde $\varkappa_1$, et supposons qu'ils se correspondent dans les systèmes alliés de l'espace Σ et Σ_1 ; alors il sera facile de déduire, comme auparavant, des théorèmes connus de la sphère les théorèmes correspondants sur l'ellipsoïde.

Nous établissons les relations suivantes :

Trois diamètres conjugués d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, tous les parallélépipèdes dont les faces sont tangentes à la sphère $\varkappa$ aux extrémités de trois diamètres conjugués quel-

conques sont des cubes ayant tous le même volume $8r^3$, r étant le rayon de la sphère $\varkappa$. Le volume du cube circonscrit est donc avec celui de la sphère dans le rapport de $8r^3 : \frac{4\pi}{3} r^3$ ou $8 : \frac{4\pi}{3}$. De là on déduit pour l'ellipsoïde $\varkappa_1$ ce qui suit :

« Tous les parallélépipèdes, dont les faces sont tangentes à « l'ellipsoïde $\varkappa_1$ aux extrémités de trois diamètres conjugués « quelconques ont le même volume $8abc$, en désignant par $2a$, « $2b$, $2c$ les segments interceptés par la surface sur ses trois axes.»

Comme dans les systèmes Σ et Σ_1 les corps ou solides homologues sont en proportion, nous concluons de ce qui précède, en désignant par V le volume de l'ellipsoïde $\varkappa_1$:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 : 8r^3 = \mathrm{V} : 8\,abc,$$

donc :

$$\mathrm{V} = \frac{4\pi}{3}\,abc.$$

La sphère $\varkappa$ étant divisée en huit parties équivalentes par trois plans diamétraux conjugués, il en est de même de l'ellipsoïde $\varkappa_1$.

Les points milieux de toutes les cordes de la sphère $\varkappa$ qui passent par un seul et même point, sont situés sur une sphère ξ; la droite qui joint ce point au centre de la sphère $\varkappa$ est aussi un diamètre de la sphère ξ. De là nous concluons que :

« Les points milieux de toutes les cordes de l'ellipsoïde $\varkappa_1$ qui « passent par un seul et même point, sont situés sur un ellip- « soïde ξ_1 (1); la droite qui joint ce point au centre de l'ellip- « soïde $\varkappa_1$ passe aussi par le centre de l'ellipsoïde ξ_1. »

Nous rendrons notre discussion sur la sphère et l'ellipsoïde plus intéressante encore en considérant des sphères concentriques et des ellipsoïdes concentriques homothétiques.

Supposons de nouveau, comme précédemment, que la sphère $\varkappa$ et l'ellipsoïde $\varkappa_1$ soient des surfaces homologues dans les deux systèmes alliés de l'espace Σ et Σ_1. Prenons maintenant une seconde sphère ξ concentrique à la première, et nous aurons comme surface homologue du système Σ_1, un ellipsoïde ξ_1, con-

(1) L'ellipsoïde ξ_1 ne saurait être une sphère, les systèmes Σ et Σ_1 n'étant point semblables, mais seulement alliés.

centrique à l'ellipsoïde $\varkappa_1$. Deux diamètres conjugués quelconques d'une sphère étant perpendiculaires entre eux, les sphères $\varkappa$ et ξ ont en commun la même gerbe polaire des diamètres ; il en est de même des ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ξ_1, et par conséquent les axes de $\varkappa_1$ et de ξ_1 coïncident ; $\varkappa_1$ et ξ_1 sont appelés « ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

En plaçant, dans ce qui suit, les propositions correspondantes l'une en regard de l'autre, nous concluons :

DES THÉORÈMES A GAUCHE :

a) Les sphères $\varkappa$ et ζ sont rencontrées par tout plan sécant s en deux cercles concentriques g et l.

b) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de $\varkappa$ et ζ sont tous situés sur un plan diamétral commun.

c) Les centres des couples de circonférences concentriques déterminées sur les sphères $\varkappa$ et ζ par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux sphères.

d) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre commun aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont perpendiculaires à ce diamètre et par conséquent parallèles entre eux.

e) Menons par le centre O de $\varkappa$ deux droites qui coupent $\varkappa$ aux points A, B et ζ aux points C, D ; alors les triangles OAB et OCD sont semblables, et par conséquent AB est parallèle à CD.

LES THÉORÈMES A DROITE :

a_1) Les ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont rencontrés par tout plan sécant s_1 en deux ellipses g_1 et l_1 qui sont concentriques homothétiques comme étant alliées aux circonférences concentriques g et l.

b_1) Les points milieux d'une gerbe de cordes parallèles de $\varkappa_1$ et ζ_1 sont tous situés sur un plan diamétral commun.

c_1) Les centres des couples d'ellipses concentriques homothétiques déterminées sur les ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 par un faisceau de plans sécants parallèles, sont tous situés sur un diamètre commun des deux ellipsoïdes.

d_1) Les quatre plans tangents construits aux extrémités d'un diamètre quelconque de $\varkappa_1$ et ζ_1 sont parallèles entre eux.

e_1) Soient O_1, A_1, B_1, C_1 et D_1 les points correspondants dans Σ_1, il résulte de *e*) que AB est parallèle à CD, et à cause de la similitude des triangles $O_1 A_1 B_1$ et $O_1 C_1 D_1$ nous avons la proportion :

$$O_1 A_1 : O_1 C_1 = O_1 B_1 : O_1 D_1$$

Donc :

Les rayons des ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont coupés par les surfaces en parties proportionnelles.

f) Les pôles d'un plan quelconque π par rapport aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont situés sur le diamètre perpendiculaire et conjugué à ce plan.	f_1) Les pôles d'un plan quelconque π_1 par rapport aux deux ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont situés sur le diamètre conjugué à ce plan.
g) Les plans polaires d'un point P par rapport aux deux sphères $\varkappa$ et ζ sont perpendiculaires au diamètre qui passe par le point P et par conséquent parallèles entre eux.	g_1) Les plans polaires d'un point P_1 par rapport aux deux ellipsoïdes $\varkappa_1$ et ζ_1 sont parallèles entre eux.
h) Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à $\varkappa$, ζ se coupent suivant quatre droites parallèles.	h_1) Les quatre plans polaires de deux points quelconques par rapport à $\varkappa_1$, ζ_1 se coupent suivant quatre droites parallèles.

Supposons maintenant dans le système Σ tout le faisceau des sphères concentriques à la sphère $\varkappa$, et nous aurons pour correspondant dans le système allié Σ_1 un « faisceau d'ellipsoïdes concentriques homothétiques ».

D'après ce qui précède, nous sommes en état maintenant d'énoncer le résultat général que voici :

« Les ellipsoïdes d'un faisceau F d'ellipsoïdes concentriques « homothétiques ont la même gerbe polaire des diamètres et les « mêmes axes principaux. Le faisceau est déterminé par un seul « ellipsoïde. Le centre de cet ellipsoïde est le centre commun de « similitude. Nous obtiendrons un ellipsoïde concentrique homo- « thétique au premier en augmentant ou en diminuant ses rayons « dans un rapport donné. Par un point quelconque de l'espace on « peut faire passer un seul ellipsoïde du faisceau F. Tout plan « coupe le faisceau suivant des ellipses concentriques homothé- « tiques et est tangent à un ellipsoïde du faisceau au centre « commun des mêmes ellipses. Les centres des coniques déter- « minées sur les ellipsoïdes, par un système de plans sécants « parallèles sont tous situés sur un seul et même diamètre. Les « points milieux d'une gerbe de cordes parallèles sont tous « situés sur un seul et même plan diamétral. Les plans tangents « aux ellipsoïdes du faisceau F construits dans les extrémités « d'un diamètre, sont tous parallèles. Les pôles d'un plan quel- « conque par rapport aux ellipsoïdes du faisceau sont tous situés « sur un seul et même diamètre, et les plans polaires d'un point « quelconque forment un faisceau de plans parallèles. Les plans

« polaires de deux points quelconques par rapport aux ellip-
« soïdes du faisceau F se coupent suivant une gerbe de droites
« parallèles. »

Pour terminer, nous mentionnons encore les propositions suivantes :

« 1° Les sommets de tous les parallélipipèdes circonscrits à un
« ellipsoïde et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde aux
« extrémités de trois diamètres conjugués quelconques sont tous
« situés sur un ellipsoïde concentrique homothétique au premier. »

« 2° Les sommets de tous les cônes circonscrits à un ellipsoïde
« qui limitent avec les plans de leurs ellipses de contact des
« solides de volume donné, sont tous situés sur un second ellip-
« soïde, concentrique, homothétique au premier. » Reye.)

Pour démontrer ces deux propositions, nous n'avons qu'à allier les ellipsoïdes à des sphères. Dans le premier cas nous trouverons comme lieu des sommets des cubes correspondant aux parallélépipèdes, une sphère concentrique à la première ; et de même les sommets des cônes circonscrits à la sphère correspondant aux cônes circonscrits à l'ellipsoïde sont situés sur une sphère concentrique à la première.

Dr Kilbinger (Mulhouse).

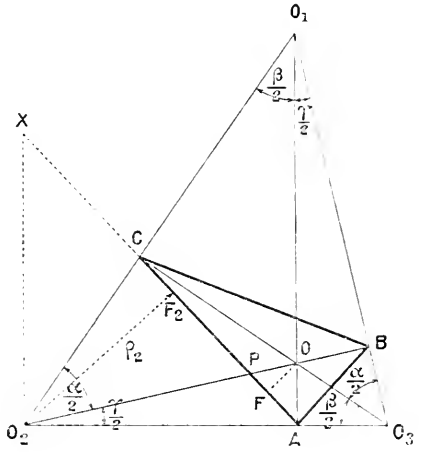
SUR LA DÉMONSTRATION
DES FORMULES DU DEMI-ANGLE
EN TRIGONOMÉTRIE PLANE

Le théorème de Carnot résout en principe le problème fondamental de la Trigonométrie, qui consiste à déterminer les angles d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Toutefois la formule obtenue ne se prête guère au calcul logarithmique ; aussi en déduit-on d'ordinaire les formules dites du demi-angle, en ayant recours à des transformations algébriques.

C'est, je crois, à M. Fred. Meyer, professeur au Gymnase de Halle, qu'on doit le premier essai [1] d'arriver directement à ces dernières formules, par des considérations purement géométriques.

Un peu plus tard M. Korschel donna [2] une démonstration analogue à celle de M. Meyer.

La méthode que je me propose d'exposer ici et qui conduit aux formules du demi-angle par une voie purement géométrique,



me semble plus importante que celle de Meyer, tant au point de vue pédagogique, qu'au point de vue scientifique. En effet, elle n'exige aucun théorème auxiliaire : la démonstration est absolument analogue pour les trois formules et, correspondant ainsi à leurs constructions, met bien en lumière leur étroite parenté ; la figure sur laquelle elle se base a une grande importance géométrique, puisque le triangle ABC est précisément le triangle ayant pour sommets les pieds des hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$; enfin, par cette méthode il est toujours facile de retrouver la démonstration de l'une quelconque des formules. Mais, arrivons au fait.

Menons les bissectrices tant intérieures qu'extérieures du triangle donné ABC (voir la figure) ; soit AO_1, BO_2 et CO_3 les

---

(1) Voir sa note publiée dans la *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht*, année 1887, p. 965 et 966.

(2) *Œsterr. Zeitschrift für das Realschulwesen*, année 1893, p. 460, 461.

trois bissectrices intérieures, O_2O_3, O_3O_1 et O_1O_2 les trois bissectrices extérieures, soient encore $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\lambda}{2}$ les demi-angles du triangle ABC.

1. Pour trouver la valeur de $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, il suffit de comparer les deux triangles semblables OCO_2 et OBO_3 ; le premier nous donne $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OC}{OO_2}$, et le deuxième $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OB}{OO_3}$; on en déduit, en multipliant membre à membre :

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{OC.\ OB}{OO_2.\ OO_3}=\frac{OC}{OO_3}\cdot\frac{OB}{OO_2}.$$

Si, d'autre part, on projette les points O et O_3 sur l'un des côtés CB ou CA, on voit que

$$\frac{OC}{OO_3}=\frac{(s-c)}{c}$$

en désignant par s le demi-périmètre du triangle ; de même si l'on projette les points O et O_2 sur l'un des côtés BA ou BC, on voit que

$$\frac{OB}{OO_2}=\frac{s-b}{b}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, on a enfin :

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(s-b)\quad(s-c)}{b.\qquad c}.$$

2. En employant les triangles OCO_2 et O_1BO_2, on arrivera d'une façon analogue à la formule de $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

On a, en effet, dans le triangle OCO_2 :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{O_2C}{O_2O}$$

et dans le triangle O_1BO_2 :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{O_2B}{O_2O_1}$$

d'où, par multiplication :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{O_2C}{O_2O}\cdot\frac{O_2B}{O_2O_1}=\frac{O_2C}{O_2O_1}\cdot\frac{O_2B}{O_2O}.$$

Projetant les points O_1 et O_2 sur CB ou CA, les points O et O_2 sur BC ou BA, on trouve :

$$\frac{O_3C}{O_2O_1} = \frac{s-a}{c} \text{ et } \frac{O_2B}{O_2O} = \frac{s}{b},$$

ce qui donne la formule cherchée :

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s\,(s-a)}{b.\,c.}.$$

3. Enfin, pour trouver $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, il suffit de considérer les triangles OCO_2 et O_1CO_3, qui nous donnent :

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{OC.\;\;O_1C}{O_2C.\;\;O_3C} = \frac{OC}{O_3C}\,\frac{O_1C}{O_2C};$$

mais

$$\frac{OC}{O_3C} = \frac{(s-c)}{s}, \text{ et } \frac{O_1C}{O_2C} = \frac{(s-b)}{(s-a)}$$

ainsi qu'on le reconnaît aisément par projection ; d'où il suit

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)\,(s-c)}{s.\,(s-a)}.$$

On obtiendrait plus rapidement cette dernière formule en formant le quotient $\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, mais je tenais tout d'abord à montrer la généralité de la méthode, en l'appliquant aussi à ce cas, et à indiquer ensuite un nouveau moyen de déterminer ρ : il suffit, en effet, pour l'obtenir de remplacer dans la dernière formule $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ par $\frac{\rho}{(s-a)}$.

Reste maintenant à exposer brièvement que cette méthode fournit un moyen mémnotechnique pour retrouver ces formules ; il repose sur la définition même des fonctions trigonométriques. Par exemple : pour trouver le second triangle qui, avec OCO_2, nous donnera la démonstration de la formule du $\sin\frac{\alpha}{2}$, on prolonge dans le triangle OCO_2, le côté opposé à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse, et l'on obtient le triangle OBO_3. Pour $\cos\frac{\alpha}{2}$, on prolongerait le côté adjacent à $\frac{\alpha}{2}$ et l'hypoténuse et pour $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, les deux côtés de l'angle droit.

Bien que ce qui suit n'appartienne plus, à vrai dire, à mon sujet, le lecteur me permettra d'indiquer, en terminant, une méthode nouvelle, à ce que je crois, pour déterminer le rayon du cercle ex-inscrit au triangle donné ABC. Calculons, par exemple, le rayon ρ_2 du cercle de centre O_2.

Menons O_2X parallèle à AO_1 : on voit alors que

$$\rho_2^2 = (s-c).\ \overline{F_2X}.$$

On obtiendra $\overline{F_2X}$ en remarquant que les triangles semblables OFA et O_2F_2X sont homothétiques, et ont pour centre d'homothétie P et pour rapport d'homothétie $\frac{r}{\rho_2} = \frac{(s-b)}{s}$; le côté $\overline{F_2X}$ est donc l'homologue de $\overline{FA}$, et comme ce dernier égale lui-même $(s-a)$, on a

$$F_2X = (s-a)\frac{s}{(s-b)}$$

d'où finalement

$$\rho^2_2 = \frac{s\,(s-a)\,(s-c)}{(s-b)}.$$

Frz. Redl (Viehofen, Basse-Autriche).

NOTION DE L'INFINI
EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

A PROPOS D'UN ARTICLE DE M. RIPERT [1]

La Géométrie élémentaire a heureusement échappé jusqu'ici aux innovations qui, sous couleur de progrès scientifique, ont entraîné les mathématiques spéciales dans une voie dangereuse. Aussi suis-je bien loin de partager l'opinion de M. Ripert sur l'introduction, dans la Géométrie élémentaire, de l'infini, au sens que M. Ripert donne à ce mot.

[1] Voir n° 2, 2e année, de l'*Enseignement mathématique* (15 mars 1900).

L'introduction de la notion de la droite de l'infini, du point à l'infini d'une droite, etc., ne peut venir utilement qu'en mathématiques spéciales, comme conséquence de la transformation homographique du plan. On peut alors montrer aux élèves que ces notions conventionnelles sont adoptées pour simplifier le langage, et qu'à chaque mode de transformation des figures planes correspond une façon différente d'envisager les points à l'infini ; en géométrie projective et en perspective, les points à l'infini d'un plan apparaissent comme étant sur une droite ; dans l'analyse des grandeurs complexes, on représente le plan sur une sphère, par une inversion : aux points à l'infini du plan répond alors un point de la sphère, et il est commode de parler du point de l'infini du plan, etc.

Pour la question particulière dont s'occupe M. Ripert, il est naturel et légitime d'introduire la notion du point à l'infini d'une droite, comme une conséquence de la division harmonique, qui est un mode particulier de transformation d'une droite en elle-même, point par point ; c'est ce qu'ont fait avec raison MM. Niwenglowski et Gérard dans le passage cité par M. Ripert. Mais vouloir *démontrer* comme une vérité absolue, par un théorème énoncé de la même façon que les théorèmes relatifs aux angles inscrits, *qu'une droite n'a pas deux points à l'infini mais seulement un*, c'est une idée inadmissible.

Quant à la démonstration proposée par M. Ripert, je n'y insisterai pas : elle repose sur un mode de transformation vague d'un cercle en une droite et elle permet de démontrer tout ce qu'on veut, pour les points à l'infini de la droite, suivant le mode de correspondance qu'on établit entre les points du cercle, ou d'une portion du cercle, et ceux de la droite.

P. APPELL (Paris).

LA NOMOGRAPHIE DANS L'ENSEIGNEMENT

A la suite de la publication du Traité [1] dans lequel je me suis efforcé de donner à la théorie des abaques, ou *Nomographie*, la plus grande généralité possible, les directeurs de la présente Revue ont bien voulu m'inviter à y indiquer la façon dont les principes de cette théorie pourraient pénétrer dans l'enseignement.

Je ne saurais me dissimuler le risque qu'il y a pour moi à accepter pareille invitation ; volontiers me soupçonnera-t-on d'un peu trop de complaisance envers une branche de la science à la codification de laquelle, depuis plus de dix ans, je n'ai cessé d'apporter tous mes soins. Pourtant, un article paru ici même [2] me met plus à mon aise pour aborder le sujet. L'utilité d'initier dès l'École les futurs techniciens à une théorie qui pourra plus tard leur rendre des services ayant été établie par cet article, puis sanctionnée par l'ouverture à l'Université de Louvain d'un cours spécial de Nomographie confié à M. le Professeur Suttor, je pense n'avoir pas à légitimer autrement la préoccupation que traduit le titre de cet article.

Je crois toutefois devoir faire remarquer que si, parmi les hommes techniques, les ingénieurs sont de ceux pour qui la Nomographie offre le plus d'avantages, ils ne sont pas les seuls. Les artilleurs et les marins, notamment, ont de fréquentes occasions d'y recourir, comme en témoignent divers exemples introduits dans le T. N., auxquels il convient de joindre la nombreuse série des curieuses applications à l'art naval publiées dans la

---

(1) *Traité de Nomographie*, paru en 1899, chez Gauthiers-Villars, à Paris. Un compte rendu a paru dans le présent Recueil (t. I, p. 368). Cet ouvrage sera désigné dans la suite de l'article par les lettres T. N.

(2) *De la Nomographie et de la nécessité de l'introduire dans l'enseignement*, par E. Pasquier, professeur à l'Université de Louvain (*Ens. Math.*, t. I, p. 350).

Rivista marittima, par M. G. Pesci, professeur à l'Académie navale de Livourne, à la suite desquelles ce géomètre distingué a été appelé à donner des conférences sur la Nomographie aux officiers qui suivent les cours de cette Académie.

Il me sera sans doute permis d'ajouter que j'ai fréquemment l'honneur d'être consulté par des officiers qui se proposent de faire pénétrer de plus en plus les abaques dans la pratique de leur métier, et que, d'autre part, nombre de professeurs de l'ordre technique, principalement en Allemagne et en Italie, veulent bien me faire savoir qu'ils font maintenant une place dans leur enseignement aux principes de la Nomographie.

Voici, au surplus, comment en tête d'un long article consacré au T. N. (1), s'exprime M. Maurice Lévy, l'éminent ingénieur et membre de l'Institut :

« Remplacer les calculs numériques qu'exigent les applications de la Science dans leur multiple variété, par des tableaux graphiques qui en fournissent les résultats à simple vue, toutes les fois que les représentations graphiques sont susceptibles d'une approximation suffisante, tel est l'objet d'un nouveau Chapitre de la Science, *qui mérite de prendre place à côté de la Géométrie descriptive et de la Statique graphique*..... »

Mais ce n'est pas là le côté du sujet que je désirerais surtout signaler dans le présent Recueil, destiné principalement aux mathématiciens. Ce que je tiens plutôt à envisager, c'est le rapport qu'il peut y avoir entre les principes de la Nomographie et l'enseignement des éléments généraux de Mathématiques.

On peut tout d'abord observer que le caractère d'universalité des applications de la Nomographie est très propre à justifier le rattachement de cette théorie, prise au moins dans sa partie élémentaire, à l'enseignement mathématique général. Je ne suis d'ailleurs pas le premier à émettre un tel vœu :

« Avec le traité de M. d'Ocagne, dit M. Goedseels (2), la Nomographie prend une place marquée dans la catégorie des sciences dont la connaissance est indispensable aux ingénieurs,

(1) *Genie civil*, t. XXV, p. 425.

(2) Compte rendu du T. N. dans la *Revue des Questions scientifiques* (2e série, t. XVI, p. 605).

aux officiers et aux calculateurs en général. Puisse ce traité engager les autorités académiques à inscrire la Nomographie dans les programmes des études! »

Il faut considérer d'autre part que les seules connaissances mathématiques indispensables pour l'exposé de cette théorie sont celles qui se donnent dans les Cours de Géométrie analytique, tels qu'en comporte en France la classe de Mathématiques spéciales. Et, à ce point de vue, il y a même lieu de remarquer que la construction des abaques permet de donner, aux yeux des élèves, aux principes de cette science une valeur concrète qui ne peut qu'en accroître l'intérêt. On me permettra à cet égard de me référer à une autorité que personne ne saurait contester, celle du savant directeur de la section scientifique de l'École Normale supérieure, M. J. Tannery. Soulignant, dans le compte rendu qu'il a bien voulu consacrer au T. N. [1], le caractère d'utilité de l'ouvrage, il ajoute :

« Cette utilité même n'est pas pour détourner les professeurs de nos lycées, qui seront certainement heureux de trouver dans le Livre de M. d'Ocagne des applications simples, à des problèmes réels, des méthodes qu'ils enseignent. Les méthodes de transformation, l'homographie en particulier, sont d'un usage courant en Nomographie ; j'ai déjà parlé de l'heureux usage que l'auteur a fait du principe de dualité ; je crois donc que, sans l'avoir cherché, M. d'Ocagne se trouvera avoir rendu service à l'enseignement. Par sa généralité même, l'enseignement dans les classes de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales est essentiellement théorique ; mais les maîtres même qui pensent que la théorie se suffit ont le devoir de ne pas donner à leurs élèves le dégoût de la réalité, de ne pas la faire oublier, de les y ramener quelquefois, et de leur montrer que quelques théories s'appliquent à des problèmes réels ; et s'il arrive qu'un élève, qui n'est pas encore « enivré par l'absorption du lotus mathématique », qui a gardé le souci de ce monde extérieur où il rêve de faire quelque chose, s'intéresse à une théorie par cela même qu'elle peut être utile, son maître ne manquera pas de s'en réjouir. »

---

[1] *Bull. des Sc. Math.*, t. XXXIII, p. 176.

Il est donc permis de souhaiter — et c'est le vœu en vue duquel a été rédigé le présent article — qu'une petite place soit faite, sous forme d'application, dans l'enseignement de la Géométrie analytique, aux éléments de la Nomographie.

Afin de faciliter autant que possible la réalisation de ce vœu, j'indiquerai en terminant les parties du T. N. qui me semblent susceptibles, sous une forme plus ou moins résumée, de pénétrer dans un cours de géométrie analytique.

En ce qui concerne les principes applicables à la construction des abaques les plus usuels, je citerai ceux qui sont relatifs aux *abaques cartésiens à trois variables* (n^os^ 16 et 22), aux *abaques anamorphosés* (n^os^ 24, 26, 27, 28), aux *abaques à entrecroisement* les plus généraux (n^os^ 41, 42, 46, 47), aux *abaques à alignement* (n^os^ 56, 57, 60, 61, 121).

Pour l'étude de systèmes d'éléments intervenant fréquemment dans les abaques, je renverrai aux n^os^ 44, 45, 64 et 65 ; pour l'emploi de l'homographie en vue de donner aux abaques la meilleure disposition possible, aux n^os^ 49, 50 et 62.

Enfin, laissant de côté les exemples d'application d'ordre technique, on peut signaler comme propres à intéresser des élèves de Mathématiques spéciales ceux qui se rencontrent dans les n^os^ 23 (2°), 79, 81, 125 et 126, tous relatifs à la résolution par abaques des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés.

M. D'OCAGNE (Paris).

CHRONIQUE

Congrès international des mathématiciens.

Des dispositions nouvelles prises par l'administration de l'Exposition universelle (service des Congrès) ont entraîné certains retards dans l'établissement des cartes. Celles-ci ne seront donc pas envoyées à l'avance aux adhérents. Ils pourront les retirer à Paris à un endroit qui leur sera indiqué en temps utile. En attendant, ceux d'entre eux qui n'habitent pas Paris recevront, avec la quittance du trésorier, les bons de réduction auxquels ils ont droit pour leur voyage.

Ajoutons que les cartes de membres du Congrès donneront droit d'entrée à l'Exposition pendant la durée du Congrès, suivant une disposition bienveillante, et toute récente, adoptée par l'administration.

Congrès International de Bibliographie (Paris, 16-18 août 1900).

A l'occasion de ce Congrès, le général Sebert, membre de l'Institut, vient de publier, en qualité de président de la commission d'organisation, une circulaire dont nous reproduisons les passages les plus essentiels.

Nous vous adressons le programme adopté pour le Congrès par la Commission d'organisation.

Ce Congrès s'occupera principalement de la question des Répertoires bibliographiques, dont la diffusion est réclamée par les hommes d'étude de toutes spécialités pour faciliter la recherche des documents qui peuvent leur être utiles.

Il y sera notamment traité avec détails de l'œuvre coopérative entreprise par l'Institut international de bibliographie pour la création et le développement en tous pays du Répertoire bibliographique universel sur fiches basé sur la classification décimale.

Nous espérons que vous voudrez bien prendre part à ce Congrès et nous serons heureux si vous nous apportez un concours actif en y traitant une des questions que comporte son programme.

Nous vous demanderons, dans ce cas, de nous envoyer avant le 1er juillet 1900 au plus tard, les mémoires dont vous vous proposeriez de donner lecture, ou du moins l'analyse des communications que vous désireriez faire, afin que la Commission d'organisation ait le temps d'en faire l'examen dans le but de coordonner les travaux du Congrès et de les rendre ainsi plus profitables.

Le prix de la cotisation pour ce Congrès est fixé à 20 francs.

Les membres adhérents recevront, sans autre déboursé, un exemplaire des comptes rendus détaillés du Congrès, dans lesquels seront reproduits les mémoires et rapports présentés.

Adresser les communications relatives au Congrès à M. Eugène Capet, secrétaire adjoint, 8, place du Panthéon, à Paris.

Parmi les membres de la Commission d'organisation figurent notamment MM. le prince Roland Bonaparte, vice-président ; Gauthier-Villars, trésorier ; Gariel, Ch. Richet, Vallot, etc. Le programme est assez important et intéressant pour mériter d'être reproduit in extenso.

PROGRAMME

Avis préliminaire. — Pour délimiter l'œuvre du Congrès et en rendre les travaux plus profitables, la Commission d'organisation a adopté les dispositions suivantes :

Dans le domaine de la bibliographie pure, c'est-à-dire de la bibliographie dégagée des questions corrélatives qui peuvent intéresser également les bibliothécaires, et notamment de la bibliothéconomie, le Congrès sera consacré aux problèmes de la constitution des Répertoires bibliographiques universels ou particuliers destinés aux hommes d'étude de toutes les spécialités.

Il laissera à ses adhérents toute liberté en ce qui concerne la discussion des systèmes de classification ayant déjà fait l'objet d'applications pratiques et il admettra l'exposé des mérites respectifs de ces systèmes, mais il écartera toute proposition tendant à prendre parti pour ou contre l'un d'eux.

Sur chacun des groupes de questions indiquées ci-après, la Commission sollicite l'envoi de mémoires et de propositions susceptibles d'être discutées utilement. Elle demande que ces envois lui soient faits avant le 1er juillet 1900, pour lui permettre de procéder à un examen préalable destiné à coordonner et faciliter les travaux du Congrès.

1. Exposé de l'état actuel des travaux bibliographiques dans les différents pays et sur la direction à leur imprimer eu égard aux besoins signalés et à l'étendue du champ à explorer.

2. Mesures à prendre et desiderata concernant les différents types de recueils bibliographiques (bibliographies universelles, internationales, nationales, particulières, choisies, critiques, analytiques, etc.).

3. Mesures à prendre et desiderata concernant les différents genres de documents pour faciliter l'établissement des répertoires bibliographiques (livres, revues et journaux, publications officielles, documents techniques, brevets d'invention, cartes et plans, musique, gravures, iconographie en général, etc.).

4. Concours divers pouvant être apportés à l'œuvre des répertoires bibliographiques :

a. Par le mode d'établissement des catalogues des grandes bibliothèques :

b. Par la réforme du dépôt légal des imprimés ;

c. Par l'action des éditeurs et des directeurs de revues et journaux, par les sociétés savantes et les associations de toute nature.

5. Grands répertoires bibliographiques en cours de préparation ou de publication. Etat de leurs travaux.

Notamment, état actuel des travaux du Répertoire bibliographique universel basé sur la classification décimale et de son organisation coopérative.

Mesures à prendre pour faciliter la multiplication, dans les différents pays et les différents centres d'études, des répertoires généraux et fragmentaires établis sur le même plan.

Tables de classification refondues.

6. Questions diverses se rattachant aux répertoires bibliographiques.

Classement des documents bibliographiques de divers genres.

Accessoires et outillages bibliographiques spéciaux.

NOTA. — Des dispositions seront prises pour permettre d'exposer dans le Palais des Congrès le matériel bibliographique présenté.

Les Congrès internationaux de l'Exposition universelle.

Parmi les 127 congrès internationaux rattachés à l'Exposition universelle, et dont nous avons la liste sous les yeux, un certain nombre concernent plus ou moins directement les questions d'enseignement, ou les sciences mathématiques pures et appliquées.

Nous croyons être agréables à nos lecteurs en leur en donnant l'énumération par ordre chronologique, avec les dates, et l'indication des secrétaires généraux des Commissions d'organisation.

CONGRÈS	DATES	SECRÉTAIRES GÉNÉRAUX
De l'Enseignement agricole. . .	14-16 juin.	De Lagorsse, avenue de l'Opéra, 5.
Des accidents du travail et des assurances sociales.	25-30 juin.	Grüner, rue Louis-le-Grand, 29.
Des Actuaires	25-30 juin.	L. Marie, rue Jouffroy, 32.
De l'Automobilisme.	9 juillet.	Cte de Chasseloup-Laubat, avenue Kleber, 51.
Des Méthodes d'essais des Matériaux	9-16 juillet.	Debray, avenue Klèber, 41.
De surveillance et de sécurité en matière d'appareils à vapeur.	16-18 juillet.	Compère, rue de Rome, 66.
D'Architecture et de Construction navales.	19-21 juillet.	Hauser, rue Meissonnier, 4.
De Mécanique appliquée	19-25 juillet.	G. Richard, rue de Rennes, 44.

CONGRÈS	DATES	SECRÉTAIRES GÉNÉRAUX
De la Navigation.	28 juillet-3 août.	Pavie, rue du Faubourg-Saint-Honoré, 72.
De Chronométrie.	28 juillet-4 août.	Rollet de l'Isle, rue de l'Université, 13.
Des Architectes	30 juillet-4 août.	Poupinel, rue Boissy-d'Anglas, 45.
De l'Enseignement supérieur . .	30 juillet-4 août.	Larnaude, à la Sorbonne.
De l'Enseignement secondaire. .	31 juillet-6 août.	H. Bérenger, rue Froidevaux, 8.
De l'Enseignement primaire. . .	2-5 août.	Trantner, rue Etienne Marcel, 20.
De Philosophie.	2-7 août.	Xavier Léon, rue des Mathurins, 39.
De l'Enseignement technique, commercial et industriel. . .	6-11 août.	Lagrave, rue de l'Université, 74.
Des Mathématiciens	6-12 août.	Laisant, avenue Victor-Hugo, 162.
De Physique.	6-11 août.	L. Poincaré, boulevard Raspail, 103 *bis*.
De la Presse de l'Enseignement.	9-11 août.	Dubucquoy, rue de Naples, 26.
De Bibliographie.	16-18 août.	Moch, avenue de la Grande-Armée, 16.
D'Electricité	18-25 août.	P. Janet, rue de Staël, 14.
Des Bibliothécaires.	20-25 août.	Henri Martin, rue Sully, 1.
De Psychologie.	22-25 août.	Dr Janet, rue Barbet de Jouy, 21.
De l'Enseignement du dessin . .	29 août-1er sept.	Mme Chalrousse, boulevard Saint-Germain, 117.
De l'Education sociale	6-9 septembre.	Mme Lampérière, rue Vaneau, 37.
Des sociétés laïques d'Enseignement populaire	10-13 septemb.	Robelin, Longjumeau (Seine-et-Oise).
Des Tramways.	10-13 septemb.	Nonnemberg, rue Potagère, 25, Bruxelles.
D'Aréonautique.	15-20 septemb.	Triboulet, rue de la Pépinière, 10.
Des Chemins de fer.	20-29 septemb.	Weissenbruck, rue de Louvain, 11, Bruxelles.
De l'Ecole des Expositions . . .	juin, juil., août, septembre.	Choublier.

M. Joseph Bertrand.

Le 3 avril dernier est décédé M. Joseph Bertrand, qui était né le 11 mars 1822. Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, professeur au Collège de France, il a occupé une place considérable dans la science, et sa disparition laisse un vide considérable. Le monde des savants, dans tous les pays, ressentira vivement cette perte.

Nous espérons qu'il nous sera possible de publier ultérieurement une étude sur sa vie et sur son œuvre. Un tel travail demande à ne pas être fait légèrement ni à la hâte. Aujourd'hui, nous nous bornons à joindre nos regrets à ceux des nombreux admirateurs de Joseph Bertrand, et à

envoyer à sa famille les respectueuses condoléances de l'*Enseignement mathématique*.

La langue internationale « Esperanto ».

Le 28 mars dernier, M. Ch. Méray, correspondant de l'Institut, professeur à la Faculté des sciences, et M. Lambert, professeur à la Faculté des lettres de Dijon, ont fait à la Bourse du Commerce, sous le patronage de la Chambre de Commerce et des trois associations commerciales de cette ville, une conférence fort intéressante, et qui a obtenu un vif succès.

Le sujet traité par les conférenciers était l'exposé des avantages et des principes essentiels d'une nouvelle langue auxiliaire internationale, dite Esperanto, et qui présente, semble-t-il, un caractère de simplicité et une facilité dépassant ce qu'on pourrait croire.

Après le Volapuk et les nombreuses tentatives qui ont vainement suivi, il est permis d'être un peu sceptique en ces matières. Mais en présence d'affirmations aussi précises que celles des deux hommes que nous venons de nommer, quand on connaît leur caractère et leur haute honorabilité, ce scepticisme est nécessairement ébranlé. Le but à atteindre est d'un intérêt si considérable que nous n'avons pas besoin d'insister. En particulier, au point de vue des relations entre hommes de science des diverses nations, et des mathématiciens tout spécialement, une langue pratique internationale serait un incomparable bienfait et une source de progrès considérables.

La langue Esperanto remonte à plusieurs années, et compte 10.000 adhérents européens, surtout dans les pays russes et scandinaves, qui s'en servent, la lisent, l'écrivent et la parlent. Le manuel est traduit en dix-huit idiomes différents, et elle est enseignée dans quelques établissements, même en France.

Si quelque jour l'éminent professeur de la Faculté des sciences de Dijon jugeait à propos d'exposer dans un article ce qu'il a si bien dit dans sa conférence, en insistant un peu sur le côté pédagogique et scientifique de la question, il va sans dire que les colonnes de l'*Enseignement mathématique* lui seraient largement ouvertes.

L'Instruction mathématique en France.

Sous le titre « Mathematical Instruction in France », M. le professeur James Pierpont vient de publier, dans le Bulletin de l'*American Mathematical Society*, une substantielle étude d'environ 25 pages sur l'organisation de l'enseignement mathématique en France à ses divers degrés. Nous sommes heureux de voir suivre ainsi au dehors le programme que nous avons entrepris nous-mêmes. Quelque jour, nous espérons pouvoir traiter le même sujet ; mais nous ne nous plaignons pas d'avoir été devancés par notre distingué confrère, et nous l'en

remercions au contraire très cordialement. Nous aurions envers lui plus de reconnaissance encore, puisque les études de cette nature l'intéressent, s'il voulait bien nous donner un travail sur l'enseignement mathématique dans les Etats-Unis d'Amérique. Il peut être assuré que ce serait prodigieusement instructif et intéressant pour l'immense majorité des mathématiciens d'Europe.

Cours de vacances à Gœttingue.

Depuis plusieurs années déjà, il existe à l'Université de Gœttingue des cours de vacances spécialement destinés aux maîtres de sciences dans les gymnases et écoles réales de Prusse. Ces cours ont été organisés sous les auspices du ministre prussien de l'instruction publique et sous la direction de professeurs de l'Université, en particulier de M. le professeur F. Klein. Leur but est de maintenir le contact entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, ainsi que de donner aux maîtres secondaires l'occasion de se mettre au courant du mouvement scientifique actuel.

Les cours qui viennent d'avoir lieu à l'occasion des fêtes de Pâques ont été consacrés aux diverses parties des mathématiques qui rentrent dans l'enseignement secondaire. M. le professeur Klein a examiné la question dans son ensemble, puis en particulier pour la Mécanique. D'autres professeurs ont envisagé pour le même point de vue la Géodésie, la Géométrie descriptive, le calcul des assurances, certains chapitres d'Electricité, les machines à vapeur, etc.

De nombreuses démonstrations ont été faites dans les instituts de l'Université, ainsi que dans les fabriques et établissements industriels de Gœttingue.

Concours de l'Académie des Sciences de Madrid.

Le concours pour l'année 1897 de l'Académie des sciences de Madrid peut être considéré comme un événement ; l'Annuaire de 1900 en donne le compte rendu.

Il y a eu trois mémoires présentés ; ceux de MM. Gino Loria et F. Gomes Teixeira, dignes également du prix, ont amené, pour cette année, la décision extraordinaire d'accorder deux prix.

La thèse du concours était un *catalogue ordonné de courbes*. M. Gino Loria a présenté un développement sous ce titre : « Les courbes planes particulières algébriques et transcendantes. — Théorie et histoire. — Essai de la Géométrie comparée du plan ». Il contient un catalogue de plus de 450 courbes ; il passe sous silence les courbes gauches, parce qu'elles feront l'objet d'une prochaine publication sous le titre : « Les courbes gauches et les surfaces particulières algébriques et transcendantes. — Géométrie comparée dans l'espace ». M. Gomes Teixeira a

présenté un mémoire dont le titre est : « Géométrie des courbes notables » qui contient la description détaillée et méthodique de 140 courbes étudiées sous divers aspects et représentées dans un atlas composé de 15 planches.

Le troisième mémoire, écrit par l'architecte D. Joaquin Vargas y Aguirre, et inférieur aux deux premiers, a été considéré cependant comme digne d'un *accessit* ; ce travail dont l'étendue doit être restreinte pour la publication, d'après le jugement de l'Académie, est simplement un vocabulaire de Géométrie, non dépourvu de mérite, mais contenant des fautes qui en amoindrissent la valeur.

Un autre travail, présenté hors concours, en langue française et lithographié, est dû au très distingué géomètre M. H. Brocard ; il a pour titre : « *Vocabulaire des courbes géométriques et notes bibliographiques* », et répond parfaitement à la thèse du concours ; mais l'Académie, regrettant que l'auteur n'ait pas présenté son important travail dans les conditions demandées (ce qui du reste était reconnu par M. Brocard, et considérant la haute portée scientifique de cette étude, a décerné à l'auteur la distinction de correspondant étranger.

Université de Ieana.

L'Université de Iéana s'est conformée, l'une des premières, au nouveau plan d'études des candidats à l'enseignement secondaire supérieur en Prusse. Elle vient de créer une nouvelle chaire ordinaire de mathématiques et elle y a nommé M. A. Gutzmer, jusqu'ici professeur extraordinaire. En outre, afin de répondre aux exigences du brevet de capacité de l'enseignement des mathématiques appliquées, elle a transformé et développé le séminaire de mathématiques. Dès le semestre d'été les étudiants de cette section trouvent, spécialement à leur disposition, une salle d'étude et une salle de dessin. Les exercices de Géodésie ont été rattachés aux travaux pratiques faits à l'Observatoire. Nous ajouterons, d'autre part, que l'on examine en ce moment la création d'un institut consacré à la Physique et à la Mécanique techniques.

M. V. Liguine.

Au dernier moment, nous apprenons, par M. Vassilief, une bien triste nouvelle : celle de la mort de M. V. Liguine, de Varsovie. Non seulement nous avons à déplorer la perte d'un savant et d'un professeur remarquable, qui comptait, en France notamment, de nombreux amis ; mais, de plus, l'*Enseignement mathématique* ne peut oublier que M. V. Liguine fut l'un des premiers à l'honorer de son patronage. C'est donc une perte personnelle et cruelle pour nous.

Nous espérons pouvoir publier, dans l'un de nos prochains numéros, une notice documentée sur le savant qui vient de nous être enlevé.

CORRESPONDANCE

Paris, 15 avril 1900.

La Physique moléculaire et les mathématiques ont trop de points communs pour que j'hésite à vous faire part d'une observation qui vient de me frapper. Dans le journal l'*Intransigeant* portant la date du 10 avril, on trouve, sous forme de feuilleton et sous la signature *docteur Ox*, une « causerie scientifique » sur la sensibilité moléculaire des minéraux.

En tête de cette causerie figure une série de titres formant une sorte de sommaire, et parmi lesquels je trouve celui-ci : « Observations de lord Kelvin ET William Thomson. » Puis dans l'article lui-même, je lis : « CE SONT d'abord William Thompson ET lord Kelvin, etc. »

La collaboration de ces deux savants est d'autant plus intime qu'ils ne font qu'une seule et même personne. Tous ceux qui s'occupent de science dans la moindre mesure le savent. Mais n'est-il pas regrettable que de telles confusions se produisent dans des articles destinés à la grande masse des lecteurs, et qu'on les jette dans l'erreur sous prétexte de les instruire ? Partisan très résolu de la plus large diffusion scientifique, je vois avec regret compromettre par de semblables légèretés une cause excellente. Lorsqu'on écrit sur la science pour le peuple, c'est un peu comme lorsqu'on est chargé de former l'intelligence des enfants. Il y faut un soin et une conscience extrêmes, et un respect profond de son public ou de son auditoire. Si je me suis permis de vous signaler ce petit fait, entre mille, c'est que j'ai souvent remarqué la propension de certains écrivains, soi-disant scientifiques, à jeter au hasard dans le public des affirmations insuffisamment contrôlées, et que rien ne me semble plus funeste. Il est bien moins dangereux d'ignorer une chose que d'avoir sur cette chose des notions fausses, et de les croire vraies.

Veuillez, etc....

Dr M. HULMANN (Paris).

En Portugal, il ne se passe guère d'événements qui soient de nature à intéresser les mathématiciens des autres pays, et il n'y a pas là les éléments d'une correspondance régulière. Mais je ne manquerai pas,

lorsque l'occasion s'en présentera, de vous faire connaître tout ce qui me semblera intéressant. Pour aujourd'hui, je vous annonce que le Comité qui prépare la représentation du Portugal à l'Exposition universelle de Paris a fait préparer des mémoires où l'on trouve l'histoire et l'exposé de l'organisation actuelle de nos écoles ; en outre, il a fait établir un catalogue de tous les travaux concernant les mathématiques et publiés en Portugal pendant le XIX^e^ siècle. Chaque travail est accompagné d'un petit compte rendu, et les travaux sont classés d'après la méthode adoptée pour le Répertoire bibliographique des sciences mathématiques.

Veuillez, etc.... F. Gomes Teixeira (Porto).

Il s'est glissé une erreur dans l'article de M. L. Ripert : « L'infini en Géométrie élémentaire », paru dans le n° 2 de l'*Enseignement Mathématique*, 2^e^ année, p. 129.

Le point O' a pour limite, quand le rayon du cercle grandit indéfiniment, le point à l'infini sur la perpendiculaire à la droite $x'x$ menée par O. Il ne peut donc servir à définir le point à l'infini sur $x'x$.

On doit remarquer d'ailleurs que le cercle ne se confond pas avec la droite $x'x$ quand son rayon grandit indéfiniment ; *sa limite* se compose de *deux droites* : la droite $x'x$ et la droite de l'infini du plan considéré.

B. Niéwenglowski (Paris).

Bonn, 24 avril 1900.

Veuillez bien recevoir mes remercîments de ce que vous avez eu la bonté de me faire parvenir le n° 2, II^e^ année, de l'*Enseignement mathématique*. Permettez-moi en même temps de vous communiquer quelques additions relatives à l'index bibliographique, p. 97. Au n° 223, au lieu du titre incomplet, il faut lire : Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist.

Entre les n^os^ 223 et 224, il faut intercaler l'article : Entwickelung eines Zusammenhanges Zwischen den quadratischen Formen von n Differentialen und den *Abel*'schen Transcendenten. Crelle, 74, 1872.

Parmi les recherches de Riemann, on regrette de ne pas trouver le n° XXII de Riemanns mathematische Werke, herausgegeben von R. Dedekind und H. Weber, en 1876. Le dit n° XXII est intitulé : Comentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab III^a^ Academia Parisiensi propositae : « trouver etc. ». Le rapport qui existe entre ce travail avec les n^os^ 94 et 221 de l'index bibliographique est exposé dans le n° 228 de l'index.

Agréez, Monsieur, etc.

R. Lipschitz.

BIBLIOGRAPHIE

J. Riddel. — **Pratical plane and solid Geometry ;** un vol. in-8°, 327 p. ; prix : 2 s. ; Olivier and Boyd, Edinbourg 1899.

Le titre de ce petit livre reproduit textuellement celui d'une des branches du premier examen scientifique du *Science and Art Department*. Il n'y faut donc pas chercher autre chose que le développement de ce programme ; mais à ce titre il est intéressant pour tous ceux qui s'occupent de l'enseignement des éléments de la Géométrie, car il montre l'étendue du programme, et l'importance accordée en Angleterre aux exercices de construction à côté de l'étude de « l'Euclide », le livre classique des étudiants anglais.

L'enseignement de la Géométrie en effet ne doit pas avoir pour seul but de faire *comprendre* aux élèves un système logique, bien enchaîné, des vérités de cette science, tel que ceux qu'ont proposé Euclide, Petersen et tant d'autres. L'expérience prouve qu'en procédant ainsi on n'arrive pas à développer chez la moyenne des élèves cet *esprit géométrique* qui, en somme, à côté de quelques théorèmes fondamentaux, est le vrai bénéfice que l'on doive retirer de cette étude.

Il ne suffit pas non plus de *proposer* à la fin de chaque chapitre une série d'exercices ; il est nécessaire de mener l'élève par la main, pour ainsi dire, en lui *décrivant* en détail les constructions qui amènent la solution d'un problème, et en exigeant que ces constructions soient réellement *exécutées* sur le papier, et non pas « seulement avec la langue » selon la pittoresque expression de Steiner.

Ce n'est qu'après une longue série d'exercices de ce genre que l'étudiant prendra de l'intérêt à la chose, et deviendra le collaborateur du maître, au lieu d'en rester le perroquet ; il acquerra ce ton d'esprit particulier qui amène à savoir par quel bout il faut attaquer la difficulté, et prendre l'habitude si importante et si utile de faire devant chaque problème la revue de toutes les connaissances qu'il possède sur le sujet.

Dans une première partie de 139 pages, l'auteur résout par le menu, avec figure à l'appui, 138 problèmes répartis en onze paragraphes.

I Points, lignes et angles. II Angles et triangles. III Suite du II. IV Polygones et figures semblables. V Proportions et aires. VI Suite du V. VII Lignes et cercles. VIII Polygones inscrits et circonscrits. IX Ellipse, parabole et hyperbole. X Échelles. XI Arithmétique graphique.

Chacun de ces paragraphes est précédé du rappel des définitions et suivi d'exercices sans solutions. Les théorèmes sont donnés, sans démonstrations.

La deuxième partie (135 pages) contient 114 problèmes de Géométrie dans

l'espace, traités en détail par la méthode des projections orthogonales. En voici le sommaire :

I. Projections de points, lignes et solides.
II. Projections auxiliaires et leur emploi.
III. Plans, sections planes des solides.
IV. Plans, lignes et points.
V. Suite du IV. VI Rabattements.

Enfin un appendice de 14 pages donne environ 200 questions posées aux examens.

A noter, comme disposition typographique, qu'en haut de chaque page, et isolé du contexte par un filet, se trouve rappelé soit un théorème important, soit une règle de construction.

Nous avons remarqué, page 157, une définition fausse : « Un parallélépipède est un solide qui a six surfaces, toutes rectangles » ; comme exemple, l'auteur cite une boîte.

E. Steinmann (Genève).

A.-J. Pressland and Ch. Tweedie. — **Elementary Trigonometry ;** un vol. in-8°, 313 p. ; prix : 2 s. 6 d. ; Oliver and Boyd, Edinbourg, 1899.

Ce manuel de *Trigonométrie plane* contient l'ensemble des matières généralement traitées dans les ouvrages classiques. Il comprend deux parties. Dans la première viennent d'abord les définitions et les propriétés des rapports trigonométriques avec le théorème de l'addition et ses conséquences. Les auteurs ont adopté la méthode analytique basée sur la notion de projection généralement en usage dans les manuels français. Toutefois leur traité offre sur la plupart de ces derniers un sérieux avantage au point de vue pédagogique : les fonctions trigonométriques sont définies comme *rapports* et non comme *lignes* (1) ainsi qu'on le retrouve encore même dans les ouvrages les plus récents (1).

La première partie contient en outre les chapitres relatifs à la construction des tables trigonométriques, et aux logarithmes ; puis viennent les applications à la Géométrie du triangle et à la mesure des hauteurs et des distances.

La seconde partie, d'un caractère plutôt algébrique, est consacrée au problème de l'inversion, aux équations trigonométriques, aux notions élémentaires sur la théorie trigonométrique des imaginaires, et à la sommation de quelques séries trigonométriques.

Ces diverses notions sont présentées avec beaucoup de clarté et une grande simplicité dans la méthode. Ajoutons, pour terminer, que les auteurs ont eu soin d'accompagner chaque chapitre d'un grand nombre d'exercices et de problèmes fort bien gradués.

H. Fehr.

(1) La dénomination de *lignes trigonométriques* ne peut que fausser l'intelligence du sujet. Elle devrait être entièrement abandonnée. Les mots de *rapports* ou de *fonctions* trigonométriques sont suffisants.

Mme Clémence Royer. — **La constitution du monde. Dynamique des atomes.** — *Nouveaux principes de philosophie naturelle.* 1 vol. in-8°, 798 p., illustré de 29 fig. dans le texte et de 4 planches hors texte; prix, 15 fr. : Paris, Schleicher frères, 1900.

L'œuvre de Mme Clémence Royer est d'ampleur très large. C'est le fruit de longues et persévérantes méditations.

L'auteur ne se fait nul besoin, pour établir ses conclusions, ni du Calcul intégral, ni des autres formes de l'analyse Géométrique. Son argumentation a pour base les axiomes de la Géométrie élémentaire.

Après une préface d'une haute philosophie et une introduction où la richesse de l'érudition seconde admirablement un esprit de critique fort délié, *La Constitution du Monde* comprend huit parties distinctes.

L'étude des *faits-principes* occupe la première; celles des *phénomènes vibratoires*, des *corps solides*, des *corps liquides et gazeux*, du *processus vital*, de *la pesanteur*, de la *théorie des marées*, celle, enfin, de l'*évolution des mondes*, sont le sujet des sept autres.

En ces courtes lignes, ce n'est pas une analyse approfondie que nous pouvons avoir la prétention de faire des différentes thèses successivement soutenues par l'auteur. C'est simplement un rapide aperçu que nous nous proposons d'en donner.

Mme Clémence Royer bat en brèche beaucoup d'hypothèses en cours, et sur des problèmes plus ou moins obscurs et dont la solution est encore douteuse, elle propose des interprétations dont la vraisemblance le dispute à la nouveauté.

Dans la série des graves questions qui ont été l'objet de son étude, faisons choix des points fondamentaux, et opposons aux idées communément reçues les conclusions auxquelles ses patientes recherches l'ont conduite. Mieux que de longues discussions, un semblable parallèle sera propre à mettre en relief le cachet d'originalité de l'ouvrage.

La masse est, en général, considérée comme la mesure de la matière. La matière de l'atome serait donc considérée comme égale à sa masse et comme proportionnelle à son volume. Il s'en suivrait que la densité serait constante.

Pour Mme Clémence Royer, la masse est distincte de la matière considérée comme *substratum* du volume.

La matière — *substratum* de l'Atome — est inversement proportionnelle au cube de sa masse. Sa densité de masse est variable. Sa densité de substratum est constante sous les mêmes pressions et toutes choses égales d'ailleurs.

D'après les physiciens mécanistes, la matière est passive et inerte. Les forces qui la meuvent lui sont attelées comme des chevaux à un carrosse.

Selon l'auteur, la matière est active. Elle est le *substratum* de la force, ou l'agent dont la force est l'acte.

L'atome passe pour solide et de figure inaltérable. Les atomes solides et figurés s'agitent dans le vide.

L'atome, au sens de Mme Clémence Royer, est fluide et expansible. Il cherche à réaliser une sphère.

Les atomes se limitant les uns les autres par leur compression mutuelle,

ils ne réalisent que des polyèdres qui remplissent totalement l'espace. Le vide absolu n'existe pas.

On suppose que la vibration thermique est produite par l'oscillation des atomes dans le vide.

Pour Mme Clémence Royer, elle résulte des vibrations alternantes des ménisques sphériques que les atomes s'enlèvent mutuellement par la compression de leurs sphères virtuelles en polyèdres.

Nos théories actuelles sur la lumière tendent à expliquer sa transmission à travers les milieux diaphanes; mais n'abordent pas même le problème de l'état lumineux initial.

Selon Mme Cl. Royer, la vibration thermique devient lumineuse à partir du moment où la compression des atomes est asymétrique.

Elle rend compte, ainsi, du phénomène de la couleur, resté si mystérieux pour nos physiciens qu'ils en sont réduits à en supposer la subjectivité.

En réalité, le polyèdre atomique étant aplati suivant un de ses axes relativement à l'autre, les faces élargies qui subissent la compression *maximum* se colorent dans la gamme chaude, du blanc au noir par le jaune et le rouge; tandis que les faces rétrécies qui subissent la compression *minimum*, se colorent des nuances de la gamme froide du blanc au noir par le bleu et l'indigo.

Dans leur transmission à travers les corps diaphanes, la réunion de ces deux faisceaux de rayons donne le prisme complet, et par leur convergence donne de la lumière blanche.

La vibration sonore que l'on suppose se produire dans l'éther intermoléculaire, est au contraire pour Mme Clémence Royer, le produit des compressions et dilatations alternatives des molécules pesantes suivant leurs deux axes perpendiculaires de symétrie. C'est pourquoi elle n'existe pas dans l'éther pur dont les atomes ne sont pas groupés en molécules.

Quant à la nature des odeurs et des saveurs, attribuées jusqu'ici à des mouvements vibratoires sur le mécanisme desquels on n'est pas fixé, Mme Cl. Royer les considère comme l'effet des vibrations des plans de contact intermoléculaires, résultant des mouvements de rotation des molécules.

Pour la cellule organique, sur la genèse de laquelle on ne sait rien, selon l'auteur elle se constituerait autour d'une molécule gazeuse d'azote par la transformation d'atomes d'éther en atomes pesants, de sorte que la vie serait productrice de matière pesante.

A l'égard du grand problème de la gravitation, Mme Cl. Royer donne de la formule de Newton une traduction analytique démontrant que l'apparente attraction des masses est le résultat de causes thermiques.

Elle présente une nouvelle théorie des marées qui, faisant intervenir la déformation du noyau liquide de la terre, se trouve plus conforme aux faits observés dans l'établissement des ports.

Il résulte, enfin, de la théorie mécanique de la chaleur, telle qu'elle est sortie des travaux des Clausius et des Maxwell, que le monde devrait finir par le froid dans l'absolue immobilité.

D'après l'auteur de *La Constitution du Monde*, la température des corps sidéraux étant proportionnelle à leur masse et ces corps grossissant sans cesse par la chute de masses nouvelles, leur température s'élève progressivement au lieu de s'abaisser.

Toutes les planètes seraient, ainsi, condamnées à tomber dans leur soleil, suivant une courbe hélicoïdale, et chaque soleil, s'échauffant de plus en plus, finirait par passer à l'état gazeux et devenir une nébuleuse destinée à reproduire d'autres systèmes.

Qui contestera la haute portée philosophique d'une telle œuvre?

Les principes philosophiques de l'auteur s'affirment, du reste, en toute indépendance, dès les premières pages de sa préface.

Des lois logiques de l'entendement humain et de l'ensemble si rapidement croissant de nos connaissances, Mme Clémence Royer conclut qu'« il n'y a rien d'inconnaissable pour la raison que ce qui n'existe pas; et rien d'incompréhensible que la contradiction qui est l'impossible.

« Ce qui n'a pas d'existence, ajoute-t-elle, ne peut être objet de science. Ce que la science ne saura jamais, ce sont toutes les folles visions de l'imagination humaine cherchant à se représenter ce qu'elle ne sait pas encore; ce sont les rêves fantastiques du sommeil pris, durant le jour, pour des réalités; ce sont toutes les erreurs enfantées par le mensonge exploiteur de la crédulité. »

L'énervante et stérilisante doctrine de « l'inconnaissable » n'est à ses yeux rien de plus qu'une hypocrite et trompeuse tactique pour faire croire à l'infirmité radicale et à l'impuissance de la raison. « La certitude et l'évidence des relations mathématiques, voilà, dit-elle, la grande pierre d'achoppement des vieux dogmes. »

L'impatience des lisières dont certains prétendent entraver l'essor de l'intellect humain éclate. « D'où viennent, s'écrie-t-elle, ces doutes qu'on entretient sur sa puissance? Pourquoi serait-il condamné à ne jamais appréhender et connaître la nature des choses et l'enchaînement de leurs causes jusqu'à la cause perpétuelle et permanente qui est leur *substratum?* »

Et combien altière est sa réplique : « Chacun des progrès de la science la simplifie en classant les faits sous des lois de plus en plus larges. N'y a-t-il pas lieu de croire que la loi de ces lois, celle qui sera leur principe commun, sera aussi la simplification suprême de la science, puisqu'elle montrera tous les faits se déduisant d'un fait premier universel, évident comme un axiome? »

Si l'auteur de *La Constitution du Monde* n'a nullement la prétention d'avoir dit le dernier mot de tous les problèmes soulevés dans son ouvrage, il lui est légitimement permis d'espérer qu'il contribuera à faire progresser la science. Ce sont autant de jalons plantés sur une route nouvelle et destinés à servir de guide aux chercheurs.

Bref, l'œuvre de Mme Clémence Royer se lira, se méditera et nous ne sommes au bout ni des polémiques qu'elle suscitera, ni des idées neuves qu'elle fera naître.

Dr Collineau (Paris).

D. Cecilio Jimenez Rueda. — **Tratado de las formas geometricas de 2e categorie.**

M. Jimenez Rueda, professeur à l'Université de Valence, en s'inspirant surtout de la méthode de Staudt, a publié en 1898 la première partie de son ouvrage, qui contient indistinctement des propositions de Géométrie

plane et de l'espace, de Géométrie élémentaire et projective : il emploie aussi quelquefois comme instrument utile le rapport anharmonique et en outre il introduit quelques concepts de la Géométrie du triangle et des notions sur les Géométries non-euclidiennes de Lobatschewsky et Riemann.

Le deuxième fascicule, paru récemment, présente encore plus d'intérêt. Son objet est : « les coniques et surfaces du deuxième ordre ». Sans abandonner la prédominance de la méthode de Staudt, l'auteur emploie les relations métriques quand cela facilite l'exposition : les nombreuses figures donnent de la clarté au texte. Il faut remarquer le dernier chapitre qui contient des notions sur les lignes planes et les surfaces coniques d'ordres supérieurs.

R. Böger. — **Ebene Geometrie der Lage ;** un vol. in-8°, 289 p. ; prix : 5 Marks : t. VII de la *Collection Schubert* : Goeschen, Leipzig, 1900.

Rien ne saurait mieux confirmer les progrès réalisés par la pensée mathématique dans les domaines les plus divers que la publication de collections populaires d'œuvres mathématiques. La Maison Goeschen à Leipzig fait paraître actuellement deux collections de cette nature. L'une embrassera, entr'autres, les mathématiques, et comprendra, sous forme d'*abrégés*, une série de petits volumes vendus à un prix très modique (1 fr. le vol. relié). L'autre, dirigée par M. le professeur H. Schubert, se composera d'une série de *traités* établis sur des bases scientifiques tout en tenant compte des besoins de la pratique ; chaque volume sera rédigé de manière à pouvoir être consulté par les personnes non encore initiées à la branche traitée. Le présent ouvrage fait partie de cette dernière collection. Il est principalement consacré à la *théorie des Coniques*. Dans la première partie les coniques sont envisagées comme engendrées par une ponctuelle ou par un faisceau de rayon ; dans la seconde on les considère comme directrices (Ordnungscurve) d'un système polaire.

L'auteur a publié autrefois un mémoire (Ueber Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen, Hambourg, 1886) ayant pour objet la suppression de l'imaginaire en géométrie de position. A cet effet il généralise la notion employée par V. Staudt sous la dénomination de *Wurf*. A quatre points ABCD il fait correspondre de trois manières différentes trois couples de points. Deux de ces couples constituent ce qu'il appelle un *Wurf*. Il y a trois cas possibles : AB.CD ; AC.BD et AD.BC. Dans le second cas les couples sont séparés, c'est le système *elliptique* ; les deux autres systèmes AB.CD et AD.BC sont dits *hyperboliques*. On sait que deux couples de points déterminent une involution ; on distingue d'ordinaire le cas elliptique du cas hyperbolique. La notion d'éléments doubles conduit alors aux imaginaires : dans le cas d'une involution elliptique les éléments doubles sont imaginaires ; ils sont réels dans le cas d'une involution hyperbolique. M. Böger fait la distinction, dès le début, dans la définition du *Wurf* ; il ne parle des éléments doubles que dans le cas d'une involution hyperbolique et parvient ainsi à éviter l'introduction des imaginaires. L'auteur estime que cette notion n'est pas seulement inutile mais qu'elle est même nuisible. Etant donné qu'elle ne répond à aucune conception réelle, elle a pour effet d'obscurcir le sujet. Nous ne pouvons pas nous rallier à cette manière de voir. L'imaginaire repose sur une définition à l'aide de laquelle on opère

en géométrie comme avec les autres définis. Elle permet de faire une distinction très précise entre ce qui est concevable et ce qui ne l'est pas ; aussi apporte-t-elle de l'ordre dans la théorie sans l'obscurcir. Les théorèmes prennent une forme plus générale et peuvent être énoncés d'une manière beaucoup plus simple. Selon nous la notion des imaginaires ne doit pas être écartée des manuels ; c'est d'ailleurs l'opinion de V. Standt et de Reye : et nous ne croyons pas que par l'absence de la notion des imaginaires le livre de M. Böger ait atteint une plus grande clarté dans l'exposé.

L'auteur écarte également tout calcul et tout moyen auxiliaire emprunté à la planimétrie. « Mais, puisque l'exercice et l'étude relative à l'égalité et au parallélisme sont d'un grand secours : fournissent d'important notre faculté de conception des choses, » les conséquences planimétriques ont été traités dans des paragraphes marqués d'un astérisque. Cependant dans d'autres ouvrages, par exemple dans celui de Reye, les relations métriques sont examinées d'une manière très approfondie, et nous ne croyons pas que ces auteurs n'aient fait que suivre une mauvaise habitude. Il nous semble au contraire que cela tient à ce que ces considérations spéciales sont à la fois intéressantes et utiles. Tous ceux qui appliquent la géométrie de position au dessin savent qu'en général les constructions nécessitent les relations métriques qui dans l'ouvrage de M. Böger n'occupent qu'une place tout à fait secondaire.

Nous venons d'indiquer les points essentiels par lesquels cet ouvrage s'écarte des traités classiques (V. Standt et Reye). Dans leur ensemble les matières traitées sont celles que l'on trouve dans le premier volume de la géométrie de Reye. Quant à l'ordre adopté, M. Böger débute par les *figures perspectives* (homologiques). En procédant ainsi il donne satisfaction à tous ceux qui étudient cette branche dans ses relations avec la géométrie descriptive. A la perspectivité (homologie) se rattachent les figures harmoniques : viennent ensuite la projectivité (homographie), l'involution, les sections coniques, et les théorèmes de Pascal et de Brianchon. Puis l'auteur examine les propriétés projectives et involutoires des coniques et la théorie des pôles polaires. Les chapitres relatifs aux diamètres, aux foyers et au cercle de courbure donnent lieu à quelques considérations sur les relations métriques.

La seconde partie traite de la collinéation, de la réciprocité et des systèmes réciproques de plans en involution. Ces systèmes que l'auteur désigne sous le nom de champ polaire (*Potarfeld*) : font l'objet d'une étude très approfondie ; la conique joue le rôle de directrice (*Ordnungscurve*). A ces développements viennent se rattacher les considérations relatives au faisceau de champs polaires, et en particulier à deux champs polaires. D'autre part l'auteur étudie une certaine correspondance entre une ponctuelle et une série de points sur une conique ; il lui donne le nom d'involution du 3e ordre. Il examine enfin la construction la plus générale d'une conique à l'aide de cinq involutions ; il y parvient en envisageant chaque couple d'une involution polaire comme éléments doubles d'une nouvelle involution dite l'involution adjointe.

Les dénominations que l'on rencontre dans cet ouvrage s'écartent souvent des termes bien choisis que l'on emploie depuis longtemps en géométrie de position. On y trouve en outre beaucoup de définitions et d'expressions nouvelles qui pourraient avoir leur place dans un mémoire mais qui sem-

blent déplacées dans un manuel tel que celui-ci. Il en résulte que les questions d'un intérêt général ne prennent pas une forme plus simple que dans d'autres ouvrages. Nous croyons donc que cet ouvrage, écrit d'ailleurs sous une forme très claire, trouvera meilleur accueil dans les milieux scientifiques que chez les praticiens auxquels il était spécialement destiné.

Dr Christian Beyel (Zurich).

José Echegaray. — **Lecciones sobre resolucion de ecuaciones y teoria de ecuaciones.** Madrid, 1899.

L'apparition, chez nous, d'un ouvrage consacré à la théorie de Galois sur les équations peut être considérée comme un événement.

Dans l'enseignement de l'Algèbre nous sommes encore obstinés à suivre, presque sans y rien ajouter de nouveau, les doctrines classiques qui se terminent au célèbre théorème de Sturm ou au non moins célèbre théorème de Cauchy, si fondamental aujourd'hui dans les cours modernes d'Analyse.

M. Echegaray, en publiant ses remarquables leçons données à l'Athénée de Madrid, a donné un coup de bélier à notre routine invétérée qui résiste avec entêtement, dans nos établissements d'enseignement, à l'introduction des concepts combinatoires, presque restreints à présent à la théorie des déterminants et à quelques ébauches sur la théorie des congruences : nous ne nous inquiétons pas de la prépondérance des concepts d'ordre et de combinaison dans toutes les branches de la Mathématique.

M. Echegaray commence son exposition en montrant l'enchaînement des questions qui présentent de jour en jour une plus grande amplitude et exigent de nouveaux algorithmes pour aboutir aux solutions.

« Parler de la résolution des équations, dit-il, c'est parler de l'*infini*, parce qu'il existe des classes infinies d'équations, et nous ne pouvons en résoudre qu'un très petit nombre : il faut, pour le voir, combiner sous le signe d'une intégrale définie tous les signes algébriques qui nous sont connus. »

En passant de l'équation implicite à l'équation explicite, on augmente le *degré de sa transcendance ;* nous nous élevons ainsi, depuis les fractions, les quantités négatives, imaginaires, jusqu'aux fonctions elliptiques, etc.

Conduit au calcul symbolique, il donne une très élégante démonstration géométrique du principe fondamental des équations, et il établit d'abord les rapports entre les fonctions symétriques des racines d'une équation et ses coefficients. En présence de l'impossibilité de suivre une méthode synthétique, et à défaut d'une méthode générale, il poursuit la méthode analytique, se servant des exemples des équations des quatre premiers degrés, dans le but d'offrir une ébauche de ce que serait la méthode générale : il apprend à trouver la *résolvante*, et développe la théorie des substitutions, l'obtention de l'inconnue au moyen de la multiplication : la représentation analytique des substitutions est mise en lumière par de nombreux exemples, ainsi que l'étude des transpositions et des cycles, qui est rendue intuitive à l'aide de représentations graphiques ingénieuses, où l'on emploie des transversales comprises entre des parallèles : il fait voir que pour chaque cycle, la *transversale du produit est la résultante du produit des facteurs*, pour obtenir la substitution transformée par une autre. L'emploi du tableau que M. Echegaray appelle *de Cauchy*, et sa représentation symbolique, facilitent la

démonstration du théorème de Lagrange sur l'expression rationnelle d'une fonction par une autre quand son groupe contient le groupe de celle-ci, et l'étude successive des cas de la fonction symétrique d'une seule valeur, de celle qui en a 1, 2... n, de la fonction alterne, et de celle des trois valeurs, montre combien M. Echeragay prend de précautions pour dérober au commençant la difficulté des généralisations, par la décomposition graduelle des questions.

L'étude des *domaines* de rationalité dont l'amplification s'obtient à l'aide des quantités adjointes, qui facilite la décomposition d'une fonction en facteurs rationnels, précède immédiatement le théorème de Galois sur l'expression des racines de l'équation proposée en fonction rationnelle de celles de la résolvante ; ce théorème est en outre simplifié par l'emploi du tableau que M. Echegaray appelle *de Galois*, à cause de l'application continuelle qu'il en fait dans la suite de son exposition.

Des exemples faciles sur la réductibilité, par l'amplification du domaine de rationalité, des équations irréductibles, préparent à la connaissance de ce qui est essentiel dans la méthode de Galois, c'est-à-dire à l'abaissement du degré de la résolvante ; l'étude du groupe caractéristique de toute équation, motive un judicieux examen des conclusions de M. Picard, publiées dans le troisième volume de son *Traité d'Analyse*, et provoque des observations lumineuses de M. Echegaray ; la distinction entre l'invariabilité de forme, et celle de la valeur numérique des fonctions est très intéressante. *Parfois, la valeur numérique d'une fonction ne change pas, malgré le changement de forme*, ce qui arrive quand il existe des liaisons entre ses racines, circonstance très consciencieusement observée par M. Picard et aussi par M. Echegaray dans la suite de son ouvrage, dont le premier volume se termine par l'établissement de la réciprocité de deux des concepts : *domaine de rationalité*, *invariabilité*, et *groupe de l'équation*, par rapport au troisième.

L'objet prédominant des premiers cahiers parus du deuxième volume est l'*invariabilité de la valeur numérique* des fonctions : l'auteur donne une grande importance au théorème de M. Picard sur le cas d'existence d'une relation rationelle entre les racines d'une équation, qui facilite la réduction des théorèmes relatifs à l'invariabilité de forme, à ceux concernant l'invariabilité numérique.

Il est à espérer que le deuxième volume, destiné tout entier à la théorie de Galois, augmentera l'intérêt du lecteur déjà familiarisé avec le style toujours attrayant de M. Echegaray.

Z. G. de Galdeano (Saragosse).

C. Burali-Forti. — **Les propriétés formales des opérations algébriques** ; in-8°, 40 p. ; Turin, G. Gallizio, 1900.

Cette brochure est extraite de la *Revue de mathématiques*. Elle renferme d'excellentes idées, dont plusieurs pourront profiter à l'enseignement. Malheureusement, les symboles dont l'auteur fait usage n'ont pas encore pénétré dans le public mathématique. Ce sont ceux que M. le Professeur Peano s'efforce de propager depuis plusieurs années avec beaucoup de persistance et beaucoup de talent ; il faut avouer cependant que cette sorte de langue nouvelle n'est pas exempte de difficultés, devant lesquelles plus d'un mathématicien recule. Et puis, progressivement, les symboles augmentent en nombre

et se compliquent. M. Burali-Forti nous en fournit une nouvelle preuve dans sa brochure. Ce sont là, malgré tout, des tentatives auxquelles il faut applaudir et qu'il serait absurde de dédaigner. Nous espérons que nous aurons occasion de revenir prochainement sur ce sujet, à propos du *Formulaire mathématique* de M. Peano.

HEINRICH BURKHARDT. — **Elliptische Functionem.** 1 vol. in-8° de x-175 p. Prix : 12 fr. 50. Leipzig. Verlag von Veit und Comp., 1899.

Voici la seconde partie[1] des « Leçons sur la théorie des fonctions » de M. BURKHARDT, professeur ordinaire à l'Université de Zurich. Ce volume, très bien accueilli en Allemagne et qui nous paraît à tous les égards mériter l'attention du public mathématique, renferme, en 350 pages, un exposé précis et complet de la théorie des fonctions elliptiques,

L'ouvrage est surtout intéressant par sa tendance. Jusqu'ici les méthodes de Riemann n'avaient été que peu ou pas employées dans les exposés élémentaires. Dans ce manuel, au contraire, les belles conceptions de ce géomètre occupent la place d'honneur, autour de laquelle viennent se grouper les branches diverses de la théorie. L'auteur ne néglige point pour cela les méthodes si rigoureuses de Weierstrass, il les emploie très souvent et avec avantage. Loin du reste de s'exclure, les méthodes des deux illustres géomètres se complètent admirablement, et l'on peut bien dire que l'ouvrage de M. Burkhardt en est une heureuse synthèse.

M. Burkhardt semblait appelé à l'écrire. Parmi les jeunes mathématiciens allemands, l'un des plus distingués, il fut mis au courant des théories de Weierstrass par M. Schwarz, tandis qu'à l'école de Goettingue, si brillamment dirigée par M. Klein, il fut en contact avec l'esprit de Riemann toujours vivant dans la savante petite ville.

Nous pouvons diviser l'ouvrage en trois parties. La première, comprenant les six premiers chapitres, renferme l'étude des trois espèces de fonctions elliptiques, des intégrales elliptiques et du problème d'inversion : la seconde, les chapitres VII à XIII, traite des transformations et de l'emploi des fonctions elliptiques ; la troisième et dernière se rapporte à des applications.

Les fonctions elliptiques prises comme fonctions fondamentales sont celles des Weierstrass, les notations adoptées, de même, à une exception près. MM. Tannery et Molk, M. Study et après eux, M. Burkhardt désignent par ω^2 l'expression $-(\omega^1+\omega^3)$ et non pas $\omega^1+\omega^3$, comme le fait Weierstrass.

Prenant comme point de départ les intégrales elliptiques et les envisageant comme intégrales de certaines fonctions algébriques, l'auteur étudie d'abord la surface de Riemann correspondante. Puis il cherche une variable dite « uniformisante », au moyen de laquelle ces fonctions deviennent uniformes : les intégrales elliptiques deviendront ainsi des intégrales de fonctions uniformes. Cette variable « uniformisante » n'est autre que l'intégrale elliptique de première espèce. Toute fonction algébrique de la surface est alors fonction uniforme doublement périodique de cette variable et réciproquement. Il s'établit ainsi un parallélisme entre la théorie des fonctions elliptiques et

[1] Voir dans l'*Enseignement mathématique*, 1re année, p. 368 l'analyse de la première partie.

celle des fonctions algébriques. Par exemple, au théorème sur la somme des zéros et des pôles dans un parallélogramme des périodes, au théorème d'Hermite sur les fonctions de Jacobi correspondent respectivement les théorèmes d'Abel et de Riemann-Roch lorsqu'on les applique aux fonctions algébriques de genre un.

Tel est, rapidement esquissé, le point central de la première partie.

Dans la seconde partie, M. Burkhardt examine tout d'abord et à deux points de vue différents, les transformations linéaires, la dégénérescence et les cas de réalité des fonctions elliptiques en considérant tantôt le parallélogramme des périodes de la fonction, tantôt la surface de Riemann correspondante. Il fait voir, par exemple, comment peut s'obtenir chaque transformation linéaire soit par modification des coupures, soit par « monodromie des points de ramification » sur la surface de Riemann. Passant ensuite aux éléments de la théorie des fonctions modulaires et aux transformations d'ordre supérieur, l'auteur nous donne l'essentiel des théories générales, tandis qu'il traite très complètement les cas élémentaires, afin de les utiliser dans un chapitre spécial (XIII) : Calcul numérique des fonctions elliptiques. Ce chapitre, le plus souvent laissé de côté dans les autres traités, est au contraire la conclusion bien comprise de cette seconde partie ; l'auteur nous montre comment, dans la résolution numérique de questions renfermant des fonctions ou des intégrales elliptiques, les théories précédentes sont à appliquer dans chaque cas, afin d'obtenir les résultats avec le moins de calcul possible et avec toute l'approximation désirée.

Les applications de la troisième partie portent sur les courbes elliptiques, planes et gauches, sur les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions elliptiques, en particulier l'équation de Lamé, et enfin sur le pendule sphérique qui donne l'occasion d'appliquer les cas de dégénérescence.

Ce livre si instructif, quelquefois un peu concis quoique très clair, et renfermant malheureusement maintes fautes typographiques, ne sera pas seulement le bienvenu parmi les étudiants, tous ceux qui s'intéressent à cette théorie ou qui sont appelés à l'enseigner y trouveront des vues originales et des démonstrations souvent remarquables par leur simplicité ou leur élégance.

Dr C. Jaccottet (Lausanne).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences; t. CXXX : Paris, Gauthier-Villars, 1900.

N° 10 (5 mars). — J. Collet : Nouvelles déterminations de la pesanteur. — Ernest Pascal : Sur une théorie des systèmes d'équations aux différentielles totales du second ordre.

N° 11 (12 mars). — Maurice Lévy : Notice sur les travaux d'Eugène Beltrami. — A. Davidoglon : Sur une application de la méthode des approximations successives. — J. Le Roux : Sur l'intégration des équations linéaires à discriminant non nul. — H. Padé : Sur l'extension des propriétés des réduites d'une fonction aux fractions d'interpolation de Cauchy. — Rateau : Théories des hélices propulsives.

N° 12 (19 mars). — J. Coulon : Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre linéaire et à coefficients constants. — P. Painlevé : Sur les systèmes différentiels à points critiques fixes.

N° 13 (26 mars). — A. Demoulin : Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont égales. — W. Stekloff : Remarque relative à une note de M. A. Karu « Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. »

N° 14 (2 avril). — P. Appell : Rapport sur un mémoire de M. Tarres, intitulé « machines à calculer ». — Grisey : Remarque sur le critérium de Tisserand. — P. Painlevé : Sur les équations différentielles du troisième ordre à points critiques fixes. — J. Le Roux : Sur une inversion d'intégrale double. — Michel : Sur les applications géométriques du théorème d'Abel. — G. Meslin : Sur une machine à résoudre les équations.

N° 15 (9 Avril). — Funérailles de M. J. Bertrand : Discours prononcés par MM. Jules Lemaitre, Mourier Léon, Berthelot, G. Darboux, A. Cornu, Duclaux, Gaston Paris, Georges Perrot. — J. Clairin : Sur certaines équations de Monge-Ampère. — Desaint : Sur la représentation géométrique des fonctions analytiques quelconques.

N° 16 (17 Avril). — L. Creus : Sur ma formule simplifiée pour le calcul des réfractions astronomiques. — E. Borel : Sur les séries de fractions rationnelles. — J. Coulon : Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles et le principe d'Huyghens. — H. Bénard : Mouvements tourbillonnaires à structure cellulaire ; étude optique de la surface libre.

N° 17 (23 avril). — E. Picard : Sur les équations linéaires aux divisions partielles du second ordre et sur la généralisation du problème de Dirichlet. — Vallier : Sur le tracé des rayons dans les bouches à feu. — Gelly : Sur les termes complémentaires du critérium de Tisserand. — E. Painlevé : Sur les équations différentielles d'ordre quelconque à points critiques fixes. — E. Borel : Sur la généralisation du prolongement analytique. — A. Witz : Le cycle théorique des moteurs à gaz à explosion.

Acta mathematica, journal rédigé par G. Mittag-Leffler; t. XXIII. Stockholm, Beijer, 1899.

Nos 1 et 2 (31 décembre). — I. Fredholm : Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique. — G. Mittag-Leffler : Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (première note). — L. Koenigsberger : Sur les principes de la mécanique ; extrait d'une lettre adressée à l'éditeur (trad. par L. Longel). — J. Petersen : Quelques remarques sur les fonctions entières. — K. T. Vahlen : Ueber Fundamental systeme für symmetrische Functionem. — G. Hessenberg : Ueber die Invarianten linearer und quadratischer binarei Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flachen. — J. Horn : Uber die irregularen Integrale der linearen Differential gleichungen zweiter Ordung mit rationalen Coefficienten.

Annales de la faculté des sciences de l'Université de Toulouse; 2e série, t. I. Paris, Gauthier-Villars; Toulouse, Ed. Privat, 1899.

3e fasc. — E. Cotton : Sur les variétés à trois dimensions. — E. Goursat : Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre (2e mémoire). — H. Bourget : Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes.

Annales de la Faculté des sciences de l'Université de Toulouse; 2e série, t. II; Paris, Gauthier-Villars; Toulouse, Ed. Privat, 1900.

1er fasc. — H. Bouasse : Sur les courbes de déformation des fils. — E. Delassus : Sur la méthode de Cremona pour déterminer les tensions dans les systèmes articulés. — V. Rouquet : Etude d'une classe de surfaces réglées. — P. Duhem : Sur un point du calcul des variations.

Giornale di matematiche di Battaglini, dirigé par A. Capelli; vol. XXXVIII. 1900; Naples, B. Pellerono.

Janvier-Février. — G. A. Maggi : Sulla teoria del Pendolo. — P. Ripa : Il problema della divisione della lemniscata. — F. Porro : Sul movimento non porturbato di un pianeta intorno al Iole. — Guido del Prete : Le omographie e correlazioni permutabili fra di loro in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. — G. A. Miller : On the transitive substitutions Groups which are isomorphic to a given Group.

Revista de Ciencias, publicacion periodica redactada por profesores de la Facultad de Ciencias y de la Escuela de Ingenieros; t. I et II, in-8°; Lima, 1898-1899.

Dans cette publication, récente comme on le voit, les mathématiques tiennent une place assez importante. C'est surtout M. F. Villarese qui les représente : nous trouvons de lui des études sur les carrés magiques et diaboliques, la théorie des nombres, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle, les géométries imaginaires ou non euclidiennes, et sur des questions de combinaisons. Il nous semble du reste qu'il y a là l'indice d'un réveil scientifique des populations latines de l'Amérique du sud, qui, notamment au point de vue mathématique, pourraient produire beaucoup plus qu'elles ne le font.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert : 24e année, 1899-1900 : prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. : Etranger, 6 fr. ; Paris, Nony.

L'Education mathématique, journal publié par Ch. Bioche et H. Vuibert : 2e année, 1899-1900 : prix d'abonnement annuel : France, 5 fr. ; Etranger, 6 fr. : Paris, Nony.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par E. Humbert et G. Papelier : 10e année, 1899-1900 : prix d'abonnement annuel : France, 8 fr. ; Etranger, 9 fr. : Paris, Nony.

Revue scientifique, paraissant le samedi ; directeur, Ch. Richet : 4e série, t. 13 ; prix d'abonnement annuel : Paris, 25 fr. : départements, 30 fr. ; Union postale, 35 fr. : Paris, 19, rue des Saints Pères, 1900

A signaler, dans le n° 3 : Vie et travaux de Félix Tisserand, par J. Bertrand.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, dirigé par A. Conti, journal gr. in-8°, paraissant deux fois par mois ; prix d'abonnement semestriel, 2 L. : 1re année, 1899-1900 ; Bologne, Zonichelli.

Ce nouveau recueil est spécialement destiné aux maîtres des écoles élémentaires et aux élèves des écoles normales. Publié depuis décembre 1899, l'ensemble de ses numéros forme déjà une collection des plus intéressantes, surtout au point de vue de l'enseignement. Nous y relevons notamment de nombreux articles de M. le professeur A. Conti lui-même ; puis les noms de MM. del Prete, Buzzi, Scoto, Neri, Garbieri, Ciamberlini, Bettazzi, etc., traitant de questions variées touchant à l'enseignement ou à l'histoire de la science. C'est bien sincèrement que nous souhaitons la bienvenue à ce nouveau confrère. Il mérite le succès ; nous le lui souhaitons, et nous y croyons.

Journal de mathématiques spéciales, publié par G. Mariaud ; 25e année, 1899-1900 : prix d'abonnement annuel : Paris, 8 fr. ; départements, 9 fr. : Paris, Ch. Delagrave.

Journal de mathématiques élémentaires, publié par G. Mariaud : 25e année, 1899-1900 : prix d'abonnement annuel : Paris, 6 fr. ; départements, 7 fr. ; Paris, Ch. Delagrave.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, im Auftrage des Vorstandes bisher herausgegeben von G. Cantor, W. Dyck, A. Gutzmer, G. Hauck, E. Lampe, A. Wangerin, tomes I à VII, un volume gr. in-8°, par année, Teubner, Leipzig.

L'association des mathématiciens allemands fondée il y a seulement dix ans compte aujourd'hui plus de 550 membres. Elle publie un bulletin contenant, outre les communications présentées aux réunions annuelles de la Société des articles généraux sur l'état actuel de telle ou telle branche de la science mathématique. Il est inutile d'insister sur la haute valeur scientifique de ces études historiques et critiques et sur les services qu'elles sont appelées à rendre.

Voici la liste des mémoires généraux contenus dans les sept volumes parus :

T. I. — W. Franz Meyer : Die Fortschritte der projectivers Invariantentheorie in letzten Vierteljahrhundert 1892. (Traduit en français par H. Fehr, *Bull. Darboux*, 1895 à 1896, tirage à part, Gauthier-Villars, Paris ; traduit en italien par G. Vivanti, Naples, 1889.

T. II. — Fr. Kötter : Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, 1893.

T. III. — A. Brill und M. Noether : Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, 1894. — L. Henneberg : Ueber die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke, 1895.

T. IV. — D. Hilbert : Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897.

T. V. — E. Kötter : Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, 1898.

T. VI. — G. Bohlmann : Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit, 1899. — S. Finsterwalder : 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, 1899. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation, 1899.

T. VII. — E. Czuber : die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihre Anwendungen, 1899.

Sont en préparation les travaux suivants :

R. Haussner : Numerische Auflösung von Gleichungen. — A. Kneser Bericht über die Variationsrechnung. — E. Kötter : Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II. — G. Kowalewski, G. Scheffers, F. Schur : Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie. — R. Mehmke : Bericht über die graphischen Methoden. — Müller-Breslau : Ueber die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Baukonstruktionen. — L. Schlesinger : Ueber die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen. — P. Stäckel : Ueber die allgemeine Dynamik. — E. Steinitz : Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Le premier fascicule du t. *VIII.* vient de paraître : il contient divers articles nécrologiques avec portraits la chronique de la réunion de Munich et les mémoires qui y ont été présentés :

Boltzmann, L. : über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. — Weber, H. : Wirkung der neuen preufsischen Prüfungsordnung für Lehramtscandidaten auf den Universitätsunterricht. — Haugk, G. : Correferat. — Klein, F. : Bemerkungen zu den vorstehenden Referaten. — Krazer, A : über den Unterricht in der darstellenden Geometrie an der Universität Strafsburg. — Study, E. : einige Bemerkungen zu der neuen preufs. Prüfungsordnung. — Berichte und Discussion über die Decimalteilung der Winkel- und Zeitgröfsen. (Von Mehmke: Bauschinger, Schülke u. A.) — Noether, M. : üb. Riemann's Vorles. v. 1861 — 62 üb. Abel'sche Functionen. — Gordan, P. : über die symmetrischen Functionen., ——, über homogene Functionen. — Hilbert, D. : über das Dirichletsche Princip., ——, über den Zahlbegriff. — Sommerfeld A. : Bemerkungen zur Variationsrechnung. — Sommer, J. : über Eigenschaften quadratischer Mannigfaltigkeiten in höheren Räumen. — Engel, Fr. : zwei merkwürdige Gruppen des Raums von fünf Dimensionen. — Zindler, K. : über Complexcurven und ein Theorem von Lie. — Doehlemann, K. : über hyperboloidische Gerade. — Brill : über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zur Mechanik von Hertz. — Study, E. : die Geometrie der Dynamen. —

Schimpf, E. : Einführung eines Mafses der Convergenz in die Lehre von der Convergenz der unendlichen Processe. — Lerch, M. : Arithmetisches über unendliche Reihen. — Horn, J. : divergente Reihen in der Theorie der Differentialgleichungen. — Weber, E. v. : eine fundamentale Classification der Differentialprobleme. — Hensel, K. : über die analytisch-arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Variablen.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser : 25e année, 1900. Alf. Hölder, Vienne.

N° 1. — E. Czuber : Augenaudli Marhemank alo Gegenstand der Lehranits pr.fung. — A. Vital : Usber eine Methode der Berechnung einer Logarithmen-Tapel auf elementarem Wige.

N° 2. — H. Januschke : Zur elementaren Gezeitentheorie. — J. Sterba : Erwiderung auf obligen Artikel. — H. Janushke : Ueber die Concentration des technischen Unterrichtes.

N° 3. — Al. Pichler : Ueber die arithmetischen Reihen, welche sich durch addition und multiplication reproducieren.

N° 4. — E. Czuber : Zur Theric der reellen Zahlen.

Paedagogisches Archiv, herausgegeben von professeur G. Dahn, 42e année, nos 3 et 4, 1900, Dürr, Leipzig.

El Progreso Matematico, rivista de Matematicas puras et aplicadas ; directeur D. Zoel G. de Galdeano, série 2a, ano II, Zaragoza, 1900.

N° 7. — Métrica aninvolutiva, por M. G. Fontené. — Remarque sur une formule de M. Pirondini, par le Dr N.-Y. Hatzidakis. — Remarque sur un déterminant spécial, par G. Vivanti. — Ecuacion del circulo de Joachimsthal, por D. Rodolpho Guimarais. — Sobre la fórmula de Wallis, por M. A. Aubry. — La Matematica y su enseñanza, por el Sr. Galdeano. — La moderna organizacion de la Matematica, por el Sr. Galdeano.

N° 8. — Etude élémentaire sur la théorie des maxima et minima, por M. A. Aubry. — La Matematica y su enseñanza, por el S. Galdeano. — A propos d'une formule relative aux lignes, par M. Pirondini. — La moderna organizacion de la Matemática, por el Sr. Galdeano. — Programa de premios para el Concurso del 1901, de la Real Academia de Ciencias de Madrid.

N° 9. — Métrica aninvolutiva, por M. G. Fontané. — Nota acerca de un punto del plano de un triangulo, por D. Augusto Krahe. — Suma de los reciprocos de todos los divisores de un número, por D. Elias Hernandez. — Correspondencia, por M. V. Retali y H. Brocárd. — Sobre el punto de Gergonne de las cónicas inscritas en un triángulo, por Don A. Krahe. — Area del dodecàgono regular, por M. H. Brocard.

N° 10. — Notas matemàticas, por D. Juan J. Duran Loriga. — Sulla quistione 264, por M. V. Retali — Correspondencia, por M. V. Retali y H. Brocard. — Sobre la serie $\Sigma \frac{1}{\log. n}$, por D. Enrik Petrini en Upsala, — Producto de una serie cualquiera por la exponencial e^{-r}, por D. C. Alasia (Tempio).

Wiadomosci Matematyczne. Redactor i Wydawca S. Dickstein. t. IV. fasc. 1, 2, 3 ; 1900. J. S. Korskiego, Warszzana.

Zeitschr. für math u. naturw. Unterricht, herausgegeben von F. C. V. Hoffmann ; 31e année 1900, Teubner, Leipzig. N° 2. — F. Diekmann : Zur Lehre von den kubischen Gleichungen. — Kleinere Mitheilungen. — Litterasche Berichte. — Paedagogische Zeitung.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira : vol. XIV, 1900. Imprensa da Universidade, Coimbra. N° 1. — G. Teixeira : Notica, biographica sobre F. da Ponte Horta. — O. d'Alincar Silva : De l'action d'une force accélératrice sur la propagation du son.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo ; t. XIV, 1900.

Fasc., 1, 2 (Janvier, février, mars, avril). — Appell : Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal ; cas particulier du cerceau. — Korteweg : Extrait d'une lettre à M. Appell. — Pizzetti : Sulla correcione da fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livell del mare. — Ciani : Un teorema sopra il covariante *S* della quartica piana. — Petrovitch : Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationnelles de la fonction exponentielle. — Petrovitch : Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre. — De Franchis : Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo. — Gerbaldi : Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane (Parte seconda).

Ett. Bortolotti. — **Nozioni pratiche di géometria** per le Smole complemantari. 1 vol. in-8°, 140 p. : prix : 1 fr. 75 ; Società Editrice Dante Alighieri, Roma 1900.

G. Nunez. — **Tratado completo de matématicas**. Cuaderno 1° : Opéraciones fundamentales con números, enteros. 1 vol. in-8°, 82 p. : prix : 2 fr. 50 pesetas. Libreria de Fernando Fé, Madrid, 1900.

Dr Em. Haentzschel. — **Ueber die verschiedenen Grimdlegungen in der Trigonometrie**. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Kolhnischen Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1900. 1 broch. in-8° 31 p. : R. Gaertner, Berlin.

A. Conti. — **Elementi di aritmetica razionale** ; parte primo : in-12, 304 p. : prix 2 L., 40 : Bologne, Zanichelli, 1900.

A. Conti. — **Problemi di 3° grado : duplicazione del cubo ; trirezione dell'angolo** ; gr. in-8°, 56 p. 3 planches : Bologne, Zanichelli, 1900.

Le Gérant : C. NAUD.

EVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HERISSEY

LE DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE

DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

EN ALLEMAGNE

Pendant le Moyen Age l'enseignement scientifique a été essentiellement le même dans tous les pays cultivés de l'Europe ; à cet égard l'Allemagne présente à peine quelque trait distinctif (1). En général on s'en tint scrupuleusement à l'exemple classique de l'antiquité, dont en réalité on ne connaissait que fort peu de chose. Ce sont précisément les œuvres mathématiques remarquables des anciens qui ont été connues relativement tard dans l'Occident, et elles n'ont alors été comprises que par un très petit nombre. On considérait comme de vrais modèles quelques écrits des derniers temps impériaux et de la période qui suivit : Marcianus Capella, Boethius, Cassiodorius avaient livré les traités qui furent toujours lus et commentés, et sur lesquels on controversa ; l'idée que la science eût le devoir de dépasser ces maigres commencements n'atteignait même pas des esprits élevés qui s'estimaient complètement satisfaits lorsqu'ils réussissaient à travailler à fond un grand nombre de ces œuvres, cependant difficiles à se procurer à cette époque. La gent étudiante, elle aussi n'était stimulée d'aucune manière à trouver du nouveau, chose qui paraissait impossible, ou à améliorer ce qu'on lui avait transmis, ce qui eut été un crime aux yeux de la majorité.

(1) Les ouvrages suivants font autorité en ce qui concerne la partie principale de cet exposé : Günther, *Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis 1525*, Berlin, 1887 ; M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1er volume, Leipzig, 1894 ; Specht, *Geschichte des Unterrichtswesens in Deutschland von den ältesten Zeiten bis zur Mitte des XIII Jahrhunderts*, Stuttgart, 1885.

C'est ainsi que nous constatons que partout et à tous les degrés, l'enseignement suivit toujours le même sentier battu.

On avait hérité des maîtres romains la répartition des connaissances de l'époque, soit dans le *Trivium* (*Artes literales*), soit dans le *Quadrivium* qui comprenait les *Artes reales* : au premier appartenaient, si nous conservons l'ordre didactique usité, la Grammaire, la Dialectique, et la Rhétorique ; par contre l'Arithmétique, la Musique (1), la Géométrie et l'Astronomie représentaient les éléments du Quadrivium. Rien d'essentiel n'a été changé à cette classification ancienne jusqu'au XVI^e^ siècle. Si nous négligeons les inexacts et rares renseignements des temps anciens, ce n'est qu'à l'époque de Charlemagne que nous rencontrons un certain mouvement dans le domaine pédagogique. L'Anglo-Saxon Alcuin, l'ami du grand roi, établit, sur l'ordre de celui-ci, l'école du Palais d'Aix, école bien connue, destinée à la formation de fonctionnaires ; le programme était tout à fait conforme à celui des institutions anglaises. Beda Venerabilis, qui mourut dans l'année de naissance d'Alcuin (735), avait fondé l'instruction de la principale île anglaise sur une base solide, et avait, en particulier, pris un soin zélé de l'enseignement des mathématiques, de sorte que l'instruction publique, dans le royaume franc, fut soumise à de bonnes règles (2). Nous pouvons être surs qu'Alcuin ne se borna pas à des leçons théoriques, mais qu'il estima beaucoup certains exercices d'esprit dont l'admission dans le programme d'études signifiait toujours un progrès en dehors des limites consacrées par la tradition (3).

---

(1) A propos de cette branche de la science, dont le côté mathématique est aujourd'hui presque tombé dans l'oubli, nous nous en rapportons aux développements que contient le premier ouvrage indiqué ci-dessus (p. 110 et ss.). A l'origine, dans Boëthius, dont l'essai systématique n'est pas sans mérite, la « musique » a peu de rapport avec ce que nous comprenons à présent sous ce nom ; ce n'est pas autre chose qu'une théorie arithmétique des intervalles de tons. L'exposition des lois était accompagnée de mesures sur le monocorde, instrument remontant soi-disant aux Pythagoriciens et qui permettait de fixer expérimentalement les relations qui existent entre la longueur des cordes, leur tension et le ton. Pour le musicien, le chant et l'harmonie d'un instrument étaient des compléments agréables, mais dont on pouvait se dispenser (V. AMBROS, *Geschichte der Musik*, 2^e^ volume, Breslau, 1864, p. 119 et ss.).

(2) Les conditions de l'école supérieure sont décrites à fond par EBERT, *Allgemeine Geschichte der Litteratur des Mittelalters im Abendlande*, 2^e^ volume, Leipzig, 1880, p. 7 et ss.

(3) L'ouvrage d'Alcuin, dont il s'agit, portait le titre de « *Propositiones ad acuen-*

La résolution des énigmes fut conduite d'après un plan fixe, et une partie des énigmes proposées portent un déguisement plus ou moins mathématique. Il semble même, qu'à une époque postérieure, le maître posait, de-ci de-là, de telles questions amusantes et par leur discussion rompait en quelque sorte la monotonie de l'enseignement habituel [1]. Sans parler de la gymnastique intellectuelle, l'élève apprenait bien des choses que le menu ordinaire ne lui aurait pas fourni l'occasion de connaître.

L'Ecole du Palais ne dura que quelques dizaines d'années et plus tard ce n'est que temporairement, cette fois encore, qu'une semblable école subsista à la Cour de l'empereur saxon. Pendant le long intervalle de temps qui sépare les Carlovingiens de la fondation d'écoles supérieures sur le sol allemand, il n'y eut que les écoles religieuses, c'est-à dire les écoles des couvents et celles des chapitres dans lesquelles de jeunes gens purent s'assimiler une science un peu supérieure ; les écoles de filles étaient très peu nombreuses et ne fournissaient que les éléments les plus rudimentaires de l'instruction populaire. Surveillées par des abbés et des évêques, ces écoles religieuses cherchaient toujours un savant éminent comme *Scholasticus* ; il n'y avait alors que dans les couvents et les cathédrales que l'on trouvait de grandes collections de livres, et c'est ainsi que dans ces institutions religieuses, séparées du monde, se développa souvent une vie scientifique très active.

Saint-Gall, Reichenau, Fulda, Hersfeld, Benediktbeuren, Tegernsee d'un côté ; Mayence, Worms, Cologne, Trèves, Würzbourg, Bamberg, Hildesheim, Münster en W., de l'autre, méritent ici une mention élogieuse. Quoique nous ne puissions pas nous représenter les détails de la marche de l'enseignement, nous ne manquons cependant pas de points de repère et la mesure des connaissances mathématiques qu'un élève des cou-

---

dos juvenes » ; son authenticité n'est pas attestée très expressément d'après Cantor (1er volume, p. 715 et ss.), mais elle est très probable. Il est mis hors de doute, par un passage d'une correspondance, que l'auteur aimait beaucoup les énigmes.

[1] Des exemples en sont fournis par HAGEN, *Antike und mittelalterliche Rätselpoesie*, Biel, 1869, et par PERTZ, *Monumenta Germaniae historica*, 16e volume, Hannovre, p. 332 et ss. D'habitude il s'agit de la résolution de certaines équations du premier degré qui sont dissimulées ; cependant on trouve aussi des équations de Diophante et une fois une sorte de carrés magiques.

vents, doué et bien conduit, arrivait à posséder, nous est assez bien connue. L'Arithmétique théorique était toujours, comme chez les Grecs, distinguée du calcul pratique (calculus). La première n'était qu'une théorie élémentaire des nombres ; la division des nombres entiers en nombres de la forme 2^n, $2(2n+1)$ et $2^m(2n+1)$ semblait très-importante, de même que la répartition de tous les nombres en « numeri superflui », « numeri perfecti » et « numeri deminuti », suivant le cas où le nombre A était $\gtrless s$, s étant la somme des diviseurs de A.

Le cribrum Erathostenicum doit aussi avoir joué un certain rôle. C'est dans un drame de la savante nonne Hruotsvitha (1) de Gandersheim que l'on voit le mieux à quel point le Moyen Age appréciait toutes les spéculations sur les nombres.

A la considération des lignes, des surfaces et des corps venait se rattacher celles des nombres polygonaux et polyédraux. Enfin la théorie des proportions exigeait aussi que l'on appréciât les rapports réciproques des nombres et en particulier il fallait déterminer les « Mesotates » de deux nombres, c'est-à-dire leur rapport arithmétique, géométrique et harmonique (2). En outre les jeunes et les vieux frères du couvent avaient une bonne occasion de s'exercer dans leurs connaissances en pratiquant la *Rhythmomachie* (3), un jeu de nombre dont les règles restaient incompréhensibles sans une connaissance assez avancée des définitions de la théorie des nombres.

La jeunesse devait trouver beaucoup plus difficile d'apprendre l'art de calculer. A l'époque des Carlovingiens, le comput romain, avec ses symboles numériques distincts et son système fractionnaire encore plus compliqué, était encore en usage ; seule l'utilisation de tables auxiliaires, telles que celles de

---

(1) V. Barack, les œuvres de Hruotsvitha, Nuremberg, 1858, p. 273 et ss.

(2) Le poème didactique religieux de Walter est très instructif pour notre examen de la marche des études à l'époque impériale saxonne. Harster traite ce sujet à fond. (*Walter von Speier, ein Dichter des X Jahrhunderts*, Spire, 1877 ; Ualteri Spirensis Vita et Passio Sancti Christophori Martyris, id. 1878.)

(3) Nous possédons une monographie de ce jeu dont l'inventeur réel restera probablement inconnu ; elle est de Peiper, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik III*, p. 167 et ss. On peut constater la présence d'ouvrages sur le « combat des nombres » qui remontent au XVI^e^ et au XVII^e^ siècle.

l'Aquitain Victorius, composées [1] au IIIe ou Ve siècle de notre ère, permettaient dans une certaine mesure, de surmonter les difficultés. Au Xe siècle le comput cède le pas à l'*Abacus* ; c'est le calcul manuel à l'aide de colonnes développé par le Français Gerbert, qui plus tard devint pape sous le nom de Silvestre II. Déjà la difficulté des opérations avec les nombres romains avait fait naître le calcul sur les doigts ; cependant, quoi qu'il en soit, souvent question dans la littérature, nous ne pouvons pas nous faire une image claire de son essence [2], et, en tout cas, il ne pouvait pas rendre les services de la nouvelle méthode de calculer. Nous savons que l'on inscrivait, soit avec une plume dans chaque cas particulier, soit en les gravant une fois pour toutes sur une plaque de métal, une série de bandes parallèles qui portaient en tête, respectivement, en allant de droite à gauche, les signes I, X, C, M, $\overline{\text{I}}$, $\overline{\text{X}}$, et ainsi de suite. Les chiffres isolés appelés *alpices*, n'avaient qu'une vague ressemblance avec les formes modernes ; on les inscrivait sur de petits disques de papier, de cuir ou de métal, et l'on pouvait donc « poser » de suite chaque nombre du système décimal. Si l'on voulait, écrire par exemple le nombre 634029, on posait les jetons du 9, 2, 4, 3 et 6 dans les colonnes portant les symboles latins de 10^m (m entier $\geqq 1$) et l'on laissait libre la place sous le C.

Deux nombres entiers étaient-ils inscrits de cette manière, leur addition, soustraction ou multiplication s'exécutait en posant de nouveaux jetons. L'élève devait indispensablement connaître par cœur le livret arithmétique pour arriver à bout des opérations précédentes. Par contre la division restait un problème difficile, et c'est à elle que se rapporte tout d'abord la phrase bien connue de ce temps, l'expression d' « abaciste suant ».

C'est grâce aux peines d'interprétateurs remarquables, Chasles,

---

[1] Sans les tables auxiliaires un calcul entier avec les termes romains aurait été à peine exécutable, de sorte que le « argumentum calculandi » de Victorius (décrit par Christ dans les *C. r. de l'Academie de Bavière*, Philol. Hist. Kl., 1863, I, p. 100 et ss.), doit être considéré comme un vrai service rendu à son temps.

[2] Notre connaissance du calculus digitalis est encore très incomplète malgré beaucoup d'efforts. Tout ce que nous connaissons est la représentation de nombres quelconques par des gestes des doigts des deux mains ; Stoy (*Zur Geschichte des Rechenunterrichtes*, première partie, Jena, 1876, p. 31 et ss.) en donne un bon aperçu. On connaît, aussi peu qu'avant, de quelle manière il fallait passer numériquement d'une de ces positions de doigts, souvent bizarres, à une autre.

Friedlein, Cantor et d'autres, qui ont fouillé les textes souvent difficiles à lire, que nous possédons une idée complète de l'exécution d'un exemple de division. Le fait que le dividende ou le diviseur augmentait d'un chiffre aggravait la difficulté, et Gerbert était obligé de fournir chaque fois une nouvelle règle. Souvent la division dite complémentaire n'était pas une simplification, ainsi qu'elle aurait dû l'être, mais plutôt une complication. On peut donc bien croire que maîtres et élèves se sentirent soulagés lorsque l'Abacus céda la place, en Occident, à l'Algorithmus [1], qui, depuis longtemps, avait transformé le calcul de fond en comble en Orient.

Leonardo Fibonacci l'importa le premier sur le sol italien et le petit manuel de l'Anglais Jean d'Halifax, nommé Sacrobosco le rendit praticable à l'école.

Le zéro appartenant dès ce moment à la numération, une difficulté capitale était éliminée : cependant la division restait encore une opération considérable. Néanmoins il en résultait un avantage que l'on ne pouvait trop estimer.

Une vraie méthode venait d'être créée ; elle menait sûrement au but, quoique avec beaucoup de peine et beaucoup de temps. C'est ainsi que l'enseignement arithmétique entrevit des temps meilleurs.

L'enseignement géométrique dans l'ancien temps se composait principalement de l'explication des définitions les plus simples tirées de sources assez troubles, telles que Marcianus Capella ou Isidorus Hispalensis ; des compléments étaient fournis lorsqu'il s'agissait d'exercices de mesure. Nous voyons dans la « Geometria » de Gerbert que l'on employait dans ce but une règle graduée, le « geometriculus radius », et le plan bien connu du couvent de Saint-Gall [2] fait supposer que l'on possédait une idée assez claire de la représentation rationnelle des corps. Depuis Gerbert [3], l'école religieuse connaissait l'arpentage romain,

---

[1] Weissenborn (*Die Entwickelung des Zifferrechnens*, Eisenach, 1877) traite à fond la position des quatre opérations dans le nouveau calcul indo-arabe de Mahomet Alchwarizmi.

[2] Keller (*der Bauriss des Klosters Sankt-Gallen*, Zurich, 1844) explique ce document remarquable qui apparut sous la direction du célèbre abbé Hartmuot.

[3] Nous avons à notre disposition une excellente source de renseignements pour

ainsi qu'un certain nombre de règles exactes et utiles pour l'exécution de travaux géodésiques élémentaires. Il restait toutefois de graves erreurs provenant de la confusion des nombres polygonaux et des expressions indiquant la surface des polygones. On voit dans la correspondance très commentée de Gerbert avec son élève Adelbold [1] que la détermination des volumes des corps simples appartenait au programme du couvent.

On ne doit pas douter que l'Astronomie ait joué un rôle très important dans l'école du Moyen Age ; elle était en effet très nécessaire pour maintenir dans l'ordre les dates des fêtes religieuses [2].

On peut admettre que la jeunesse du Moyen Age n'était certainement pas en arrière sur la jeunesse moderne en ce qui concerne la connaissance effective des phénomènes célestes. Déjà au IX^e^ siècle on possédait à Saint-Gall un globe céleste dont on pouvait faire varier la hauteur polaire ; il est expressément dit de lui : « Er hat alliu gentium gestelle [3]. » Nous pouvons nous faire une idée très claire de la manière dont les garçons apprenaient les constellations.

L'examen des écrivains romains qui passaient pour des autorités, tels que Plinius, Manilius, Macrobius, Isidorus, etc., fournissait, en une certaine mesure, des connaissances cosmographiques [4]. Il y avait même des manuels distincts ; c'étaient, cela va de soi, des compilations assez confuses, mais fournissant

---

l'étude des travaux du futur pape Sylvestre II, travaux qui marquaient une certaine étape de progrès (Bubnov, *Gerberti postea Silvestri II papae opera Mathematica*, 972-1003, Berlin, 1899). On y trouve ce qu'il écrivit lui-même et ce qui fut écrit par ses contemporains, en tant que cela le concernait.

(1) Bubnov p. 485 et ss.

(2) Quand Troels Lund prétend qu'on aurait dû envoyer un messager chez les Maures, en Espagne pour apprendre des astronomes de là-bas, la date de la fête de Pâques, il écrit une inexactitude de plus dans son livre excellent sous d'autres rapports (*Himmelsbild und Weltanschauung*, Leipzig, 1899, p. 166).

(3) V. Fiorini-Günther, *Erd-und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion*, Leipzig, 1895, p. 24.

(4) Nous possédons des témoignages indiscutables dans : *Anonymi de situ orbis libri duo ; e codice Leidensi nunc primum edidit*, M. Manitius, Stuttgart, 1884. L'auteur explique qu'il a composé « hunc de situs orbis libellum » sur le désir de ses frères avides d'apprendre et sur les sollicitations pressantes des élèves. Qu'il en soit ainsi dans beaucoup d'autres cas.

cependant un exemple parlant du désir d'apprendre à une époque que nous nous représentons comme trop ténébreuse.

Nous gagnons ainsi la conviction que les institutions du Moyen Age placées sous la direction religieuse du « Klerus » ne négligeaient en aucune façon l'enseignement mathématique. Il n'est pas étonnant qu'il fut donné d'après des règles immuables fournies par la tradition ; le progrès cependant n'était pas complètement exclus, car nous voyons, dans le courant du XV^e^ siècle [1] la nouvelle science de l'Algèbre faire son entrée dans les cellules silencieuses des couvents. Comme on l'a déjà dit, il n'y aurait eu en Allemagne, jusqu'aux temps modernes aucune école pouvant offrir quelque chose de mieux. On cite bien quelquefois les écoles des villes, mais leur programme ne dépassait dans aucun domaine les rudiments élémentaires de la science, et il est prouvé, par les textes, que pour le calcul par exemple, les enfants des familles fortunées étaient instruits par des maîtres particuliers [2]. Même à l'époque de la Réformation les écoles moyennes étaient déplorables, et Mélanchthon, qui dans cette direction peut aussi porter le nom de Praeceptor Germaniae, osa à peine assigner une petite place aux mathématiques dans les nombreux programmes d'étude qu'il prépara. Nous y reviendrons plus bas. A partir du milieu du XIV^e^ siècle, il y eut aussi des universités allemandes, et le Quadrivium y eut sa place dès le commencement. C'est en 1384 que l'Université de Vienne, végétant péniblement depuis 1365, reçut un organisateur adroit, dans la personne du Hessois d'origine, Henri de Langenstein ; c'est lui qui prépara principalement son épanouissement futur [3]. Alors que dans les universités

---

[1] Un manuscrit trouvé par GERHARDT *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland*, II, Monatsber., de l'Académie de Berlin 1870) dans le couvent de Regensbourg, Saint-Emmeram, et datant de l'année 1461, donne un aperçu de la résolution d'équations simples d'après Mohammed-ben-Musâ.

[2] GÜNTHER a. a. O., p. 131 et ss. La première notice dont on est sûr date de l'année 1409, époque où le magistrat de Nuremberg admit un étranger au rang de bourgeois de cette ville très cultivée de l'ancien empire allemand, parce qu'il enseignait le calcul aux enfants des familles illustres.

[3] Pendant longtemps nous n'avons rien su de Langenstein. Dans un voyage d'étude à travers les bibliothèques allemandes, Curtze a trouvé de lui un manuscrit dont il n'avait encore jamais été fait mention ; cet ouvrage d'un homme qui ne devait pas être estimé sans raison par ses contemporains, traite des excentriques et des épicycles. Nous espérons qu'il sera bientôt publié !

romanes, sur l'exemple desquelles leurs sœurs allemandes devaient se modeler, les mathématiques ne tenaient qu'un rang très infime [1], nous voyons à Vienne, que le Quadrivium reçoit dès le commencement une place honorable dans le sein des branches académiques enseignées.

Déjà dans la dernière décade du XIV^e^ siècle des leçons régulières sont professées sur les premiers livres d'Euclide, sur le Sacrobosco (Sphaera materialis), l'Arithmétique, la théorie des proportions, le calcul fractionnaire (« Algorithmus de minutiis »), la Musique, l'Optique (« Perspectiva » d'après Witelo et Peckam), la théorie des planètes et le « Latitudines formarum » [2]. On n'avait pas encore une chaire de mathématiques, et les jeunes maîtres enseignaient leur science d'après un tirage au sort, de sorte que la même personne avait à présenter, par exemple pendant un semestre, les petites œuvres d'Aristote, pendant le deuxième la Logique ou la Rhétorique, et pendant le troisième les Mathématiques. Le travail n'était pas considérable, les appointements étaient proportionnels ; l'auditeur ne payait que 3 groschen pour un cours de 20 leçons sur le Sacrobosco ; c'est un montant très faible [3], même en le rapportant à la valeur réelle de l'argent à cette époque.

Ce fut exactement la même chose aux XIV^e^ et XV^e^ siècles à Prague, Heidelberg, Cologne, Leipzig, Ingoldstadt. Cela ne doit pas nous étonner, car il faut faire remarquer que l'Université du Moyen Age ne tenait pas à communiquer à ses jeunes auditeurs de nouveaux résultats d'investigation, ni à les préparer pour des recherches personnelles : la tâche consistait plutôt à leur offrir la science transmise sous une forme didactique. Cela ne regardait

---

[1] Il y a de nombreux exemples pour montrer que Paris, rayonnant au loin, n'était qu'un sol stérile sous le rapport des mathématiques (THUROT, *De l'organisation et de l'enseignement dans l'université de Paris au Moyen Age*, Paris-Besançon, 1850, p. 31 et ss ; HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*, Leipzig, 1874, p. 353 et ss. Les conditions étaient meilleures en Italie, cependant ce n'est que plus tard que les mathématiques commencèrent à se développer largement dans les universités.

[2] Cette désignation incertaine correspond à une Géométrie élémentaire de coordonnées. CURTZE, *Die mathematischen Schriften des Nicole Oresme*, Berlin, 1870.

[3] Des témoignages complets sont fournis par les œuvres de KINK, *Geschichte der Kaiserlichen Universität zu Wien*, 1 volume, Vienne, 1854, et d'ASCHBACH, *Geschichte der Wiener Universität im ersten Jahrhunderts ihres Bestehens*, Vienne, 1865.

pas le professeur de savoir comment la matière serait travaillée, et il suffisait qu'un maître habile qui débutait dans l'enseignement expliquât les textes proposés aux commençants, qui formaient la faculté des « artistes ».

Vienne, toutefois, eut le droit de s'enorgueillir d'un maître de mathématiques indépendant, en la personne de Jean de Gmunden. Magister depuis 1406, il commença d'après la coutume de son temps, comme ses collègues, mais les cours mathématiques prennent une place prépondérante dans son répertoire, si l'on peut s'exprimer ainsi, et il enseigne exclusivement les Mathématiques et l'Astronomie depuis 1420 jusqu'à sa mort en 1442.

Une sorte de professorat spécial s'était développé de lui-même, sans l'intervention du gouvernement, il adhérait, il est vrai, au titulaire actuel, et c'est une erreur de croire que Peurbach et Regiomontanus pratiquèrent comme maîtres attitrés, quoiqu'on l'ait imprimé. Tous les deux enseignaient de la manière que nous venons d'indiquer et leur vrai mérite est moins l'acclimatation des études mathématiques que celle des humanités. Ce qu'ils ont accompli comme écrivains, à leur gloire impérissable, n'a rien à voir avec leur activité comme professeurs. Aucun des maîtres des « disciplines philosophiques » ne fut un spécialiste (1).

La transformation a lieu au tournant du siècle. En l'année 1501, l'empereur Maximilien Ier, conseillé par Celtis et Stabius, fonde le « Collegium proëtarum et mathematicorum » incorporé à l'université de Vienne, et, s'il ne fut pas destiné à une longue durée, la chaire mathématique survécut comme une conséquence bienfaisante ; occupée avec honneur par Stiborius, Rosinus, Collimitius, Voegelin, elle supporta les mauvais temps des troubles religieux. L'université d'Ingolstadt avait depuis 1524 un « Ordinarius der Astronomei ». C'est ainsi que s'appelait Pierre Apian qui, par sa parole et par sa plume, répandit des germes dans tous les domaines des sciences mathématiques. Son fils et successeur

(1) Cracovie très fréquentée par les Allemands entre 1470 et 1530 pourrait tout au plus servir d'exception. Albert Brudzewski, comme professeur de mathématiques pures et appliquées, a exercé longtemps une grande puissance d'attraction : il est vrai que se conformant à l'usage, il passa plus tard à la Philosophie (Prowe, *Nikolaus Coppernicus auf der Universität Krakau*, Thorn, 1874).

Philippe suivit son excellent exemple [1]. Plus tôt encore en, 1516, Tübingue avait été pourvue d'une chaire ordinaire, dont le possesseur Stoeffler avait déjà eu un prédécesseur dans la personne d'un maître spécial de mathématiques, Paul Scriptoris [2]. A cette époque Glareanus honorait l'université de Bâle et Jean Widmann d'Eger celle de Leipzig [3]; les nouvelles universités ne voulaient pas être distancées par les anciennes.

C'est Wittenberg qui, entre toutes, attire notre attention; ses grands hommes reconnurent clairement que la réforme de l'église n'aurait du succès que si une émulation de l'esprit se manifestait dans tous les domaines de la pensée humaine. Ce fut Luther et Melanchthon qui créèrent dans la « Lectio Pliniana » une place payée de maître de Géographie et Histoire naturelle; c'est à celui-ci que l'université doit d'avoir été tirée d'humbles conditions et d'être devenue un rempart des mathématiques.

Persuadé de l'importance de cette science qu'il possédait à fond, Melanchthon demanda et reçut une chaire qui subsista jusque dans notre siècle, époque où Wittenberg et Halle furent réunies. Maximilien avait aussi projeté une chaire semblable pour sa fondation à Vienne, mais elle n'avait pu vivre longtemps. En 1521 Melanchthon [4] estime qu'un seul mathématicien pouvait suffir, mais la réforme de 1546 nous montre un professeur de mathématiques élémentaires, et un autre pour les mathématiques supérieures [5]; Rhéticus et Reinhold occupèrent les premiers ces deux chaires. Il est à peine nécessaire de dire que la division dont il est parlé n'avait rien à faire avec celle qui nous est habituelle aujourd'hui.

---

[1] V. Günther, *Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker und Kartographen*. Prague, 1882.

[2] Les succès pédagogiques du savant franciscain qui, de sa propre initiative, expliquait devant un auditoire mélangé les écrits d'Euclide et de Ptolémée, nous sont décrits clairement par un de ses élèves (Vulpinus, *Die Hauschronik des Pellicanus von Rufach*. Strasbourg, 1892, p. 4 et ss.).

[3] Widmann n'était pas seulement, comme on l'a cru longtemps, un algébriste capable et original, mais c'est lui qui le premier, introduisit, dans les salles de cours universitaires, le nouveau calcul avec des symboles numériques généraux, c'est ce que Curtze démontra dans le voyage dont il a été parlé.

[4] Hartfelder. *Philipp Melanchthon als Praeceptor Germaniae*. Berlin, 1889, p. 510.

[5] Ouvrage cité ci-dessus, p. 442.

Le maître de la « Mathesi inferior » avait à parler des éléments de l'Arithmétique et de la Géométrie, celui de la « Mathési superior » enseignait l'Astronomie et l'Astrologie naturellement. Les manuels dont on se servait nous sont connus. Melanchthon en a composé plusieurs avec des préfaces écrites de sa plume facile et élégante. Personne ne le surpassait comme styliste dans l'université, même quand il affichait ses avis au « tableau noir » à l'adresse de ses collègues en mathématiques [1] : ils étaient destinés, par leur forme de rhétorique choisie, à exercer l'émulation chez les étudiants, et, dans leur naïveté, ils nous permettent de plonger un regard dans la vie universitaire de cette époque. Nous gagnons ainsi l'assurance qu'au XVI^e^ siècle, le progrès, lentement préparé, était complètement accompli ; les mathématiques avaient acquis droit de cité sur le sol allemand. Nous devons, il est vrai, nous garder de donner à ces mots un sens étendu, car si la volonté était bonne partout, les moyens manquaient souvent, et il n'était pas facile de se procurer des maîtres capables. Alors on se tirait d'affaire en employant des remplaçants qui n'avaient pas toujours de la valeur [2]. C'était dans les universités régies par les Jésuites — Ingolstadt en était le type dans la deuxième moitié du siècle — que les conditions étaient les moins sûres. L'ordre, quand il le voulait, ne manquait certainement pas de maîtres excellents, surtout en mathématiques ; mais, la propension peu pédagogique des supérieurs à ne laisser aucun membre dans une position durable, et de lui procurer constamment de nouvelles tâches, était absolument contraire à un enseignement profitable.

Le gouvernement bavarois s'est plaint à toute occasion des disciples de Loyola ; c'est la plupart du temps à propos des changements rapides des professeurs de l'université.

---

[1] C'est parmi ceux-là que se trouve un avertissement dont on a souvent parlé (Hartfelder) dans lequel Melanchthon cherche à inspirer aux jeunes étudiants le désir et le courage d'apprendre les mathématiques ; il y dit, entre autres, que l'addition et la soustraction sont très faciles, la multiplication n'est pas non plus très difficile, tandis que la division nécessite en effet plus d'efforts. Tel était le niveau des cours universitaires !

[2] Lorsqu'en 1570 Philippe Apian qui avait été d'Ingolstadt à Tubingue, voyagea quelque temps, le sénat transféra la « Doctrina sphaerica » au professeur d'histoire et d'éloquence, il dut s'en tirer tant bien que mal (D. Strauss, *Leben und Schriften des Dichters und Philologen Nikodemus Frischlin*. Francfort-sur-Main, 1856, p. 39.)

Il y avait sûrement parmi eux des hommes avec lesquels on pouvait beaucoup apprendre ; tel est, dans la dernière décade du XVI^e^ siècle, J. Lantz qui produisit un traité de Géométrie pouvant passer pour un modèle dans son genre et une « puerilis Algebra » (1) où le grand Leibniz fit ses premières études (2). Son élève fut Ch. Scheiner (3) qui découvrit les taches du soleil ; on lui doit aussi le pantographe. Il honora comme maître les chaires de Dillingen, Ingolstadt et Fribourg-en-Brisgau.

Nous ne trouvons malheureusement que de rares sources en ce qui concerne l'enseignement gymnasial de cette période. Les réformateurs allemands tenaient beaucoup aux sciences exactes en insistant surtout sur l'élément supernaturel ; on connaît la phrase de Luther (4) : « Si j'avais des enfants et si je le pouvais, ils devraient non seulement apprendre les langues et l'histoire, mais aussi la musique et toutes les mathématiques. » Lorsque Melanchthon fonda l'école des savants sur de nouvelles bases et proposa une série de règles scolaires à l'usage des villes allemandes les mathématiques obtinrent tous leurs droits. Le plan de l'école de Mansfeld de 1525 exprima au moins le désir qu'à côté des « Artes dicendi » on pensa aussi à ces matières ; le gymnasium de Nuremberg, qui fut institué en 1526 sur une base à moitié académique, reçut un maître particulier pour cette branche en la personne du célèbre fabricant de globes J. Schœner. On assigna aux mathématiques une place avantageuse et ceci avec raison, car on sait que dans la suite, lorsque le premier succès de l'école diminua, les leçons de langues étaient mal suivies, tandis que les mathématiques étaient encore fréquentées d'une manière satisfaisante. C'est compréhensible dans un centre de trafic et d'industrie (5). D'autre part le gymnasium avait principalement à

---

(1) LANTZ, *Elementorum Euclidis libri IV Ingolstadt* 1617. *Institutionem arithmeticarum libri IV*, Munich, 1619.

(2) CANTOR, etc., 3^e^ volume, p. 38.

(3) V. BRAUNMÜHL, *Christoph Scheiner, als Mathematiker, Physiker und Astronom*, Bamberg, 1891.

(4) Ceci se trouve dans l'adresse — très importante pour l'histoire de l'enseignement allemand — de Luther aux conseillers de toutes les villes d'Allemagne, dans laquelle il leur recommande d'élever et d'entretenir des écoles chrétiennes.

(5) L'intérêt apporté au grand développement de l'industrie éveilla un violent besoin d'enseignement des mathématiques. DOPPELMAYR (Historische Nachricht

fournir à l'Etat des fonctionnaires, à l'Eglise des prédicateurs, et quand cela était le cas, il n'était pas nécessaire de donner de l'importance aux mathématiques. C'est ainsi que la Géométrie faisait souvent complètement défaut, et l'enseignement se bornait à un peu de calcul et à la « sphérique » qui était moins une astronomie populaire à la façon actuelle qu'un composé des théories les plus importantes, que nécessitait la mesure du temps et la fixation du calendrier. Par exemple, dit Heym [1], « le plan d'études de l'école d'Elisabeth à Breslau en l'année 1570 appelle l'Arithmétique un art, qui est non seulement utile dans le commerce et le trafic, mais qui sert aussi à déterminer le quantième du monde, les époques des révélations divines et des autres histoires, le cours des étoiles, le calendrier et les jours fériés ». Celui qui désire apprendre des détails, en trouvera la plus riche mine dans l'ouvrage célèbre de Vormbaum [2] sur l'histoire de l'école, de même que dans J. Müller qui fournit des données utiles, quoiqu'il ait un autre but devant les yeux [3]. A l'école de Goldberg de l'humaniste Trotzendorf, école arrivée à quelque célébrité, grâce à l'extrême importance accordée au latin, il y avait un « Sphaerista » dont la charge consistait à interpréter le Sacrobosco, lisons-nous dans v. Raumer [4]. Les écoles rurales, par contre, autant qu'il peut en être question, manquaient complètement

---

von den Nürnberger Mathematicis und Künstlern, Nuremberg, 1730, p. 35) en fournit des preuves très remarquables. L'édition allemande des six premiers livres d'Euclide de Xylander s'adresse expressément à des artistes et à des artisans qui doivent s'aider du compas, de la règle, du fil à plomb et des chiffres.

(1) Heym, *Zur Geschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes an Gymnasien, insbesondere an der Thomasschule in Leipzig*, Leipzig, 1873, p. 3.

(2) Vormbaum, *Die evangelischen Schulordnungen des XVI Jahrhunderts*, Gütersloh, 1860.

(3) Joh. Müller, *Vor und frühreformatorische Schulordnungen und Schulverträge in deutscher und niederländischer Sprache*, 1 Abteilung, Zschopau, 1885; *Quellenschriften und Geschichte des deutschsprachlichen Unterrichtes*, Gotha, 1882. Un programme scolaire de O. Beier (*Die Mathematik im Unterrichte der höhern Schulen von der Reformation bis zur Mitte des XVIII. Jahrhunderts*, Crimmitzschau, 1879) permet d'étudier quelques règlements scolaires considérés comme représentant l'état de leur époque ; ce sont les règlements de la Saxe électorale de 1528, du Brünswick (même année), du Wurtemberg de 1559, ainsi que quelques autres actes semblables.

(4) K. v. Raumer, *Geschichte der Pädagogik vom Wiederaufblühen klassischer Studien bis auf unsere Zeit*, 1re partie, Stuttgart, 1846, p. 219.

du plus simple enseignement du calcul, et quoiqu'en Bavière la « Schuelordnungk de anno 1548 » chercha à le rendre obligatoire, cette disposition bien pensante ne dût pas porter de bons fruits, faute du personnel nécessaire.

Le XVII^e^ siècle n'apporta pas de nouvelles conditions ; la triste période de la guerre de Trente Ans ruina même plus d'une organisation pleine d'espoir. Les programmes de Gotha (1605), Kurpfalz (1615), Moer a. R. (1635), Halle a. d. S. 1669), s'occupent seulement de l'Arithmétique [1] tandis que la Sphérique et la Géométrie restent plutôt des leçons facultatives auxquelles s'annonçaient ceux qui se sentaient du goût pour ces matières difficiles [2]. Seul le Lyzeum à Cobourg, qui formait une petite académie et qui offrait un programme complet dans tous les domaines des sciences, admettait la Géométrie comme un cours obligatoire (1605).

Les réformes du conseiller Ratichius, qui n'était lui-même pas très instruit, ont peu touché aux mathématiques; ce n'est pas le cas pour Comenius [3] qui, à une grande largeur de vue unissait la connaissance des mathématiques et des sciences naturelles de son temps. Il sera difficile de prouver qu'une école a pu se laisser influencer, dans son programme mathématique, par les conseils du grand pédagogue, mais l'on peut admettre un effet indirect de sa part, ne serait-ce que par l'entremise de son ouvrage (Orbis pictus), qui pousse à la représentation géométrique. Un homme qui, en adversaire de la philosophie scolastique d'Aristote, salua joyeusement toute transformation de l'enseignement fut Joachim Junge, recteur des écoles supérieures de Hambourg depuis 1629 ; il avait abandonné anciennement sa chaire à Giessen pour entrer en contact plus intime avec Ratichius. Il n'a pas fait beaucoup imprimer, mais les traités géométriques [4] écrits de sa main, nous le présentent comme un maître frayant de nouveaux chemins et rendant dans cette science plus

---

[1] Vormbaum a. a. o. 2^e^ volume, p. 44, 162, 270, 577. A Halle le goût scolaire se manifesta jusqu'à rajeunir, d'une manière assez hardie pour ce temps, le conseil que Platon avait écrit sur la porte de son école : Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω.

[2] Paulsen, p. 205, donne des renseignements plus précis sur le programme quelque peu hypertrophique de cette institution.

[3] Il faut considérer particulièrement la « Pansophia » et la « Didactica magna » *Commenius ausgewählte Schriften*, ed. Beeger et Leutbecher, Leipzig, 1854).

[4] V. Wohlwill, *Joachim Jungius*, Hambourg-Leipzig, 1888, p. 81.

de services que la plupart de ses contemporains. Il ne peut pas non plus être beaucoup question d'enseignement supérieur au XVII^e siècle, car nous manquons de témoignages authentiques. Nous saurions quelque chose de plus précis si des cahiers de notes ou de communications dignes de confiance sur le genre de l'enseignement prononcé du haut de la chaire, nous avaient été conservés ; mais ce n'est justement pas le cas en ce qui concerne cette époque.

En fait de palliatifs, nous avons trois choses à notre disposition. Les manuels imprimés qui, nous pouvons en être assuré, ont rendu des services comme guides, les programmes de cours publiés dans les journaux et revues, enfin les controverses rédigées ordinairement par un maître ou un étudiant aspirant à la dignité de docteur et utilisées dans la cérémonie solennelle qui se terminait par la prise de possession du béret de magistrer ou du chapeau de docteur. L'image que nous pouvons reconstituer est assez uniforme ; à l'une des universités on enseignait plus, à une autre moins, suivant le titulaire de la chaire de mathématiques, mais il n'y a guère de différences accentuées. On peut aussi dire que la conception de l'étude académique, telle qu'elle s'est formée dans le dernier quart du XVII^e siècle, resta environ cent cinquante ans comme modèle ; la méthode et le contenu du programme mathématique reste invariable en général, et le progrès, quant à la science, se manifeste très lentement. On doit d'abord se rappeler qu'on attribuait une extension à l'idée de « Mathesis », extension qui aurait paru tout aussi incompréhensible aux Grecs qu'elle semble simple de nos jours. La Géométrie et l'Arithmétique étendues à la Trigonométrie, l'Algèbre et les éléments de la haute analyse formèrent de tout temps les mathématiques pures ; à leurs côtés se plaçaient, dans un mélange singulier, les mathématiques appliquées.

On leur attribuait la Mécanique, l'Optique divisée autant que possible en perspective, catoptrique et dioptrique, l'Astronomie, la Géographie (mathématique), la Gnomonique [1], la Chronologie,

---

[1] La théorie des cadrans solaires, employée actuellement comme exercice de Trigonométrie sphérique ou de Géométrie descriptive, avait à une époque assez pauvre en horloges artificielles, une importance considérable.

l'Art militaire, les travaux civils et militaires [1]; le jeune mathématicien devait posséder au moins une notion de toutes ces matières hétérogènes, et souvent il arrivait que l'on confondait l'essence des choses avec ce qui était secondaire.

Un mathématicien de cette époque devait se familiariser avec bien des domaines; aussi l'intensité de l'étude souffrait nécessairement de cet éparpillement, cela d'autant plus que certaines des branches ci-dessus n'avaient qu'un rapport très éloigné avec les mathématiques proprement dites [2]. Cependant cet arrangement persista pendant longtemps [3]; ce n'est que dans la première décade du XIX[e] siècle que l'on perdit peu à peu l'habitude de voir un tacticien et un architecte dans la personne d'un mathématicien.

Les manuels et les traités de mathématiques n'ont pas fait défaut pendant les deux derniers siècles, mais tous n'ont pas atteint la même célébrité, si grande qu'en fut la valeur. Ainsi l'œuvre excellente de Karsten [4] surpassait sans contester la moyenne de son temps; ayant il est vrai un grand développement, elle n'a pas pénétré profondément semble-t-il au sein du public.

Si nous considérons l'espace de temps qui va de 1680 à 1800, nous y distinguons trois ouvrages qui font évidemment preuve, en ce qui concerne le fond et la méthode, d'un progrès considé-

---

[1] Dans Comenius, la Statique et l'Optique sont expressément attribuées aux mathématiques et ne font pas partie de la Physique — ou Philosophie de la nature.

[2] On considérait comme appartenant à l'art militaire, ou à ses éléments mathématiques, la tactique d'une part, et d'autre part, la balistique, en y joignant la théorie physico-chimique des matières explosives. Le sujet des cours était formé de cette façon. Lorsque les étudiants de l'université de Iena s'exercèrent à la défense de leur pays, pour prendre part à la guerre d'indépendance, plusieurs d'entre eux engagèrent le mathématicien Münchow à faire un cours sur les « sciences militaires ».

[3] On exigeait de la part du mathématicien également des exercices pratiques côté de la connaissance de l'art des fortifications. Le savant Maclaurin fut atteint par les germes de la mort, dans les fatigues qu'il supporta en 1745, alors qu'il protégeait par de nouvelles fortifications la ville d'Édimbourg, menacée d'une attaque des rebelles écossais (WHEWELL, *Geschichte der induktiven Wissenschaften*, traduit en allemand par L. J. v. Littrow, 2[e] partie, Stuttgart, 1840, p. 218).

[4] W. J. G. KARSTEN, *Lehrbegriff der gesammten Mathematik*, Greifswald, 1776-1777, 2[e] édition, 1782-1791.

rable ; on peut prétendre que chacun d'eux contient toute la science de son temps. Ils portent les noms de leurs auteurs : H. Sturm (1635-1703), C. v. Wolf (1679-1734) et de A. G. Kaestner (1719-1800).

Le professeur Sturm à Aldorf, connu aussi dans l'histoire de la Physique scolaire par un ouvrage qui fit époque [1], a laissé un livre élémentaire très intéressant; ce livre [2], publié par son fils, nous offre un aperçu excellent de l'amplitude des connaissances élémentaires que l'on exigeait d'un jeune homme instruit de 1700. Le point de vue pratique l'emporte : les démonstrations n'y jouent pas un grand rôle, mais l'ouvrage peut se vanter d'être aussi clair que précis. Le fait qu'un savant si éminent ne voulut pas négliger les « Rudimenta Chiromantiae » montre bien l'esprit de ce temps, et cependant il déclare, dans une note complétive, que l'on ne possédait aucune raison mathématique de prédire l'avenir soit par les étoiles, soit par les lignes de la main. Il est également connu que Sturm fut un adversaire convaincu de l'astrologie. Après avoir fixé la limite inférieure de la connaissance mathématique, il nous montre dans un autre livre [3], jusqu'à quel point il croyait pouvoir conduire ses élèves. Cet ouvrage mérite d'être connu plus exactement, car avant l'apparition de Wolf, celui qui désirait pénétrer plus intimement dans la science devait avoir recouru à cette « noix des mathématiques, débarrassée de son brou ». C'est ainsi que l'on pourrait rendre le titre. Sturm produit une théorie élémentaire des sections coniques ainsi que des courbes supérieures connues de ce temps, soit algébriques, soit transcendantes ; il se sert en grande partie des recherches du Hollandais De Witt ; il enseigne la recherche des racines des équations supérieures par des constructions géométriques (intersections de courbes), et traite très à fond l'application de l'Algèbre à la résolution des problèmes géométriques.

---

[1] Sturm, *Collegium experimentale curiosum*, Nuremberg, 1702.

[2] I. C. Sturm, *Mathesis compendiaria sive synopsis mathematica tabulis comprehensa, ed. L. C. Sturm*, Cobourg, 1714.

[3] Sturm, *Mathesis enucleata*, Nuremberg, 1688, 2e édition, 1711. Ce livre est très rarement cité; Cantor lui-même n'y pense pas, il se limite plutôt à la nomenclature d'une traduction d'Archimède et des considérations sur la langue employée par Sturm. Et cependant le contraste entre Sturm et A. Trew, qui occupait la même chaire avant lui, est considérable.

Il est douteux qu'il soit allé aussi loin dans ses cours publics ; mais il est probable, qu'en particulier, il a initié quelques fortes têtes dans les parties difficiles de sa science. L'universel Wolf avance d'un bon pas ; il se crée, par ses livres philosophiques autant que mathématiques [1], un genre de monopole en Allemagne et même au delà des frontières, puisqu'une œuvre principale avait paru en latin. Il est vrai que l'auteur, célèbre par la rectitude de ses pensées, négligea [2] souvent dans ses définitions et ses démonstrations cette exactitude de raisonnement qu'on lui attribuait, mais la forme euclidienne [3] était rigoureusement observée ; celle-ci qui importait tant aux lecteurs de Spinoza, donnait le change sur les bases insuffisantes. Mais l'étudiant qui écoutait Wolf — souvent il a dû en rester aux maigres *extraits* — pouvait apprendre une quantité de choses qui sans cela auraient dû être péniblement tirées d'ouvrages volumineux et de dissertations académiques. Dans son Algèbre de 1717, Wolf présente une Géométrie de coordonnées assez avancée, la théorie des équations algébriques et les éléments du calcul infinitésimal, ainsi que son application à des problèmes de Physique. Il n'y avait à cette époque aucun ouvrage écrit en allemand qui facilita si commodément et si complètement le passage à ces questions situées au premier plan de l'intérêt scientifique.

---

(1) C. v. Wolf, *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, Halle, 1710, édité plusieurs fois, en dernier 1755 ; *Auszug daraus*, Halle 1717, en dernier 1772. *Elementa matheseos universae*, Halle, 1713-1741, 5 volumes ; *Mathematisches Lexikon*, Leipzig, 1716 ; ce dernier eut beaucoup de succès, car il répondait aux aspirations encyclopédiques de beaucoup de personnes, sans traiter la matière d'une façon plus approfondie, Cantor, 3e volume, p. 260.

(2) Ainsi par exemple la théorie des fractions est considérée comme un corollaire de la théorie des proportions, ce que Kaestner désignait comme une lourde faute de méthode. Ses principes géométriques manquent justement de profondeur philosophique (Cantor, 3e volume, p. 508 et ss.). La quantité *dx* (Algèbre, p. 254) est comparée à la quantité *x* comme le grain de sable à la montagne, sur laquelle le vent l'a soufflé. Il est facile de penser que dans de telles conditions l'édification de la haute analyse fait preuve de moins de précision que chez Leibniz, dont l'influence sur Wolf saute aux yeux.

(3) Nous donnons un exemple caractéristique d'une telle exactitude mal placée, tiré des mathématiques appliquées (4e théorème de la 2e partie de l'astronomie). La lune est un corps semblable à notre terre. Démonstration. Car elle est obscure et opaque, possède des montagnes, des vallées et des mers, des îles, des récifs et des caps. Elle est entourée d'un air pesant et élastique, dans lequel montent les évaporations et donnent naissance à la pluie, à la neige et à la rosée. Par conséquent c'est un corps semblable à notre terre. Ce qu'il fallait démontrer.

Une nouvelle étape est marquée par les ouvrages de Kaestner [1] ; elle est sortie directement de l'enseignement académique, comme le dit personnellement l'auteur.

Dans la deuxième moitié du XVIII[e] siècle, l'Université de Göttingen, sans conteste, passait pour souveraine dans le domaine des sciences exactes : Tobias Mayer, v. Segner, Kaestner, Erxleben, Lichtenberg justifiaient indubitablement cette réputation. A côté des cours détaillés, destinés aux futurs spécialistes, il y avait, grâce à l'habile direction du curateur de Munchhausen [2], des conférences condensées pour un public plus étendu désirant s'assimiler l'instruction générale, nécessaire à un « chevalier » [3]. C'est de cette circonstance que naquit le compendium de Kaestner [4] sur les mathématiques appliquées, un livre qui répondrait à son but à notre époque, quoique les temps soient si différents.

Les programmes des leçons « Rotuli » des universités allemandes à l'époque de cette réforme coïncidaient exactement, quant au fond, avec les meilleurs traités ; les différents avis sont

---

[1] KAESTNER, *Mathematische Anfangsgründe*, 1758-1800 (10 petits volumes qui parvinrent en partie jusqu'à la 6[e] édition ; chaque partie formait un tout. La première préface cherche — comme le fit Melanchthon de son temps — à encourager la jeunesse à l'étude de l'Algèbre qui passait pour très difficile, elle dit que cela n'exige pas plus d'attention et d'intelligence « qu'une femme n'en a besoin pour jouer au tarot ».

[2] PAULSEN, *Geschichte des gelehrten Unterrichtes auf den deutschen Schulen und Universitäten vom Ausgang des Mittelalters bis zur Gegenwart*, 2[e] volume, Leipzig.

[3] Paulsen, ce grand connaisseur du mouvement intellectuel germanique dans les siècles passés, nous trace une image très nette de l'importance que prirent dans l'enseignement de 1670 à 1740 « les sciences galantes ». C'étaient celles qui semblaient indispensables pour un homme du monde ; elles furent importées sous la pression de l'imitation française.

Elles étaient préférées dans les « Académies de chevaliers » (p. 501 et ss.), et c'est à ces institutions de bienséances qu'il faut attribuer la faute d'avoir éloigné les mathématiques de leur but réel, comme on l'a vu plus haut, et de les avoir détournées vers une direction exclusivement pratique.

[4] KAESTNER, *Anfangsgründe der angewandten Mathematik* (3[e] édition, Göttingen, 1780-1781). Ils se divisent en deux parties : la plus faible, la première, contient : la Statique, l'Hydrostatique, l'Aerométrie, l'Hydraulique, l'Optique, la Catoptrique, et la Dioptrique. Dans la deuxième plus volumineuse, on trouve ensemble : Astronomie, la Géographie (mathématique), la Chronologie et la Gnomonique. L'Artillerie, la Fortification et l'Architecture forment un supplément. La préface dit que ces « connaissances » que l'opinion publique attribuait aux mathématiques, ne pouvaient être complètement passées sous silence, elles avaient été cependant très résumées. On apprend aussi dans la préface qu'un cours semestriel avait à réunir « douze sciences, ayant chacune leurs propres principes », chacune d'elles devait nécessairement être très condensée.

souvent accompagnés du titre du manuel que le professeur emploie et, de cette manière, le niveau moyen des cours est suffisamment déterminé.

En général on désirait orienter les auditeurs et, occasionnellement les amuser ; notre proverbe « multum non multa » était plutôt appliqué à l'envers. Dans la plupart des cas, le maître, dans toute l'acception de sa profession, ne s'en tenait pas exactement à sa partie nominale, mais s'étendait dans une direction quelconque ; les administrations des universités, presque toutes mal pensionnées, ne voyaient pas cela d'un mauvais œil, car avec un maître si universel et si doué elles réalisaient des économies [1].

De tous côtés se manifeste une vraie confusion de sujets de cours ; et où l'orateur aurait-il trouvé le temps et la force de mettre sa science sur un pied indépendant ? Il devait ainsi arriver au XVIII^e^ siècle que les mathématiciens allemands ne pouvaient être qu'exceptionnellement des esprits producteurs et ne se faire connaître par leurs écrits que dans un cercle restreint. De ce côté, ces braves et diligents savants, souvent abattus par des soucis matériels, méritent notre estime la plus complète. Dans leurs rangs, les incapables formaient, il est vrai, de très rares exceptions [2], mais il n'existait pas de vrais chercheurs, ayant le droit d'être nommés à côté des grands Français et Bâlois — les Bernoulli, Euler, Hermann. L'impression éveillée par la nomenclature des

---

([1]) On raconte (ENGELHARDT, *Die Universität Erlangen von 1743 bis 1843*. Erlangen, 1843, p. 73) à propos du plus réputé mathématicien de la jeune université d'Erlangen, S. G. Suckow, qu'« Il faisait en général, toujours les mêmes cours, avec de faibles changements ». C'étaient : la Psychologie, la Logique et les Mathematiques, les Mathématiques complètes, le Droit naturel et la Morale, les éléments de la Physique (d'après Hamberger), la Politique, la Theologie naturelle et la Théologie polémique naturelle ; il enseignait les rapports du corps et de l'âme, le système du monde, les sections coniques, la Trigonométrie sphérique, l'Algèbre (d'après Clairaut), l'Analyse, la Géographie, les Mathématiques appliquées. Chacun se demandera quel menu il aurait fallu servir aux gourmets académiques pour mériter le qualificatif de varié alors que la liste respectable indiquée ci-dessus ne vous procurait pas cet honneur.

([2]) Une semblable exception était faite par ce Blauner, à Berne, qui d'après R. WOLF (*Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz*, 1^er^ cycle Zurich, 1858, p. 323 et ss.) jouait là-bas le rôle de bouffon. Les cahiers de notes de ses élèves contiennent beaucoup d'absurdités. GRAF a décrit à fond le développement de l'enseignement mathématique dans cette université (*Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaften in bernischen Landen*, Berne, depuis 1888. Chez lui aussi Blauner est assez mal arrangé ; il fut remplacé après des abus de pouvoir, par le vaillant Tralles.

manuels et des cours, est consolidée par la lecture des thèses, des dissertations et des controverses ; rarement nous nous sommes réjouis [1] d'un travail avantageux tiré de cette littérature d'occasion, considérable mais fatigante. Le XVIII[e] siècle, autant qu'il est question de l'enseignement supérieur allemand, s'est beaucoup plus occupé de transmettre les connaissances héritées que de les augmenter ou de les compléter. On peut donc prétendre que le personnel considérable des universités allemandes de 1750 à 1800 est resté en dehors de l'influence des transformations qui se manifestèrent au delà du Rhin et aussi au delà des Alpes, en Italie, où une vie [2] scientifique très intense se développait dans le domaine mathématique. On pourrait s'en référer à quelques jolis paragraphes de Kaestner sur le Calcul différentiel et intégral, la Mécanique analytique et l'Hydrodynamique ; mais nous pouvons être certains que ces livres étaient accessibles à une faible partie des étudiants, à ceux seulement qui possédaient les moyens et l'endurance de se faire donner un enseignement privé par un maître de valeur. Il n'y avait qu'à choisir, car les personnes suffisamment versées dans les hautes mathématiques étaient nombreuses. Nous pouvons désigner, entre autres, J.-F. Pfaff à Helmstedt [3], Klügel à Halle [4], Langsdorf à Erlangen, Pfleiderer à Tubingue, Hindenbourg à Leipzig. La création de ce dernier, l'analyse combinatoire, n'a pas beaucoup ébloui une époque habituée à l'élégance des for-

---

[1] Nous citons, par exemple, les démonstrations fournies par Stübner et Kaestner, du théorème de Harriot, celle du théorème des trois axes indépendants de chaque corps de Segner, la théorie de Karsten sur les logarithmes des nombres négatifs. Que l'on consulte le troisième volume de Cantor, et l'on verra combien peu les auteurs allemands se sont montrés capables de travaux originaux.

[2] Une composition de Loria (*Il « giornale de Letterati d'Italia » die* Venezia e la « *Raccolta Calogeria* » *come fonti per la storia della mathematiche nel secolo XVIII.* La *Cantor (Festschrift)*, 1899, p. 241 et ss.) donne là-dessus les meilleurs renseignements.

[3] On a représenté les rapports de Gauss et de Pfaff, comme si ce dernier n'avait été que le récepteur. Cela est réfuté par le passage d'une lettre tirée de la correspondance de Gauss et de W. V. Boljai et publiée, il y a peu de temps, par Fr. Schmidt et Stäckel (Leipzig, 1899, p. 12). Le jeune homme arrivé cependant à achever ses « Disquisitiones arithmeticae » écrit à son ami hongrois qu'il a visité Pfaff à Helmstedt et « qu'il a reconnu en lui la véritable marque du génie ».

[4] Klügel (1748-1821) doit être nommé parmi les premiers, en ce qui concerne le coup d'œil et les dispositions critiques, quoiqu'il n'ait pas beaucoup créé. Son « *Mathematisches Wörterbuch* », Leipzig (1803-1843), continué par Mollweide et Grunert, rend de grands services à tous ceux qui le consultent.

mules d'un Lagrange, mais actuellement nous apprécions mieux la valeur d'un ouvrage un peu formaliste, mais qui contenait déjà toute la théorie des déterminants (1). Hindenbourg seul a fait école, et plusieurs maîtres influencés par lui ont transporté les innovations de Leipzig dans d'autres écoles, par exemple, à côté de Pfaff et Klügel, Rothe à Erlangen, Magold à Ingolstadt et à Landshut, Stahl à Wuirzbourg et Münich, Kramp d'une instruction universelle à Strasbourg (2). C'est ainsi qu'à la fin du siècle une activité mathématique a rayonné d'un centre allemand d'instruction supérieure. Pendant les trente premières années l'étude des mathématiques supérieures resta sensiblement au degré qu'il venait d'atteindre. On sait que Gauss était peu disposé à introduire des changements ; il se confina sur sa « hauteur solitaire », et correspondait presque exclusivement avec des astronomes, il fut satisfait de savoir l'enseignement des branches élémentaires, courant entre les mains capables de maîtres tels que Thibaut depuis (1802 à 1832) et Ulrich (3) depuis 1831. Le monde connaît son influence sur des esprits accessibles, mais cette face de son activité eut à peine à faire avec la didactique mathématique. Il est difficile de rassembler des documents établissant l'infériorité du niveau mathématique dans les universités au commencement du XIX^e^ siècle. Lorsque Bessel, jusqu'alors inspecteur de l'observatoire de Schroeter à Lichienthal, fut appelé en 1806 à Königsberg en P., il se vit obligé, au commencement, de faire des cours de mathématiques pures ; car toute préparation nécessaire à la compréhension de l'Astronomie faisait défaut. Ce n'était pas seulement les connaissances incomplètes des professeurs qui mettaient un obstacle au progrès, mais aussi un principe affirmant que les hautes mathématiques n'avaient rien à faire avec la chaire. Mollweide à Leipzig, un des meilleurs, développe une grande

(1) V. Günther, *Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende*, Erlangen, 1877, p. 1 et ss.

(2) L'importance de cet homme n'a pas encore été relevée au point de vue historique. On lui doit principalement le perfectionnement du calcul des factorielles dont il a fait un usage étendu dans ses profondes recherches sur la réfraction des rayons (*Analyse des refractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg, Leipzig, 1798).

(3) On peut tirer les renseignements qui s'y rapportent dans la correspondance en trois volumes, de Gauss avec Schumacher.

activité pédagogique, et se sert d'ouvrages élémentaires ; mais il n'ose pas aller au delà, parce que « l'analyse exige beaucoup trop d'écritures au tableau » (1).

Ce ne fut que vers 1825 environ, qu'un mouvement puissant prit naissance, balayant avec une rapidité extrême toutes les difficultés, et créant aux mathématiques allemandes la place qu'elles méritaient dans le concours des peuples, ce qui leur avait manqué jusque-là malgré la présence de Gauss. Moebius à Leipzig fut le premier qui osât rompre la glace (2) avec son « calcul barycentrique et son étude géométrique de la Statique ». Depuis 1835, Lejeune Dirichlet était professeur extraordinaire à l'Université de Berlin, et Jacobi à l'Université de Königsberg depuis 1827 et c'est le bien où avait enseigné le grand Kant qui fut le centre d'où une conception supérieure de l'enseignement mathématique devait entreprendre une marche victorieuse à travers l'Allemagne. A ce moment, Bessel prépare des élèves excellents pour l'Astronomie, tandis que le juvénile Fr. Neumann inaugure un enseignement de la Physique mathématique tel que tous ceux qui sont avides de science affluent de toutes les provinces. Peu après Richelot et Hesse se font connaître ; la haute réputation de l'Albertina de Königsberg s'affirme d'année en année. Puis les universités luttent de vitesse, avec des fortunes inégales il est vrai. Sans parler des devoirs imposés à la plupart des professeurs par leur décret et les obligeant à prendre en considération les besoins des élèves dans les cours et exercices, il faut noter que le milieu ambiant créait une certaine crainte nuisible à la publication du meilleur de soi-même. Appelé en 1850 à Erlangen, v. Staudt, un des plus remarquables élèves de Gauss, ne put de longtemps se décider à profaner, pour ainsi dire, sa nouvelle « Géométrie de position » en en faisant l'objet de ses cours publics.

Nous avons atteint ici la limite que nous ne désirons pas dépasser, car l'extension colossale de la théorie et de l'enseignement qui caractérise notre nouvelle époque, dépasse le cadre de ce

(1) Bruhns. *Die Astronomen der Sternwarte auf der Pleissenburg in Leipzig.* Leipzig, 1778, p. 22.

(2) Ouvrage cité au-dessus pages 55 et suivantes. L'ouvrage de Bruhns a l'avantage de nous fournir, par des détails précis, un aperçu de la vie intime du savant, de l'ancien temps, ce qui malheureusement n'est pas très souvent possible.

travail. Nous voulons pourtant jeter encore un coup d'œil rétrospectif sur l'enseignement moyen au XVII[e] siècle, dont nous nous sommes quelque peu détourné, n'ayant pas voulu disloquer nos considérations sur les études universitaires. On verra qu'un développement est ici très reconnaissable, peu rapide il est vrai, mais suffisant pour que le professeur de l'Université, dont les exigences croissaient, obtint autour de lui un auditoire mieux préparé.

C'est au passage d'un siècle à l'autre que nous voyons un spectacle réjouissant. En 1699 le célèbre gymnase Melanchthonianum à Nuremberg, dont l'ancien bâtiment avait été détruit par un incendie et dont l'économie intérieure avait été atteinte par la création d'une académie, plus tard université, dans la ville voisine d'Altdorf, fut reconstitué sur des nouvelles bases ; à cette occasion l'inspecteur de l'école de théologie et philosophie, Feuerlein [1], fit paraître un aperçu historique. Nous y lisons que, voulant rester fidèle aux intentions du fondateur, on assignait aux sciences mathématiques une place assez étendue. Dans la classe inférieure, la sixième, la « Mathesis puerilis » devait être enseignée pendant deux heures, et tout aussi longtemps dans les autres classes la « Mathesis juvenilis », dont le traité du même titre de Sturm nous sert de guide. Nous distinguons clairement dans cette division la conception du grand pédagogue Comenius.

Le discours de Feuerlein exprime de profondes vérités lorsqu'il célèbre les mathématiques comme une gymnastique de l'esprit. Le calcul même, si peu estimé jusqu'à une époque peu reculée [2], est traité d'après une méthode nouvelle et contribue grandement à l'affinement des facultés intellectuelles. On ne pourra pas refuser une complète estime au magistrat nurembergeois pour la façon

[1]) Feuerlein. *Fata des aus Asche von Grund neu erbau'ten Gymnasiums bei Saint-Egidien in Nürnberg*. Nuremberg, 1699. Voir Beier. p. 17.

[2]) D'après notre garant, l'enseignement des mathématiques élémentaires avait été complètement banni du gymnase pendant un temps assez long. Il n'avait, il est vrai, pas beaucoup de valeur, comme cela est indiqué expressément. Cette répudiation d'une branche d'enseignement, désagréable aux philologues, devait être en connexion avec le fait qu'il y avait à Nuremberg, depuis 1500 à peu près, une vraie corporation des maitres de calcul, qui prenaient extrêmement soin de l'instruction de la jeunesse ; ils ne craignaient pas, il faut le dire, la réclame due à la concurrence déloyale. Il y a eu aussi à Nuremberg au XIX[e] siècle (Günther a.a. o. p. 296 et suivantes) de semblables calculateurs, qui d'après leur publications n'en restaient pas aux éléments.

dont il voulait réformer son école municipale, et pour le succès qu'il obtint [1]; on peut être surpris que dans la suite on ne relève pas l'utilité pratique des connaissances mathématiques dans une ville de grand commerce et d'industrie.

Le célèbre réformateur scolaire Auguste-Hermann Francke y parvint en 1702 d'une manière efficace dans le « Paedagogium » fondé par lui quelques années plus tôt; il élabora un règlement scolaire tendant, il est vrai, un peu trop vers l'utilitarisme, mais qui peut passer pour un modèle en son genre. L'édition de ce plan d'études revue et corrigée par Frejer [2] en 1721, a donné pour la première fois, dit Beger [3], aux mathématiques la place qui leur convenait à côté des autres branches d'enseignement. dans son *auszug* Wolf fournit un compendium des plus utiles, et les exercices de topographie élémentaire désirés par Francke ont sans doute contribué en grande partie à familiariser [4] les élèves avec les principes géométriques. Le fait qu'en 1711 le « gymnasium illustre » qui existait dans cette même ville de Halle, ne voulait rien entendre d'un enseignement obligatoire de notre branche [5] fera clairement comprendre la valeur et la nécessité de ce développement des études. La réaction perdit peu à peu du terrain. Déjà le fait que les écoles réales atteintes en grande partie de piétisme, commençaient à rivaliser, timidement à l'origine, avec le gymnase, devait aider les « artes reales ».

Semler à Halle, Hecker à Berlin et d'autres osèrent abandonner quelques points importants de l'ancien plan d'étude ; en repoussant à l'arrière-plan les langues classiques, ils firent gagner les mathématiques et les sciences naturelles en importance. Les tendances philanthropiques de Baxdow et de Campe y contribuèrent

---

[1] Le gymnase Egidianum a eu en Doppelmayr (1705-1750) et de Kordenbusch (1769-1802) d'excellents maitres, qui se firent aussi un nom comme savants.

[2] Les idées et les plans de Francke, ainsi que le principe scolaire des Piétistes ont trouvé une excellente description dans Paulsen (1er volume, p. 550 et suivantes). L'estimation de l'utilité pratique et le mépris de toute connaissance purement théorique proviennent de Ratichius. Francke attribue aux mathématiques un avantage de remplacer la logique sans en avoir les jeux d'esprit inutiles.

[3] Beyer, p. 21.

[4] Les élèves, est-il dit dans les statuts de Francke, seront conduits souvent au jardin des plantes et se livreront à la mesure de hauteurs, longueurs et largeurs des corps de l'espace.

[5] Beyer, p. 23

plus qu'il n'était désirable, car elles traitent toutes les choses qui n'étaient pas immédiatement utiles, avec un certain mépris. Cependant le « Philantropin » de Dessau jouissait d'un excellent maître de mathématiques en la personne de Busse [1] et dans le collège Carolinum à Brunswick, fondé sous les mêmes auspices, on avait prévu des cours de mathématiques assez étendus. Dans de nombreuses publications du XVIII^e^ siècle — nous rappelons l'œuvre de v. Clausberg [2] — on voit s'exprimer le désir que cette partie de la population qui doit renoncer à la fréquentation du gymnase, puisse être cependant rendue accessible à une instruction supérieure. Les membres de la première société mathématique fondée sur le sol allemand [3] n'appartenaient qu'en nombre restreint aux classes vraiment instruites.

L'école des savants se rendait de plus en plus compte de son vrai but, qui consiste à répandre une instruction générale. La Saxe sous ce rapport a donné le bon exemple. En l'année 1721 [4] la « Fürstenschule » de Meissen, illustre depuis longtemps, se décide à instituer un maître de Géométrie, non sans soulever un conflit au sein du conseil des maîtres dont plusieurs prétendant que les heures consacrées à l'arithmétique et à la « Sphaerica » suffisaient amplement. Une institution semblable, « Schulforta » pouvait aussi se glorifier d'un excellent spécialiste en la personne de J.-G.-G. Hübsch [5]. Avant tout il faut citer comme innovateur le recteur de Leipzig, Ernesti, qui prit en 1734 la direction de la célèbre école « Thomasschule », direc-

---

[1] P.-G. Busse enseigna jusqu'en 1800 à Dessau, pour passer ensuite à l'académie de Freiberg. C'est du temps où il était à Dessau, que proviennent les intéressantes études, cependant peu connues, sur les bases de la Statique (GÜNTHER. *Beitrage zur Geschichte der neueren Mathematik*. Ansbach, 1881).

[2] v. CLAUSBERG. *Demonstrative Rechenkunst*. Leipzig, 1732. Cantor est le premier écrivain moderne (3^e^ volume, p. 494 et suivantes) qui rend justice à cette œuvre remarquable et qui souligne en particulier les grands avantages qui la distinguent d'autres publications contemporaines de même espèce.

[3] Voyez *Festschrift der mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200 jahrigen Jubelfestes*. Hambourg, 1890.

Dans cette société très active, les maîtres de calcul incorporés furent longtemps prépondérants, et les exercices sur lesquels ils essayaient leurs forces ne sont pas classés aujourd'hui parmi les plus faciles.

[4] Paulsen, p. 558.

[5] Cantor (3^e^ volume, p. 501) communique des renseignements sur l'*Arithmetica Portensis* de HÜBSCH en 1748.

tion qu'il conserva même après son passage à l'université. Une grande partie des opuscules cités de Heym sont dédiés à ce vaillant pédagogue qui tâcha, avec le plus grand zèle, d'orienter ses élèves vers un savoir assez complet pour qu'on puisse le qualifier d'encyclopédique. Le manuel qu'il composa à ce sujet est digne de l'estime d'un esprit didactique [1]. Le Pedagogium du couvent Bergen, près de Magdebourg, avait reçu de son inspecteur Hahn une excellente direction en ce qui concerne les mathématiques. On voit dans un écrit [2] de ce directeur d'école cité par Beyer, combien il était difficile de satisfaire au manque de maîtres capables, et de quelles lacunes la méthode d'enseignement était souvent affligée. Mais la glace était enfin rompue, et depuis que l'on avait accordé dans les écoles supérieures le droit d'existence à une branche si négligée autrefois, les moyens se présentaient pour parer au mal. On ne peut nier que la marche ne fut lente, et l'essor universel que prit l'instruction allemande après les guerres d'indépendance ne fut pas toujours avantageux aux méthodes exactes, car un soin trop étendu à l'antiquité classique ne laissa que peu de temps aux autres matières de l'enseignement. On peut poser en règle que dans les trois premières décades du XIX^e^ siècle l'enseignement gymnasial allemand ne fut pas très élevé. Ainsi en Bavière l'enseignement de la Trigonométrie ne fut précisé que vers 1860 [3].

Quelques personnalités remarquables furent capables, on peut dire sur leur propre initiative, d'élever le niveau des écoles qu'elles dirigeaient vers un niveau un peu supérieur [4]. La vérité

---

[1] Ernesti. *Initia doctrinae solidioris*. Leipzig, 1734 parait en plusieurs éditions jusqu'à 1783. A côté des théories philosophiques on voit apparaître l'Arithmétique et la Géométrie comme les éléments du « savoir solide », ce sont de brèves comparaisons sans prétention scientifique mais très propres à un but pédagogique.

[2] Hahn. *Gedanken, wie dem künftigen Verfall der Mathematik vorzubeugen. Kl. Bergen*, 1749; Beier, p. 26 et suivantes.

[3] Un essai biographique du recteur d'Ansbach, Elsperger, nous fournit un excellent aperçu sur la manière dont les maîtres choisis des gymnases bavarois comprenaient leurs fonctions; cet essai est dédié à l'homme qui pendant quarante ans a représenté notre branche dans le gymnase de cette ville (*zur Erinnerung an J. B. Friederich*, Ansbach, 1864). Ce maître vraiment excellent, exigeait extraordinairement peu de ses élèves, quant à la quantité, mais il se donnait une peine extrême pour obtenir d'eux un raisonnement correct, et ce qui lui tenait le plus à cœur, des expressions logiquement exactes.

[4] Nous pouvons citer deux de ces mathématiciens pédagogues qui sont excel-

historique est que le développement extensif et intensif de l'enseignement mathématique s'effectua dans les écoles moyennes à la même époque que dans les universités. La fondation d'institutions réales et techniques, école réale supérieure, gymnase réal, école polytechnique, fut là d'un poids décisif. Une analyse plus précise ne rentre cependant en aucune façon dans le cadre de cet exposé dont l'époque contemporaine doit être entièrement exclue.

S. Günther (Münich).

(Traduit par M. Alph. Bernoud, Genève).

L' « ESPERANTO »

LANGUE AUXILIAIRE ARTIFICIELLE DE M. LE Dr ZAMENHOF,

OUVRANT LES PLUS LARGES PERSPECTIVES A LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE INTERNATIONALE.

Amateur moins que médiocre de voyages à l'étranger par le corps ou par l'esprit, peu sensible au piquant des nouveautés bizarres, moins obéissant encore aux entraînements de la mode, je ne m'étais jamais préoccupé des questions du genre de celle dont je vais entretenir le lecteur. En particulier, je suis demeuré spectateur indifférent des aventures du « Volapuk » : je n'avais même pas ouvert un de ses livres, quoiqu'un ami intime et des plus judicieux, se fût passionné pour lui aux jours de sa grandeur [1].

---

lents ; ce sont B.-J.-F. Müller, enseignant d'abord à Gotha puis à Wiesbaden, et K.-A. Bretschneider, professeur au gymnase réal de Gotha, comme le précédent.

Les succès de ces deux hommes avaient placé leurs institutions dans une position exceptionnelle. Ce n'était pas encore le temps des programmes uniformes, et l'individualité de la vraie valeur à la vraie place pouvait se développer tout aussi librement que — et c'est le revers de la médaille — l'éclosion de nombreuses médiocrités.

[1] Le Volapuk a été proposé en 1879 par M. l'abbé Schleyer, prêtre catholique allemand, qui, dit-on, possédait 56 langues. L'urgence toujours croissante du besoin auquel il promettait satisfaction a fait sa fortune, que de graves défauts

Mais un hasard m'ayant révélé l'existence de l' « Esperanto » (c'était en février dernier), puis m'ayant rendu curieux, malgré un grand scepticisme, de voir un peu par moi-même ce qu'il pouvait bien être, j'ai été frappé, *immédiatement*, de ses merveilleuses qualités intrinsèques et pratiques, et, au même degré, de la simplicité, presque enfantine en apparence, des moyens employés par son auteur pour l'en doter ; ce dernier caractère marque habituellement ce qui est beau, bon, et doit durer.

Il m'a fallu *deux semaines* pour lire l'Esperanto, sans autre peine que la recherche de quelques racines ; une de plus m'a suffi pour être à même d'en écrire une *première page*, qui,

---

ont rendu éphémère. Comme langue internationale, il a des qualités dont aucune de ses aînées ne paraît avoir été pourvue ; et, si la table était rase, il est vraisemblable que la netteté de ses principes le rendrait préférable à la langue naturelle la moins imparfaite. Ceci explique son commencement de succès, en rendant des plus honorables la tentative de son auteur. Mais son mécanisme n'était pas encore assez simple, son vocabulaire surtout était très difficile à retenir, bizarre jusqu'à répulsion ; d'où l'oubli où il est promptement tombé. (En Autriche cependant, où l'on souffre beaucoup du nombre et de la divergence des dialectes, on dit qu'il lui resterait un millier ou deux d'adeptes).

Voici un échantillon de Volapuk ; je l'emprunte à la conférence publique sur les langues internationales, faite le 10 janvier dernier dans un amphithéâtre de notre Université, par M. Ch. Lambert, mon collègue de philologie, conférence dont la lecture m'a appris le nom même de l'Esperanto et qui m'a fourni plusieurs autres renseignements et appréciations utilisés dans cet article :

« **Edaloh obe penön volapüko, bi spodel rusänik oba pebüdom al « pläg militik plo vigs fol, e bi cliloh das volapük binom pepaköl ya « levemo in zif olik.** »

En français :

« *Je me suis permis d'écrire cette lettre en volapuk, parce que mon secrétaire russe « a été appelé pour faire ses vingt-huit jours, et parce que j'ai appris que le vola- « puk est déjà fort répandu dans votre ville* ».

La traduction de cette phrase en Esperanto rendra évidente la supériorité de la langue de M. le Dr Zamenhof :

« Mi permesis al mi skribi tiun ĉi leteron esperante. ĉar mia sekretario « rusa estis vokita por fari siajn dudek-ok tagojn de militista servado kaj « mi sciiĝis ke Esperanto jam estas tre vastigita en via urbo. »

Toute créance à la possibilité d'une langue internationale auxiliaire a été ruinée pour un temps par le dépôt du bilan du Volapuk, avec un passif fort lourd, fait presqu'aussitôt après l'acquisition d'un crédit sans précédent. Au lieu d'imputer le sinistre à *l'insuffisance* des moyens essayés, on a incriminé le *but* même de l'entreprise, en la préjugeant, d'après cela, chimérique. *L'Esperanto a cruellement souffert de cette erreur*, qui, SEULE A CETTE HEURE, RETARDE ENCORE SA MARCHE INCESSANTE EN AVANT. Par exemple, un ami du Président de l'*Association des comptables et employés de commerce de Dijon* a ripostè d'abord à ses ouvertures en faveur de l'Esperanto, par ces mots : « Allez-vous nous faire encore le *coup du Volapuk* ? »

d'emblée, s'est trouvée assez passable pour n'avoir pas été dédaignée par une revue écrite en cette langue (*L'Esperantiste*, où l'on trouverait cet essai dans le *Supplément* du numéro de mars 1900, sous le titre Io el Agenco. V. note finale). J'ai recommencé plusieurs fois l'expérience avec un succès croissant, et, depuis longtemps, je lis l'Esperanto presque aussi facilement que le français ; de même, je l'écrirais et le parlerais, si je m'exerçais un peu. Je peux donc, au même prix si minime, *garantir les mêmes résultats à tout sujet habitué aussi aux travaux de l'esprit*.

S'il est une chose banale au monde, c'est à coup sûr l'utilité, pour les sciences, pour le commerce, pour les voyages, d'un instrument linguistique dont la découverte amènerait tout à coup les peuples civilisés à une situation relative très voisine de celle où l'unification de leurs idiômes sans nombre viendrait à les placer ; les penseurs le répètent depuis Bacon ; les chercheurs, nous racontent les érudits, n'ont pas inventé moins de cent cinquante langues internationales pendant le cours des deux derniers siècles [1]. Or nous passédons maintenant cet instrument amené

---

(1) La valeur propre de l'Esperanto et sa réussite, attestées par le nombre de ses adeptes dont la croissance annuelle ne cesse plus de s'accélérer de toutes parts, n'a pas encore paralysé l'imagination des inventeurs de langues internationales, qui, s'ils étaient mieux informés ou plus consciencieux, reculeraient au contraire devant le grave inconvénient de ne remplacer ainsi la confusion des langues naturelles que par celle des langues artificielles. A Paris seulement, on a vu paraître la « Langue bleue » (ou « Bolak ») en 1899, annoncer le « Spokil » en 1900.

M. le Dr Ad. Nicolas, médecin de la marine, en retraite, maintenant médecin consultant à la Bourboule, a resumé les principes du « Spokil » dans une brochure dont M. Vallin a remis l'hommage à l'Académie de Médecine au cours de sa séance du 6 mars dernier (V. le *Bulletin* de cette Académie). Dans cette communication, M. Vallin parle du latin et du Volapuk, mais *non de l'Esperanto*, omission semblant indiquer que *la langue de M. le Dr Zamenhof n'est encore connue ni de M. le Dr Nicolas, ni de l'Académie de Médecine*. Le seul détail dans lequel M. Vallin soit entré au sujet du « Spokil » est la production de la phrase « **Dai vi braima** » qui, dans cette langue, traduirait les mots français « *Avez-vous du pain?* » Ici (comme partout ailleurs) l'avantage reste évidemment à l'Esperanto, qui dirait, lui : « **Ĉu vi havas panon?** »

Quant à la « Langue bleue », elle s'agite beaucoup, en ce moment même, par des réclames et par des brochures déjà parues, ou annoncées nombreuses, où la *couleur bleue* est effectivement employée pour l'impression de leurs chemises et prospectus ; mais je dois mettre le public en garde contre ses entreprises. Si, comme il est permis de le penser d'après son ouvrage même, contenant mention de l'Esperanto (*Resumé théorique*, p. 124) et de sa date, postérieure de douze années à celui-ci, l'auteur de la « Langue bleue » a eu connaissance de l'œuvre de M. le Dr Zamenhof, on est forcé de convenir qu'il en a tiré bien maigre profit. Pour

à perfection, dans la langue Esperanto qui, partout, s'implante peu à peu, presqu'à notre insu. Aussitôt édifié sur ses mérites et devenu capable d'en parler pertinemment, j'ai donc eu à cœur de le recommander au monde scientifique, auquel il rendrait si promptement de si éminents services, qui l'ignore, même à Paris, autant qu'avant quatre mois je l'ignorais moi-même ; d'où ma lettre publiée par la *Revue générale des sciences pures et appliquées* du 15 avril dernier, puis ma réponse, faite en juin, à la question sur l'Esperanto posée en mai dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens*. Ces écrits (avant eux, mon allocution dans une Conférence faite le 28 mars, avec le concours de M. Lambert (V. note initiale), pour le commerce de Dijon et sous le haut patronage de sa Chambre) ont réussi à exciter un commencement d'attention, et des hommes de science dont l'initiative, le

---

en juger, et sans parler des étrangetés et puérilités pompeuses qui remplissent la *Grammaire abregee de la Langue bleue*, il suffirait de mettre ses 61 pages gr. in-8° (le *Resumé theorique* a, lui, 116 p.) en regard des 7 pages gr. in-16 que la grammaire Esperanto occupe seulement dans le *Manuel complet* (V. note finale). Mais on peut, tout aussi bien, comparer ces exemples de « Langue bleue » présentés à la page 57 de la *Grammaire abrégée* à leurs traductions, en Esperanto que j'y ai ajoutées :

(L. B. **Et nu maki sfa, ska te nu vilo, ku sta maki ad ete.**
(Fr.) *Ne fais pas à autrui ce que tu ne voudrais pas qu'on te fît à toi-même.*
(Esp.) Ne faru al aliaj kion ci ne volus ke oni faru al ci mem.
(L. B.) **Spa lag tenko sae plesu.**
(Fr. *Chaque âge a ses plaisirs.*
(Esp.) Cia ago havas siajn plezurojn.
(L. B.) **Ab mest, ab sarf.**
(Fr.) *Tel maître, tel serviteur.*
(Esp. Kia mastro, tia servisto.
Etc.

Il faudra mieux évidemment, pour déraciner l'Esperanto.

Le passage suivant de la dernière page du *Resumé theorique* donne enfin une idée bien suggestive de la simplicité des conditions dans lesquelles se recrutent les *protecteurs* de la « Langue bleue » :

« Aussi l'auteur sollicite-t-il de tous ceux auxquels parviendra son travail la « permission de les compter parmi les protecteurs de la Langue bleue. »

« Si cette demande n'est pas repoussée, l'auteur se croira autorisé à joindre le « nom de chacun des détenteurs de ce volume à la liste mentionnée au verso de « la couverture : *Liste des* DONATEURS *et* MEMBRES ADHÉRENTS. »

Nous, même inconscients, ces protecteurs le sont peut-être ; mais leur nombre peut suppléer à leur tiédeur, puisque l'exemplaire qui m'a fourni ces lignes est un « hommage » numéroté 12746. A en juger par des cas particuliers certains, les noms et adresses des personnes que ces hommages favorisent seraient principalement fournis à l'auteur de la « Langue bleue » par les listes des nouvelles affiliations à la *Société pour la propagation de l'Esperanto*, qu'il y a lieu, chaque mois, de publier dans *L'Esperantiste*.

dévouement au progrès, ne se reposent guère, je citerai MM. Laisant, Lemoine et Fehr, directeurs de *L'Intermédiaire des Mathématiciens* et de *L'Enseignement mathématique*, m'ont fait l'honneur de me demander un exposé plus détaillé de la question, le jugeant utile aux intérêts dont ils sont incessamment préoccupés. C'est cet exposé que je vais tenter, n'ayant jamais surmonté avec plus d'empressement cette sorte de dégoût que les choses les plus belles finissent toujours par nous inspirer, quand elles nous sont devenues trop familières.

Avant d'entrer au cœur de mon sujet, je tiens à faire concevoir *à priori* la possibilité de la découverte que je vais analyser, à expliquer d'avance son succès, en dissipant une illusion dont j'étais imbu comme le premier venu avant que l'Esperanto n'eût dessillé mes yeux.

On tient pour difficile toute langue non maternelle. Certes, on a raison en cela, si l'on ne songe qu'aux langues *naturelles*, les faits personnels sont hélas ! trop nombreux pour l'attester ; mais on a tort, et mille fois, si l'on veut étendre cette affirmation à toute langue imaginable, prétendre qu'une langue artificielle est impossible à construire facile.

Une langue *naturelle* quelconque est l'œuvre de millions d'êtres humains dont l'immense majorité est restée sans culture intellectuelle, qui, attentifs individuellement aux nécessités de leur vie animale et autre, se concertant, plus ou moins en nombre, plus ou moins consciemment, dans les actes collectifs de leurs familles, tribus, peuplades..., n'en ont pas moins été, au point de vue linguistique, dépourvus de toute prévoyance, de toute réflexion, de toute préoccupation concertée : tel, le pâtis communal dont chacun jouit à l'aventure, comme il peut, d'où personne n'extirpe une ronce, n'enlève un tas de décombres. De plus, chaque génération, en naissant, a été condamnée, presque sous peine de mort, à accepter, telle quelle et sans discussion, la succession linguistique de ses aînées ; tel encore, le chemin tortueux, étranglé, rocailleux, à fondrières, à pentes impossibles, que le charretier maudit, que pourtant on emploie parce qu'on l'a trouvé seul frayé.

Il n'est donc pas étonnant que les complications ridicules, les

irrégularités, les inconséquences, les contradictions même, fourmillent dans toutes les langues naturelles, qu'elles soient rebutantes et ardues pour les bouches et les oreilles qui ne les ont pas pratiquées depuis le berceau; c'est précisément le contraire qui serait surprenant.

A peine les grands écrivains ont-ils pu régler des filets dans ces torrents de mots et de phrases qui charrient les pensées humaines à travers l'espace et les siècles. Quant aux grammairiens, leur rôle s'est réduit à l'enregistrement des mots, à une simple constatation descriptive des faits linguistiques, plus rarement à l'élection des meilleures formes parmi plusieurs coexistantes, presque jamais au redressement des fautes passées en usage. Et en fait, ce que les irrégularités les plus grossières entachent dans toutes les langues naturelles, ce sont surtout les formes des mots essentiels (verbes, ...), cela parce que ces mots ont été les plus maniés par les bouches illettrées des classes inférieures, toujours les plus nombreuses. Une langue de sauvages est un village préhistorique dans toute sa misère; celle d'un peuple à civilisation avancée est une de ces grandes villes très anciennes, où l'on ne se retrouve pas, où l'on voit tout, palais et masures, boulevards superbes et ruelles sordides.

Une langue *artificielle* se présente dans des conditions tout autres : son auteur, s'il est instruit, dispose de l'héritage linguistique des nations, du trésor de l'expérience des siècles, que les théoriciens ont conservé pour lui; n'ayant à compter qu'avec lui-même, il peut en outre démolir jusqu'à table rase, reconstruire à loisir, à sa guise. Si donc il est habile, il nous fera une de ces vastes cités américaines, bâties en dix ans, prétend-on, où manquent assurément ces palais, temples, ..., légués par le génie d'autres âges à l'admiration de la postérité, à son fétichisme quelquefois, mais où, grandes et petites, les rues ont été, d'avance, tracées au cordeau, où les constructions publiques et privées ont été distribuées, aménagées, au gré des besoins et de la commodité de la population, au gré des exigences du confort, même du luxe modernes. Tel on trouvera l'Esperanto, si du moins on veut regarder.

Je dois encore soustraire le lecteur à une méprise trop fréquente qui nuit infiniment à l'Esperanto, et, peut-être, aurais-je

dû commencer par là, tant cette méprise est grave. Quantité de personnes, qui n'ont pas bien réfléchi, s'imaginent qu'une langue internationale ne peut rendre des services qu'à la condition d'être *universelle* et *exclusive*, c'est-à-dire de s'être *substituée partout* aux langues naturelles, même entre habitants d'une même ville, même dans les bouches de la populace ; et, comme une pareille substitution est évidemment impossible, ceci tout au moins pendant l'avenir accessible aux conjectures de la génération présente, ces personnes ne veulent entendre parler d'aucune langue internationale, les déclarant toutes non viables [1].

Que ces visées ambitieuses, presque aussi chimériques que la poursuite du mouvement perpétuel, aient hanté, hantent toujours des esprits fascinés par l'utopie, c'est là un fait certain ; mais *il n'est pas celui des promoteurs de l'Esperanto*. Ces derniers veulent seulement placer *à côté* de chaque langue naturelle, laissée entièrement libre, en dehors de ceci, dans l'accomplissement de sa fonction *intérieure* et dans son évolution future, un idiome AUXILIAIRE commun, intervenant aussitôt qu'aucune d'elles n'est connue à la fois de deux EUROPÉENS voulant échanger leurs idées par la plume ou par la parole. J'insiste sur ce mot EUROPÉENS, la structure de l'Esperanto ne lui conférant que pour les Européens la facilité dont j'ai parlé ; j'ajoute qu'il ne s'agit que des Européens *déjà en possession d'une instruction moyenne*, tant il serait ridicule de vouloir enseigner cet autre idiome aux paysans, aux ouvriers..., qui déjà parlent fort mal leurs langues maternelles, qui d'ailleurs, et sauf en cas d'expatriation, n'ont aucun besoin de communiquer avec les étrangers *directement*.

Ce rôle est autrement limité, abordable, et l'Esperanto a prouvé qu'il en est capable, en le jouant effectivement déjà dans les circonstances innombrables qui seront rapportées à la fin de cet article. D'ailleurs, l'histoire des signes conventionnels que

---

(1) « ... Il me semble difficile que l'humanité arrive à se fabriquer une langue « *usuelle*, par voie de convention » m'écrivait tout récemment un homme occupant une haute situation dans la presse scientifique française.

« Comme on ne peut espérer inculquer l'Esperanto à *tous les sauvages des cinq parties du monde*,... » ai-je lu, dans la *Revue technique* du 10 mai dernier, sous la plume d'un écrivain qui se trompe ou exagère, qui même se contredit, pour procurer à des railleries un plastron imaginaire.

les hommes ont employés mille fois, était là pour prouver avec surabondance que la communication de la pensée n'est pas un monopole dévolu aux seules langues naturelles. Les signaux maritimes, par exemple (sans parler de ceux du télégraphe de Chappe ou de Morse), ne permettent-ils pas des conversations assez minutieuses entre *deux* navires trop éloignés pour que la voix puisse se faire entendre de l'un à l'autre?

Et, pour provenir d'une cause différente, cette impossibilité a-t-elle d'autres conséquences que la diversité des langues? Cependant, l'emploi des signaux n'est plus raisonnable sur *un même* bâtiment; cependant, il comporte autant de complications et de lenteurs que l'Esperanto de facilité et d'agilité. En ayant égard à la supériorité infinie de la parole et de l'écriture comparées au matériel grossier des signaux proprement dits, en se rappelant que deux individus, étrangers par leurs langues, n'en réussissent pas moins à pratiquer une conversation rudimentaire par quelques mots et des gestes *improvisés;* on est fondé, même *à priori*, à penser qu'un langage conventionnel, *préparé de longue main* et *avec grand soin*, peut rétablir entre ces étrangers la possibilité d'un entretien précis et suivi, oral ou écrit. Or, *le but de l'Esperanto n'a jamais été autre;* il a été effectivement atteint, et maintenant, je vais montrer par quels moyens très simples (1) M. le docteur Zamenhof y a réussi.

S'il est un principe sage dans l'organisation de toute construction, c'est d'utiliser les vieux matériaux autant que faire se peut, car on les a, et ils ont du bon, ayant été éprouvés par le temps. S'il en est un prudent pour qui propose une œuvre nouvelle à l'intelligence du public, alors surtout qu'il s'agit d'une *langue*, c'est de s'écarter le moins possible de ce qui lui était déjà connu, car autrement il lui faut des efforts pour comprendre, et il se détourne. Ces deux préoccupations paraissent s'être impo-

(1) Simples pour les *Européens* seulement, je le répète encore. L'Esperanto n'en promet pas moins deux immenses bienfaits aux Sémites, Touraniens, etc., dont les idiomes n'ont à peu près aucun contact avec les langues indo-germaniques, ni par suite avec lui, puisqu'il n'en est qu'une sorte d'*extrait rectifié*. D'abord la difficulté *nulle* de sa grammaire leur en rendra l'acquisition infiniment plus facile que celle de toute langue naturelle. Ensuite, et dès que la diffusion de l'Esperanto sera avancée en Europe et dans les deux Amériques, ils n'auront plus que cette *seule* langue à apprendre pour devenir polyglottes.

sées sans cesse à l'esprit de M. le docteur Zamenhof : et c'est à cela sans doute que sa langue doit la solidité et la vie qu'on aperçoit immédiatement en elle.

Les *racines*, ces corps simples de la linguistique, s'associant en mots comme ceux de la chimie en sels, ont été tirés de ce qu'il y avait de *bon* et de *commun* dans l'ensemble des langues européennes. Car, à les créer par des assemblages inédits de sons (et de lettres), il y avait ce grave inconvénient de s'imposer un travail colossal pour les rendre inintelligibles ; à les tirer d'une *seule* langue existante, suffisamment riche, il y avait cet autre, de négliger les bonnes choses que les autres langues pouvaient offrir aussi gratuitement, de priver la nouvelle d'un puissant genre de vie, en n'imprimant pas à son essence même, un caractère vraiment *international*, de faire enfin à beaucoup de peuples une injuste défaveur. M. le docteur Zamenhof s'est donc contenté de *trier* toutes ces racines existantes et déjà comprises, avec préférence soigneusement mesurée à leur degré d'extension et de valeur linguistique, puis de les simplifier et de les différencier avec adresse. Voici un spécimen de son travail, consistant en un groupe de douze racines consécutives, extrait de l'Universala vortaro de la lingvo internacia Esperanto (*Dictionnaire universel de la langue internationale Esperanto*) (V. note finale), liste par ordre alphabétique des racines *fondamentales* de la langue :

Makler' (1), *faire le courtier ;*
Makul', *tache ;*
Makzel', *mâchoire ;*
Mal', marque les contraires ; ex : **bon'**, *bon* — **malbon'**, *mauvais ;*
Maleol', *cheville ;*

---

(1) L'Alphabet de l'Esperanto se compose de caractères tous latins, et il diffère fort peu de celui du français.

Les lettres *q*, *x*, *y*, ne sont pas employées par l'Esperanto, non plus que nos sons *u*, *eu* et les voyelles nasales *an*, *on*, *un*, *in*,...

Le **c** s'y prononce *tss :* l'**e**, *e :* le **g** toujours *gue :* le **j**, comme notre *y* dans *yeux*, ou bien comme *ill* mouillées dans *aille*, *eille*, *oille*, *ouille :* l **s**, comme *ss* ; l'**u** comme *oui* long.

L'Esperanto a de plus que le français les consonnes **c̄** (*tch*), **ḡ**, *dj*), **ĥ** (*h* très fortement aspirée comme dans le *ch* du mot allemand *nach*), **j̄** (notre *j*) **s̄** (*ch*), et la voyelle **ŭ** (*ou* bref).

Malgraŭ', *malgré, en dépit de ;*
Malic', *malicieux ;*
Mam', *mamelle ;*
Man', *main ;*
Mana', *manne ;*
Mangan', *manganèse ;*
Manĝ', *manger.*

Au sujet de ce *Dictionnaire*, les points suivants méritent d'être signalés.

Certaines racines, **Malgraŭ**, par exemple, sont des mots *complets*, et peuvent en conséquence être employés immédiatement ; mais elles sont extrêmement rares, et pour être transformées en mots, les autres (elles sont affectées de l'apostrophe (') indiquant une attente, doivent (isolément ou associées éventuellement comme je l'expliquerai tout à l'heure) être pourvues des terminaisons grammaticales marquant les rôles de substantifs, adjectifs, verbes, adverbes qu'elles peuvent jouer *presque indistinctement* dans le discours. C'est là une des causes de la simplicité de l'Esperanto et de la brièveté de ses dictionnaires. Ex. : **Manĝi** (infinitif de verbe), *manger ;* **manĝo** (substantif), *action de manger, repas ;* **manĝa** (adjectif), *concernant le repas*, comme **tablo manĝa**, *table servant à manger ;* **manĝe** (adverbe), *de la manière dont on mange*, etc. (1).

Ces racines, y compris une trentaine de suffixes modificateurs (et préfixes) à fonctions générales, y compris les terminaisons grammaticales (au nombre total de 17 seulement), qui, toutes aussi, figurent dans le *Dictionnaire*, sont au nombre infime de 3 000 à 3 500. Mais on en tire des mots composés, dont le nombre devient alors illimité, en les associant par deux, trois, même davantage, ceci surtout avec intervention des suffixes, dans tous les cas, bien entendu, où les sens des racines se prêtent à ces associations.

Ex. : **makleristo**, *courtier* (le suffixe **ist'** marquant les professions, les occupations spéciales) ; **inkomakulo**, *tache d'encre ;*

(1) *Invariablement* et *exclusivement*, les substantifs (au singulier, cas sujet), les adjectifs (id.), les infinitifs des verbes, les adverbes,... sont marqués par les finales **o. a. i. e....**

olemakulo, *tache d'huile* ; **makuliĝi**, *se tacher* (le suffixe **iĝ** marquant l'action de *devenir*) ; **malmakuliĝi**, *détacher, enlever des taches* (le préfixe **mal'** marquant tous les contraires, et le suffixe **ig'** marquant l'action de *faire devenir*) ; **maliceco**, *malice* (sens abstrait précisé par **ec'**) ; **malicaĵo**, *une malice* (sens concret marqué par **aĵ'**) ; **maliculo**, *homme malicieux* (**ul'** s'appliquant à l'être humain que caractérise l'idée attachée à la racine) ; **matenmanĝo**, *repas du matin, premier déjeuner* ; **tagmanĝa**, *qui concerne le repas du milieu du jour* ; **vespermanĝi**, *faire le repas du soir, dîner* ; **manĝo-ĉambro**, *salle à manger* ; **manĝebla**, *mangeable* (**ebl'** marquant la capacité, la possibilité) ; **nemanĝebla**, *qui ne peut se manger* (**ne** traduisant notre *non*) ; **manĝema**, *qui aime à manger* (le suffixe **em'** affecté à l'indication d'un penchant, d'une habitude) ; etc.

Un mécanisme d'un pareil rendement multiplie indéfiniment les néologismes en leur conférant d'emblée le droit de cité des autres mots ; il fait de l'Esperanto la langue la plus riche, et de beaucoup, qui ait jamais existé, la plus facile à manier, cependant, même sans lexiques. Le seul préfixe **mal'**, par exemple, économise la moitié des mots dont les sens possèdent des contraires, en même temps qu'il supprime cette gêne apportée par toutes les langues où les mots manquent pour exprimer certains contraires. Ne contenant, comme je l'ai dit, que les racines *fondamentales* de la langue, le *Dictionnaire universel* a été allégé de toutes les racines ayant par elles-mêmes un sens *international* certain, comme *télégraphique, la photographie, un photographe* ; pour les traduire en Esperanto, il suffit effectivement de leur ajouter des terminaisons grammaticales convenables, après les avoir écrits, au besoin transformés au moyen des signes et conventions de la langue : **telegrafa, la fotografo** (ou **fotografado**), **fotografisto** [1].

---

[1] Les 3 200 racines fondamentales de l'Esperanto, consignées dans l'**Universala vortaro** donneraient, prises *deux à deux* seulement, plus de 10 000 000 *d'arrangements*, et il en resterait encore 2 500 000 *mots*, si l'on diminuait ce nombre de ses trois quarts pour faire état des arrangements dépourvus de sens et des diverses formes d'une même racine (simple ou double) que fournit le jeu des terminaisons grammaticales. Le *Dictionnaire de l'Académie Française* n'ayant pas plus de 25 000 mots dans sa nomenclature, à ce que M. Lambert m'a assuré, *l'Esperanto serait ainsi cent fois plus riche que le français*, en mots seulement et sans tenir

Comme on a pu l'apercevoir, ces associations de racines, soit entre elles, les suffixes compris, soit avec les terminaisons grammaticales, s'opèrent toujours *par simple juxtaposition*, *sans la moindre altération* aux points de contact ; leur caractère constant est donc, en empruntant encore des expressions au langage de la chimie, d'être *non des combinaisons* où elles seraient devenues méconnaissables, mais de *simples mélanges*, où chaque atome linguistique a conservé toutes les marques extérieures de son individualité, et peut, dès lors, être reconnu par une *analyse immédiate*. En d'autres termes : *tout mot Esperanto est, exactement et à vue, décomposable en éléments invariables dont chacun est inscrit dans le dictionnaire*. Une mécanique d'une telle simplicité lucide n'appartient à aucune langue naturelle : elle explique *à priori* l'extraordinaire facilité tant de l'écriture que de la lecture de l'Esperanto. Et même, elle fait un véritable jeu d'enfant, de la traduction d'un texte Esperanto quelconque *pour qui ne posséderait encore aucune notion de la langue*. Cette expérience saisissante, qui fait saillir en quelques minutes tout le mérite intrinsèque de l'Esperanto, peut être recommencée par le *premier venu* au moyen des textes et du fragment de lexique que contient la petite brochure de M. de Beaufront, intitulée : « *L'Esperanto, seule vraie solution de la langue internationale* » (1).

L'examen des douze racines transcrites tout à l'heure montre avec évidence que les Français et autres néo-latins n'ont pas à se plaindre du choix des sources où elles ont été puisées. L'étude de l'**Universala Vortaro** tout entier conduit à la même appréciation sur l'ensemble des autres : il ne m'a pas paru contenir en proportion supérieure à un quart, des racines exclusivement anglaises, allemandes ou ayant d'autres origines étrangères au latin. C'est une très grande faveur accordée, en fait, aux peuples dont les langues sont de simples transformations de cette dernière,

---

compte des *tournures*. Si exagéré que ce dernier chiffre puisse paraître, il est probablement au-dessous de la vérité, car il laisse en dehors de lui les combinaisons de plus de deux racines fondamentales, lesquelles sont fort nombreuses, surtout quand les suffixes interviennent, et aussi les combinaisons des racines *internationales* omises dans l'**Universala vortaro**, soit entre elles, soit avec les racines fondamentales.

(1) Prix : Fr. 0,15, à l'adresse indiquée dans la note finale.

comme les Français, Italiens..., et nous, Français, nous pouvons nous en applaudir, mais elle n'est pas imputable à une intention, ni à une maladresse. Le fait provient uniquement de ce que le latin (ou les langues plus anciennes d'où il a dérivé), ont laissé des empreintes particulièrement étendues et profondes dans toutes les langues européennes, et qu'ainsi les racines existant dans le latin avaient, relativement aux autres, une internationalité préexistante, une commodité peut-être très supérieures. De cet aspect franchement néo-latin de l'Esperanto, on a voulu conclure que, bon pour les peuples du Midi de l'Europe, il ne pourrait être accepté par les autres; mais cette assertion, infirmée une première fois pour la nationalité *russe* de M. le docteur Zamenhof, créateur de la langue, est démentie catégoriquement par la statistique de la diffusion de l'Esperanto. L'**Adresaro de la Esperantistoj**, remis à jour chaque année par les soins de M. le docteur Zamenhof, fait connaître, par listes numérotées successives, les noms et adresses de tous les adeptes de l'Esperanto qui ont demandé à s'y faire inscrire. (Prix de chaque inscription : fr. 0,40, pour couvrir les frais.) Or, dans le dernier fascicule paru (1), je trouve que, sur 365 inscriptions opérées pendant l'année 1899, 198, soit *plus de la moitié*, sont celles de *Russes appartenant à toutes les provinces de leur pays*. Si donc, l'Esperanto n'était facile que pour les néo-latins, les individus parlant des idiomes si variés, qui peuplent l'empire moscovite, ne lui viendraient pas en une telle proportion.

La *grammaire* de l'Esperanto n'occupe dans le *Manuel complet* (V. note finale) que 7 pages in-16, alphabet et règles de la prononciation comprises : elle est si simple, qu'il m'est possible d'en rappeler en quelques lignes presque tous les principes généraux.

Article. — Point d'article indéfini ; le seul article défini **la** absolument invariable : **homo** *un homme*, **la homo** *l'homme*, **la homoj** *les hommes*.

Substantif. — Point de genres grammaticaux (le nom d'un

(1) **Serio XX**. Prix : Fr. 0,40, à l'adresse indiquée dans la note finale.

être *vivant* du sexe féminin se déduisant de celui de l'être mâle de la même espèce par la simple addition du suffixe in' : viro *un homme*, virino *une femme*) ; *tous* les substantifs ont la terminaison o au cas sujet du singulier ; on y ajoute j pour le cas sujet du pluriel, puis n à ces deux cas pour obtenir les cas régimes directs des deux nombres : la viro, la viroj. *l'homme*, *les hommes* (nominatifs), la viron, la viroju, *l'homme*, *les hommes* (accusatifs). Comme en français, des prépositions se placent avant les cas sujets pour former les autres cas : de la viro, *de* ou *par l'homme*, al la viroj, *aux hommes*.

Adjectifs. — Ses formes ne diffèrent que par la substitution de a à o dans celles du substantif, avec lequel il s'accorde comme épithète ou attribut : viro bona, viroj bonaj, *un homme bon*, *des hommes bons* (nominatifs), virinon bonan, virinojn bonajn. *une femme bonne*, *des femmes bonnes* (accusatifs).

Verbe. — Dans un même temps quelconque, l'Esperanto emploie une *seule* forme pour *toutes* les personnes (le pronom personnel ou un autre sujet opérant suffisamment la distinction) ; en outre, il a économisé les formes de notre subjonctif en lui substituant tantôt l'indicatif, tantôt l'impératif.

De cette manière les terminaisons propres à *tous* les verbes se réduisent aux 12 que voici :

	Indicatif	Participe actif	Participe passif
Présent	as	ant'	avec addition suivant les circonstances, des finales o, a, e caractérisant les substantifs, adjectifs et adverbes.	at'	même observation.
Passé	is	int'		it'	
Futur	os	ont'		ot'	

Conditionnel	Impératif	Infinitif
us	u	i

Les temps composés, ceux de la voix passive, sont ensuite de simples combinaisons très claires et fort commodes du *seul* verbe auxiliaire est' *être*, avec les six formes des participes inscrites ci-dessus.

Adverbe. — *Tous* les adverbes (dérivés) se forment par l'addition de la finale e au radical : home, vire, bone, *humainement*, *virilement*, *bien*.

La forme adverbiale attribuée éventuellement aux participes des verbes est un artifice nouveau qui est extrêmement commode : manĝante, manĝinte.... *en mangeant, en ayant mangé...*

Quant aux pronoms, ..., aux mots invariables comme les adverbes de lieu et de temps, ..., comme les prépositions, leur maniement est tracé par des règles particulières, toujours fort logiques, dont l'assimilation suit immédiatement la moindre pratique.

Il n'y a *point de syntaxe*, la construction des phrases n'étant guère soumise qu'aux règles du bon sens. L'existence d'un régime direct donne à la langue une très grande facilité d'inversion, et rend les obscurités et amphibologies faciles à éviter.

La production d'un texte, sa traduction littérale et quelques mots d'analyse montreront mieux la consistance de l'Esperanto, et pourront faire apprécier sa facilité sans pareille ; surtout on percevra cette impression saisissante de *chose à demi connue déjà*, que sa lecture ne manque jamais d'exciter. J'emprunte les lignes suivantes à une relation de voyage fort intéressante, que M. F. Postnikov, ingénieur à Vladivostok [1] a publiée dans le *Supplément de l'Esperantiste* de janvier dernier (V. note finale).

KVIN TAGOJ EN FINNUJO

CINQ JOURS EN FINLANDE

. . . En Abo mi vizitis du familiojn kies adresojn mi trovis
. . . *Dans Abo je visitai deux familles dont (les) adresses je trouvai*
en « Adresaro ». Aparte utila por mi estis mia
dans (le) Recueil des adresses. Particulièrement utile pour moi fût mon
konatiĝo kun Sinjoro Reinius, tre estiminda maljunulo,
entrée en connaissance avec Monsieur Reinius, très estimable vieillard,
kiu .... S Reinius parolas nek ruse. nek france. kaj nia in-
qui .... M. Reinius (ne) parle ni (en) russe, ni (en) français, et notre con-
terparolado estis Esperante. Li, ĝis tiu ĉi tempo, neniam havis
versation fut en Esperanto. Lui, jusqu'à ce-ci temps, jamais (n') eût
okazon paroli Esperante: kaj nia interparolado estis. kvan-
occasion (de) parler (en) Esperanto. et notre conversation fût, quoi-
kam malrapida. tamen tre preciza. ĉar.... La vesperon mi pasigis
que lente, cependant très précise, car .... La soirée je passai

---

[1] Port russe sur l'Océan Pacifique.

ĉe la estimataj Gesinjoroj Blomberg, kies nomo estas bone konata
chez les estimés M. et Mad. Blomberg, dont le nom est bien connu
de la legantoj de « Lingvo internacia », ĉar preskaŭ ĉiuj rusaj
des lecteurs de (la) « Langue internationale », car presque tous (les) russes
esperantistoj kiuj vizitis la Stokholman Ekspozicion. jam skri-
esperantistes qui ont visité la Stokholmienne Exposition déjà ont écrit
badis pri la gastama akcepto farita al ili de tiu ĉi estiminda
maintes fois sur le hospitalier accueil fait à eux par cette-ci estimable
familio... En Esperanto parolis facile nur la plej maljunula
famille... En Esperanto parlait facilement seulement la plus âgée
filino ... Ruse bone parolis la mastrino. Ĉar mi ne
fille ... (En) russe bien parlait la maîtresse de la maison. Comme je ne
komprenas la svedan kaj finnan lingvojn. ni interparoladis
comprends (pas) les suéduoise et finnoise langues, nous conversâmes
Esperante kaj ruse ...
(en) Esperanto et (en) russe ...

Voici l'analyse des principaux mots de ce texte :

kvin. du : adjectifs numéraux cardinaux invariables. — **kvina, dua** *cinquième, deuxième* (par le rang); **kvine, due**, *cinquièmement, deuxièmement.*

tagoj : **tag'** *jour;* **o** finale caractéristique de tous les substantifs (au singulier et en dehors du cas régime direct), **j** finale des pluriels (en dehors du cas régime direct) — **taga** (adjectif) *qui concerne le jour*; **tage** (adverbe) *pendant le jour.*

Finnujo : **Finn'** *finnois* ; **uj'** suffixe signifiant *qui porte, qui contient, renferme, est peuplé de;* **o** finale du substantif à un cas du singulier non régime direct.

mi : le cas régime direct serait **min** *me, moi.*

vizitis : **vizit'** *visiter :* **is** terminaison commune à toutes les personnes de tous les temps passés de tous les verbes.

familiojn : **famili'** *famille*; **familioj**, voir **tagoj**; **n** finale des cas régimes directs.

kies : *à qui ? dont, duquel;* invariable.

adresojn : **adres'** racine déjà internationale : voir **familiojn**. — L'article français n'est pas rendu à cause de *kies* qui le contient implicitement et équivaut à *whose* anglais.

trovis : **trov'** *trouver*; voir **vizitis.**

Adresaro : voir **adresojn**; **ar'** *une réunion de certains objets :* voir **Finnujo.**

aparte : **apart'** *qui est à part, séparé :* **e** finale des adverbes.

utila : **util'** *utile :* **a** finale des adjectifs (à tout cas du singulier, non régime direct). — **La utilo** *l'utile;* **utile**, *utilement.*

mia : adjectif possessif formé par la juxtaposition de la finale adjective **a** à la racine **mi.**

konatiĝo : **kon'** *connaître ;* **at'** suffixe du participe passif présent : **iĝ** *se faire, devenir ;* voir **Finnujo, Adresaro.**

Sinjoro : l'adjonction du suffixe féminisant **in'** donnerait **Sinjorino** *Madame.*

estiminda : **estim'** *estimer;* **ind'** *qui mérite... est digne de...;* voir **utila, mia.**

maljunulo : **jun'** *jeune;* **ul'** *qui est caractérisé par telle ou telle qualité;* **mal'** marque les contraires; voir **Finnujo, Adresaro, konatiĝo, Sinjoro.** — Economie d'un mot spécial pour traduire *vieillard.*

parolas : **parol'** *parler;* **as** terminaison de toutes les personnes du présent de l'indicatif de tous les verbes. — **Parola, parole** signifieraient *verbal, verbalement.* — On remarquera la suppression de notre négation *ne* placée avant le verbe, dont l'usage français peut seul masquer la complète inutilité, même l'action destructive sur les négations suivantes :

ruse : **rus'** racine déjà internationale; voir **aparte.** — On remarquera le caractère précis, quoique laconique, de cette forme adverbiale.

nia : **ni** *nous;* voir **utila, mia, estiminda.**

interparolado : **inter** *entre;* voir **parolas;** **ad'** marque *durée dans l'action;* voir **Finnujo,** etc.

Li : pronom personnel 3e personne du singulier, cas non régime direct, pour *un homme* (l'accusatif est **lin**). — On emploierait **ŝi,** si le sujet représenté était une femme, **ĝi** s'il s'agissait d'un enfant dont le sexe n'est pas pris en considération, ou d'un animal, ou d'un autre objet quelconque.

havis : **hav'** *avoir;* voir **vizitis, trovis.**

okazon : **okaz'** *avoir lieu;* voir **Finnujo.... familiojn.....**

paroli : voir **parolas;** **i** finale de l'infinitif présent dans tous les verbes. — Devant les infinitifs, l'Esperanto supprime nos prépositions *de, à,* à moins qu'elles ne signifient *pour,* auquel cas il les rend par *por.*

malrapida : **rapid'** *rapide* : voir **utila, mia,** etc. : voir **maljunulo.** — Nouvel emploi de **mal'** suffixe des contraires, économisant ici une traduction spéciale de notre adjectif *lent.*

pasigis : **pas'** *passer;* **ig'** faire; voir **vizitis, trovis, havis;** littéralement, *je fis passer.* Le temps passe; mais on le fait passer.

estimataj : voir **estiminda, konatiĝo;** **aj** marque que ce participe passif passé est pris comme adjectif (épithète) à un cas du pluriel, non régime direct.

Gesinjoroj : voir **sinjoro, tagoj;** le préfixe **ge'** marque la réunion des deux sexes : **gepatroj** les parents (père et mère).

nomo : **nom'** *nom;* voir **Finnujo,** etc. — Aucun nom propre n'est précédé de l'article en Esperanto, la logique s'y opposant

legantoj : **leg'** *lire;* **ant'** suffixe du participe actif présent : **oj** terminaison qui en fait un substantif pris à un cas du pluriel non régime direct (voir **tagoj**)

lingvo : **lingv'** *langue* (parlée); voir **Finnujo,** etc. — *Langue,* terme d'anatomie, correspondrait à la racine **lang'.**

internacia : voir **interparolado;** **naci,** *nation;* voir **utila, mia,** etc.

c̄iuj : nominatif pluriel de **c̄iu** chacun.

esperantistoj : **ist'** marque la profession, l'occupation spéciale, comme dans nos mots *ébéniste, artiste, violoniste,...*

Stokholman : nom propre rendu adjectif, qui réduit à un seul mot notre locution *de Stokholm*.

Ekspozicion : on remarquera la combinaison de consonnes **ks** permettant à l'Esperanto de se passer de notre *x*. — La succession **kz** remplit le même office dans **ekzemple** *par exemple*.

gastama : **gast'** hôte ; **am'** aimer : voir **utila**, etc.

ili : pluriel de **li** (et auss' de **s̄i**, **ḡi** en même temps). — Le cas régime direct est **ilin**.

facile : **facil'** facile : voir **aparte**, **ruse**, etc.

filino : **fil'** *fils* ; **in'** suffixe féminisant le sens de la racine : voir **Finnujo**, etc.

mastrino : **mastr'** *maître de la maison* ; voir **filino**.

L'affectation constante d'une seule et même lettre à tout son distinct, comme d'une seule prononciation à chaque lettre, quel que soit son entourage, supprime en bloc, dans l'Esperanto, les difficultés orthographiques et phonétiques qui rendent si ardue l'étude de la plupart des langues naturelles. L'exclusion rigoureuse de conflits de consonnes et de sons d'une émission pénible ou imparfaite pour certains peuples (de nos *u* et *eu* par exemple) en rendent la prononciation coulante pour tous les Européens. L'*expérience* a permis de constater que les individus les plus éloignés par leurs langages naturels s'entendent fort bien en Esperanto, quoique sa prononciation puisse varier quelque peu de l'un à l'autre, comme celle du Français, de la Picardie à la Provence. L'oreille est soulagée dans ses efforts pour découper une phrase en ses divers mots, par l'imposition constante de l'*accent tonique* à l'avant-dernière syllabe de chacun de ceux-ci. Elle perçoit dans l'Esperanto parlé ce mélange de douceur et d'éclat qui caractérise l'Italien et nos patois méridionaux, mélange un peu monotone, toutefois, à cause de la suppression des sons nasaux et des accouplements de consonnes qui ont de la dureté, à cause surtout du nombre infime des terminaisons grammaticales possibles.

Le spécimen de la langue de M. le Dr Zamenhof que j'ai montré tout à l'heure, rendra moins incroyable, je l'espère, cette facilité de l'Esperanto, à lire, à écrire, à parler, dont aucun idiome connu n'approche même de loin, et je n'excepte pas le latin ecclésiastique ou scientifique.

J'aimerais bien moins à être cru sur parole, qu'à voir mes lecteurs contrôler par eux-mêmes l'exactitude de mes assertions, car ce serait autant d'amis nouveaux pour l'Esperanto, autant de partisans gagnés à l'union des races européennes, réalisée par la chute des barrières linguistiques entre les classes supérieures et moyennes. Les résultats de mon expérience *personnelle* rapportés au début, me rendent certain qu'en s'imposant, par jour, deux heures d'un travail n'ayant rien de désagréable, tout homme instruit arrivera *en un mois*, au maximum, à lire tout texte Esperanto sans aucune peine, à écrire la langue bien suffisamment pour être compris (1), même à l'employer, par la voix, à soutenir des conversations *pratiques*, largement au niveau des besoins d'un touriste ; c'est le *nécessaire*. Je ne dis pas qu'au bout d'un temps aussi court, on écrira l'Esperanto élégamment, même seulement avec une entière correction ; mais cela, c'est le *luxe*, auquel un peu de persévérance conduira sûrement. Pour les sujets dont l'instruction littéraire ne dépasse pas la connaissance de leur langue maternelle et de sa grammaire, mettons que l'acquisition de l'Esperanto, poussée grandement au point requis pour les *affaires* commerciales et autres, puisse exiger trois ou quatre mois d'études : que ce travail est minime en comparaison des années absorbées à la culture d'une SEULE langue étrangère naturelle, en regard surtout d'un résultat qui, atteint par tous les autres, équivaudra, en fait, à la possession de TOUTES !

Ma confiance dans l'Esperanto, relativement à son but raisonnable, est beaucoup augmentée par cette circonstance, qu'en fait de dictionnaire Français-Esperanto, il n'existe encore qu'un lexique assez écourté pour tenir, dans le *Manuel complet* (V. note finale), en 83 pages in-16 d'une impression fort lâche, et que, cependant, des ressources aussi exiguës suffisent déjà aux

(1) Un jeune étudiant a soumis à M. Lambert et à moi-même une carte postale qu'il avait écrite en Esperanto, sans connaître la langue depuis plus de huit jours ; certes cette carte était incorrecte, mais elle n'était pas du tout inintelligible. Un de mes amis, un peu mon élève, devenu mon jeune camarade par l'École normale, puis professeur agrégé de mathématiques dans un grand lycée de Paris, m'a fait l'honneur d'apprendre l'Esperanto, simplement parce qu'un hasard lui avait fait savoir que je m'intéresse à cette langue, et il vient de l'employer pour m'écrire une lettre de trois pages, déjà fort bonne ; cependant j'ai la certitude qu'il ne l'avait pas étudiée plus de cinq semaines.

Français qui *veulent* écrire la langue. Quand cette lacune aura été comblée (1), chacun pourrait à la rigueur, écrire l'Esperanto comme déjà il se peut lire (V. plus haut), c'est-à-dire presque instantanément.

Des espérantistes de très haute marque pensent que l'Esperanto possède au plus haut degré les qualités d'une langue littéraire, et il est de fait que sa bibliothèque contient des traductions parfaitement réussies de morceaux à large envergure d'auteurs grecs (de l'antiquité classique), russes, français, anglais, etc. ; on cite notamment une traduction d'*Hamlet*, faite par M. le Dr Zamenhof lui-même, qu'après examen et comparaisons, un professeur d'anglais, auparavant très prévenu, a déclaré supérieure à toutes celles existant en d'autres langues. Je le veux bien, quoique j'imagine difficilement qu'avec des effets acoustiques peu variés, dépourvue de racines profondément jetées dans les sentiments intimes des peuples, privée dans ses mots, de ce pittoresque, de ces hauts reliefs, que les siècles ont pu faire saillir dans les vocables des idiomes nationaux, une langue puisse, au même degré que ceux-ci, parler au *cœur* humain, le remuer profondément. Mais au clairon, au tambour, même à une sirène sémaphorique, quand elle fonctionne bien, ira-t-on reprocher d'être impropres à l'exécution d'un concerto ? Cette question, je l'avoue, ne me préoccupe donc aucunement, comme elle laisse indifférents aussi, je suppose, la plupart de ceux qui appellent de tous leurs vœux le prompt avènement d'une langue internationale. Ils ne songent pas aux *friandises* ; ils veulent seulement que cette langue parle aux *intelligences*, facilement et clairement. Or qu'en richesse et en plasticité précise, l'Esperanto ait le suffisant pour satisfaire à la dernière partie de ce programme aussi surabondamment qu'à la première, c'est ce qui est pour moi hors de doute.

Le premier ouvrage de M. le Dr Zamenhof sur sa langue a paru en 1887 sous la signature **Doktoro Esperanto**, traduction

(1) M. de Beaufront, président de la S. p. p. E. (V. note finale) et auteur d'un grand nombre de publications excellentes sur l'Esperanto, prépare un *Dictionnaire Français Esperanto* complet qui sera publié au premier jour.

dans celle-ci du pseudonyme *docteur Espérant*, d'où le nom qui lui est resté. On raconte qu'avant tout, l'auteur avait voulu en restreindre la première communication à un petit cercle d'amis, et qu'il a eu la patience d'attendre qu'une expérience poursuivie pendant deux ans sur cette échelle minuscule eût démontré la valeur pratique de son œuvre. Puis la propagation extérieure commença, et les progrès de l'Esperanto n'ont plus cessé de grandir, principalement en Russie, pays tourmenté par la diversité des langues indigènes comme l'Autriche où le Volapuk conserverait un reste d'adeptes). Je rappelle (V. note initiale) que le souvenir des déboires essuyés dans la culture du Volapuk a opposé à ce mouvement un très gros et très injuste obstacle extrinsèque qui s'efface trop lentement. Les faits suivants résument la situation présente de l'Esperanto.

Déjà son *Manuel complet* (V. note finale) a dû être traduit en 18 langues différentes (1), et sa bibliothèque contient 150 publications dont quantité, de tous genres, écrites en Esperanto : traductions d'Homère, d'Esope, d'auteurs russes variés, de Shakespeare, de Byron, de Gœthe, de Beaumarchais, ..., quelques ouvrages originaux, jusqu'à un Preĝareto por Katolikoj (*Petit recueil de prières pour les catholiques*) avec « imprimatur » de l'Autorité ecclésiastique.

Il existe des sociétés d'espérantistes en Allemagne, en Suède, en Russie, en France, ... Les plus importantes sont : l'Espero, à Saint-Pétersbourg, approuvée par le Gouvernement russe, et la *Société pour la propagation de l'Esperanto*, en France (V. note finale). Cette dernière fondée en janvier 1898, comptait au 1er janvier 1900, 362 membres, dont 152 Français et 210 étrangers, ceux-ci disséminés presqu'en autant de points du globe : en Nouvelle-Calédonie, du Brésil à l'Alaska, de Vladivostok au Portugal. Pendant les six premiers mois de la présente année 1900, 97 adhérents nouveaux se sont fait inscrire, ce qui correspond à un accroissement annuel de plus de 53 p. 100 dans leur nombre. La présence, parmi les sociétaires, d'employés de commerce et autres, de dames, formant un total fort respectable, montre bien nettement *a posteriori* que la langue

(1) Une dix-neuvième traduction en langue « Este » vient de paraître.

n'est pas accessible seulement aux sujets pourvus d'une instruction supérieure.

L'Espéranto a deux revues, l'une et l'autre mensuelles : l'une, **Lingvo internacia**, publiée d'abord à Upsala, maintenant à Szegzárd (Hongrie) est dans la cinquième année de son existence, rédigée en Esperanto exclusivement. Elle continue la première revue de la langue : **L'Esperantisto**, fondée dès l'année 1888.

L'autre est *L'Espérantiste*, entrée dans sa troisième année (V. note finale) et servant d'organe à la *Société pour la propagation de l'Esperanto*.

Au 1^er^ janvier 1900, il y avait 5 025 espérantistes *ayant fait inscrire leurs noms et adresses dans l'***Adresaro** (V. p. 277), et ce nombre grossit toujours, car je viens d'y être immatriculé avec le n° 5 109. Les deux derniers accroissements annuels ont été : en 1898, de 327 unités venues de 203 villes différentes des deux mondes, en 1899, de 365 numéros donnés à des habitants de 222 villes. Comme je l'ai dit plus haut, la Russie a fourni la bonne moitié de ces apports ; viennent ensuite : la Suède, l'Allemagne, puis la France et autres pays de langue française. Les Anglo-Saxons donnent peu de recrues à l'Esperanto, ce qui peut tenir à l'extension majeure de l'anglais dans l'univers et aussi à ce que, par suite de circonstances particulières, on a longtemps manqué d'un *Manuel* à l'usage des Anglais.

Mais les chiffres ci-dessus ne représentent qu'une faible fraction du nombre réel des espérantistes, car il s'en faut que tous soient affiliés aux Sociétés ou inscrits sur l'**Adresaro**. M. de Beaufront écrivait en 1899 : « Il me semble certain que nous ne serions pas inférieurs à 35 ou 40 000, si tous ceux qui ont prouvé par une lettre suffisamment correcte qu'ils savent la langue nous autorisaient à les porter sur les listes d'adresses ».

J'ignore l'importance du rôle que l'Esperanto peut jouer dans les affaires commerciales de nation à nation, mais je sais qu'il est employé dans mille autres circonstances. « Je puis prouver, écrit le D^r^ J. Ostrowski, de Jalta (Russie) que, sans posséder aucune langue étrangère, je corresponds, au moyen de l'Esperanto avec des personnes de *dix-sept nationalités différentes*, parmi lesquelles des Français, des Allemands, des

Anglais, des Italiens, des Espagnols, des Américains, des Africains, etc. ». A Dijon seulement, on a reçu dans ces derniers temps, des douzaines de lettres et cartes postales, écrites en Esperanto, d'Autriche, de Russie et de Suède; j'en ai envoyé à plusieurs personnes de Paris quelques-unes portant, toutes, leurs marques d'authenticité. Pour leurs auteurs, il ne s'agissait guère que d'échanger des timbres-poste, des cartes postales illustrées; mais il est clair que l'Esperanto se prêterait tout aussi bien à des emplois plus sérieux. Des journaux russes ont raconté les fêtes de Paris en l'honneur de l'empereur Nicolas II, d'après des correspondances en Esperanto reçues quotidiennement par eux d'un jeune Parisien de 15 ans qui était encore sur les bancs du collège. Un écrivain de Saint-Pétersbourg s'en est servi tout récemment pour offrir à un journal de Dijon des correspondances de littérature et d'actualités russes; je lui ai fait une réponse en Esperanto; j'ai écrit ailleurs; même j'ai échangé des lettres avec M. le Dr Zamenhof, honneur dont j'aurais été certainement privé, s'il m'eût fallu lire et écrire du russe pour en bénéficier.

La revue *Concordia*, de Paris, presque chaque mois depuis quatre ans, le *Petit Bleu*, de Bruxelles, chaque semaine depuis quelque temps, ouvrent leurs colonnes à quelques articles écrits en Esperanto. Dans un paquet de numéros de la *Concordia* que j'ai feuilletés, je n'en ai trouvé aucun qui ne contint une ou plusieurs annonces rédigées en Esperanto.

Le texte Esperanto qu'on a lu tout à l'heure nous montre un voyageur à qui cette langue, deux fois dans un jour dans une même ville, a pu, seule, procurer des interlocuteurs; ce fait est loin d'être isolé. Il s'est reproduit à Paris au bénéfice d'un jeune photographe russe qui ne savait pas un mot de français. MM. V. Langlet et E. Etzel, espérantistes suédois, déclarent avoir entrepris, dans le courant de 1895, un voyage à travers la Russie, ce qu'ils n'auraient pu faire avant d'avoir appris l'Esperanto. « Dans les divers lieux où nous nous sommes arrêtés, disent-ils, nous avons rencontré des espérantistes, et nous nous sommes entretenus avec eux sans gêne aucune (en Esperanto), bien que nous ne connaissions pas leur langue et qu'ils ignorassent la nôtre, » etc.

Les longs développements d'où je sors montrent, avec une entière évidence, selon moi, que le problème d'une langue internationale *auxiliaire*, posé depuis si longtemps, ne l'est plus à cette heure, mais qu'il est complètement résolu par l'Esperanto, puisque cette langue, dont le moindre examen fait sauter aux yeux la facilité et la richesse, incroyables autrement, a été acceptée *en fait* par des milliers d'adeptes en nombre toujours croissant, dans toutes les nationalités, dans tous les rangs supérieurs et moyens de la société, puisqu'elle *vit* déjà, en un mot, ne portant que des marques de jeunesse et de vigueur. S'ils ne sont pas scientifiques par eux-mêmes, ils le sont néanmoins par leur objet indirect, consistant à apprendre aux savants l'existence de ce merveilleux instrument dont ils n'ont plus qu'à se servir, *collectivement* il est vrai, pour supprimer en peu de mois, *si toutefois ils le veulent*, les entraves de tous genres qu'apporte à leurs études la grande diversité des langues européennes : perte de temps avec grand ennui, pour l'acquisition de *une ou deux*, difficulté et fatigue dans l'emploi, pour la lecture, surtout pour l'écriture, même de celles que l'on connaît, impossibilité absolue pour le plus grand nombre de ces langues.

Çà et là, il est vrai, on voudrait restituer au latin ce rôle de langue européenne auxiliaire qu'il a joué aux temps embryonnaires des sciences, et même quelques savants très rares ne l'ont pas encore tout à fait délaissé. Mais cette langue est très difficile par les formes si variées de ses mots et par la complication de sa syntaxe ; elle a une flexibilité presque nulle en présence des idées modernes, dominées par des préoccupations politiques, économiques, industrielles et scientifiques qui ont été étrangères aux Anciens ; d'autre part, *pourrait-on bien remettre au latin la quantité toujours croissante des sujets dont l'éducation intellectuelle n'a plus les langues mortes pour axe ?* Et, puisqu'il en a été investi une fois, le latin aurait-il été dépouillé de ce rôle *par la lente, par la seule action de la force des choses*, s'il n'eût pas réellement encouru cette déchéance ? Je suis donc pleinement avec ceux qui, le jugeant bien mort, s'opposent à des tentatives de résurrection que l'histoire, la réflexion également condamnent d'avance à l'avortement. Que donc les savants aillent plutôt à l'Esperanto, facile et souple comme aucune autre langue ne l'est, *que*

commencent à parler cette foule de sujets déchargés maintenant du grec et du latin à outrance. Tous ne tarderont guère à le savoir aussi, puis à l'employer quand ils voudront être entendus au delà des frontières de leurs pays, dès que les plus hardis d'entre eux auront commencé à le faire. Pour ma part, et si l'on me permet cette allusion personnelle, je dirai que j'ai des notions de quelques langues étrangères, du latin d'abord comme tous les professeurs, de l'allemand surtout, le connaissant assez pour avoir pu jadis le parler pendant des heures avec des militaires badois. Mais si le latin de Gauss ne m'a pas arrêté, je n'ai presque jamais lu de publications scientifiques en allemand, tant j'y ai trouvé d'ennui et de fatigue. Quant à écrire en latin ou en allemand, je ne le pourrais qu'à grand'peine et de la manière la plus imparfaite. Avec l'Esperanto, auquel pourtant je n'ai pas donné plus d'une soixantaine d'heures au total, la face des choses changerait du tout au tout : je préfère sa lecture bien des fois à celle de l'allemand, même à celle du latin de Gauss, et, je l'ai dit au début, je me sens prêt à l'employer pour rédiger un mémoire scientifique quelconque, sauf à tâtonner encore dans les premières pages. Si même j'étais bien rompu à son maniement, et s'il ne s'agissait que de traiter une question *scientifique*, *en dehors de toute préoccupation oratoire*, je crois bien que je le préférerais aux irrégularités du français, à ses périphrases, à ses pauvretés.

L'introduction de l'Esperanto dans la littérature scientifique se heurte au cercle vicieux que noue le caractère *essentiellement collectif* de l'effort à déployer pour l'opérer ; extrêmement utile à tous, si tous veulent se l'approprier (ceci n'est pas contestable), la langue n'est plus qu'une amusette pour un individu isolé, si les autres se refusent à l'employer, quelque chose comme une scie à bras dans les mains d'un seul scieur de long, et chacun peut penser : « Oui, l'Esperanto est excellent, mais il sera assez tôt pour l'apprendre quand *on* le saura partout. » Cet *on*, simple agglomération des *chacuns*, n'existera évidemment jamais si personne ne veut s'en faire une partie, et il faut absolument que chaque individualité y engage un peu du sien, ce qu'ont fait d'ailleurs, dans des conditions moins avantageuses qu'aujourd'hui, les 40 000 espéranlistes qui ont pris les devants,

ce que font chaque jour sous nos yeux les cultivateurs labourant et semant sans être bien assurés d'une récolte, les millions d'êtres humains qui travaillent autrement mais toujours en vue d'une rémunération éloignée, aléatoire, moi-même, enfin, qui lance ces lignes sans savoir si elles porteront quelque part ; et ici, l'avance à risquer est tout ce qu'il y a de plus insignifiant.

Comment rompre ce cercle vicieux? Je crois qu'il serait fortement entamé si l'auteur de quelque importante découverte voulait en confier l'exposition à l'Esperanto, car les esprits seraient frappés, l'invention apporterait partout la notion de la langue, on voudrait savoir en quoi celle-ci consiste ; aussitôt, elle gagnerait un très grand nombre d'adeptes, car il n'est pas à ma connaissance que quelqu'un l'ait regardée d'un peu près sans la déclarer aussitôt excellente ; et cette première impulsion assurerait la continuation de la marche en avant. Mais il ne faut pas compter qu'un savant, sûr d'être lu partout, en quelque langue qu'il écrive, aille préférer à la sienne la moins connue de ses lecteurs, de lui-même quelquefois. Il serait peut-être moins raisonnable encore de demander l'Esperanto pour ces mémoires de valeur faible ou moyenne qui grossissent les journaux scientifiques ; ces productions ne trouvent guère de lecteurs à l'extérieur des aires de leurs langues, en dehors de ceux, généralement en petit nombre, que les mêmes questions préoccupent ; écrits en Esperanto, ils perdraient donc ces clients pour un temps, sans les remplacer promptement par d'autres, et, même sachant la langue déjà, leurs auteurs se refuseraient à tremper leurs plumes dans cette encre.

Le cercle, toutefois, ne paraît pas impossible à dénouer. D'abord il faudrait que tous les savants, dont la curiosité pourrait être éveillée par l'Esperanto, voulussent bien, *comme certains l'ont déjà fait*, regarder *par eux-mêmes*, si ses qualités sont aussi merveilleuses que ses adeptes le prétendent ; et on peut demander cela aux jeunes dont l'esprit est plus ouvert aux nouveautés, plus souple en même temps, à qui d'ailleurs la moisson est promise bien plus sûrement qu'aux autres ; encore une fois, je garantis que trente à quarante heures espacées sur quinze jours suffisent à faire un espérantiste-lecteur (on devient plutôt militant). Ensuite, il faudra que ces nouvelles recrues, venues du monde scientifique, y affirment leur qualité d'espéran-

tiste pour se faire accepter et y compter ensuite pour quelque chose, par leur inscription faite non seulement dans les cadres généraux de la langue (Annuaires des sociétés, Adresaro...), mais sur des listes particulières, *numérotées* comme l'Adresaro. que les revues roulant sur les diverses spécialités (mathématiques, physique, etc.) voudraient bien ouvrir dans leurs colonnes. Dès que ces listes commenceraient à être un tant soit peu chargées, un très grand pas serait fait, soit parce qu'il aiderait à ce que je vais proposer, soit par simple effet d'attraction.

Je considère encore que ces mêmes journaux ayant un intérêt évident à élargir leur clientèle étrangère par l'Esperanto, il n'est pas déraisonnable à lui de leur demander aussi quelque effort en sa faveur au délà du précédent : je voudrais donc qu'à l'instar de la *Concordia* et du *Petit-Bleu*, cités tout à l'heure, elles consentissent, pour exciter l'attention de leurs publics, pour les diriger peu à peu vers l'Esperanto, à mêler régulièrement à leurs « Chroniques » quelques *menus* articles rédigés en cette langue, articles *courts et rares* pour commencer, à écrire sur les sujets dont l'intérêt *international* est le plus prononcé. Que pendant un certain temps, ces entrefilets trouvent peu de lecteurs, où serait le grand mal ?

Les revues enfin atteindraient le même but autrement, en même temps, elles prépareraient fort utilement le terrain à l'emploi de l'Esperanto pour des articles de fond, en publiant promptement, chacune dans sa spécialité, les traductions esperantistes des mots techniques appartenant aux sciences. Ces vocabulaires partiels devraient forcément être confectionnés dans l'ordre suivant : analyse mathématique (Arithmétique, Algèbre, théorie générale des fonctions...) ; Géométrie (théorique, trigonométrique, descriptive) ; Cinématique, Mécanique, Physique (générale, astronomique) ; Chimie, Minéralogie, Géologie, Biologie... parce que chacune de ces sciences emprunte toujours des principes aux précédentes sans leur en fournir normalement. Ils seraient composés par des esperantistes consommés qui assureraient la conformité du travail aux principes de la langue, assistés par des hommes du métier qui leur fourniraient les nomenclatures des mots à traduire et l'explication raisonnée de leurs sens. Plus tard, ils seraient fondus en un seul Scienca vortaro de la

lingvo internacia Esperanto, complément scientifique de l'**Universala vortaro**, construit sur le même plan. Tout le surplus me semble devoir être laissé aux soins de l'avenir.

Dans tout ceci, beaucoup d'esprits sans doute verront une montagne à déblayer; pourtant, je n'y puis, moi, apercevoir que des bâtons flottants, parce que le véhicule international des pensées humaines est actuellement tout monté et graissé, *déjà essayé*, prêt à rouler, parce que, s'il est considérable, l'effort total à dépenser pour sa mise en mouvement est la résultante de poussées individuelles, chacune infinitésimale dans son intensité, n'attendant plus guère qu'un signal, une première excitation et une orientation. Les misérables pensionnaires d'une prison cellulaire savent imaginer des signes pour causer entre eux à travers des murailles, et les Européens, séquestrés intellectuellement aussi par la diversité des langues, mais libres autrement, n'auraient jamais l'esprit de se baisser seulement pour saisir et faire jouer l'admirable clef dont M. le Dr Zamenhof leur a fait cadeau! Soit! Mais alors, cessons de placer l'intelligence humaine au-dessus de l'instinct de ces tribus d'hymonoptères, s'égarant souvent dans les airs, mais sachant toujours se retrouver, se parler, se concerter par milliers pour se nourrir et s'élever les uns les autres, pour se bâtir ruches et fourmilières.

Je ne suis plus pour entrer au cœur de la Terre promise; qu'au moins j'aie réussi à planter pour les autres un jalon de plus sur son chemin! [1]

Charles MÉRAY (Dijon).

---

(1) Je rassemble dans cette note finale des indications pratiques, destinées à ceux qui voudraient voir l'Esperanto de plus près.

I. La *Société pour la propagation de l'Esperanto* (S. p. p. E.), dont le siège est à Paris, centralise pour la France (avec rayonnement dans quantité de pays étrangers) tout ce qui se rattache à l'objet indiqué par son titre. Président : M. L. de Beaufront, 2, rue Marbeuf, à Paris; secrétaire-trésorier : M. René Lemaire, à Epernay (Marne, France). — *Toute* demande concernant l'Esperanto peut être adressée au président ou au secrétaire (à ce dernier de préférence) qui répondent avec empressement et de leur mieux; affranchir et joindre un timbre pour la réponse.

La cotisation annuelle des sociétaires est de 4 fr., assurant à chacun le service gratuit du journal mentionné ci-après (son *Supplément* non compris). En se faisant inscrire dans la S. p. p. E., les nouveaux amis de la langue apporteront à son action un appui moral et financier très précieux.

II. L'*Espérantiste* (directeur-fondateur : M. L. de Beaufront) est l'organe de la S. p. p. E., quoique indépendant d'elle au point de vue financier. C'est un journal mensuel de 16 pages, petit in-4°, à deux colonnes, rédigé en français ou en Espe-

NOUVELLES CONSIDÉRATIONS SUR LA GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE

1. Dans le numéro 4 d'un précédent article [1], nous avons supposé, conformément aux indications des savants non-euclidiens, qu'en agrandissant le triangle ABC (fig. 3 dudit article) ou, en d'autres termes, en le faisant remonter le long des perpendicu-

ranto. Il contient des considérations grammaticales et autres sur la langue, avec des modèles de conversations pratiques, puis une chronique détaillée des progrès de l'Esperanto dans les deux mondes, des publications nouvelles intéressant la langue, des actes de la S. p. p. E., etc. Son *Supplement*, mensuel aussi et de quatre pages du même format, est rédigé exclusivement en Esperanto; on y trouve toujours des articles de littérature proprement dite (nouvelles, etc.). Prix de l'abonnement (pour les personnes ne faisant pas partie de la S. p. p. E.) : France, 3 fr., 4 fr. avec le *Supplement:* Etranger 3 fr. 50 et 4 fr. 50. S'adresser au secrétaire de la S. p. p. E.

III. Les trois ouvrages suivants, de M. le Dr Zamenhof, sont les seuls à la rigueur qui soient nécessaires à l'étude de l'Esperanto :

1° *Manuel complet de la langue internationale Esperanto*, traduction française par M. de Beaufront. Prix (franco) : Fr. 1.50. La partie purement grammaticale est d'une étendue insignifiante comme je l'ai dit, le plus gros se composant principalement de deux lexiques, l'un Esperanto-Français, l'autre Français-Esperanto. Le premier fait en quelque sorte double emploi avec le dictionnaire désigné ci-après ; mais le second est le seul donnant encore la traduction des mots français en Esperanto (V. note (12)). Le surplus de ce très petit volume est consacré à des considérations générales).

2° **Universala vortaro de la lingvo internacia Esperanto.** Prix (franco) : Fr. 1,10 (Tableau par ordre alphabétique, des racines fondamentales de l'Esperanto, traduites en français, anglais, allemand, russe et polonais).

3° **Ekervaro de la linguo internacia Esperanto.** Prix (franco) : Fr. 0,85 (collection de textes typiques et gradués, contenant toutes les tournures propres à la langue, avec des commentaires grammaticaux rédigés dans les cinq langues ci-dessus, 2°).

Mais une lecture un peu suivie de textes Esperanto, de ceux, par exemple, que l'*Esperantiste* apporte chaque mois, est presque indispensable aux personnes qui veulent arriver à écrire bien facilement la langue ; pour la correction de leur style, elles trouveront les meilleurs conseils dans l'excellent opuscule intitulé :

Commentaire sur la grammaire de la langue internationale Esperanto, par M. L. de Beaufront, prix : fr. 2.00, franco fr. 2,25.

[1] Voir 1900, n° 3, p. 179.

laires Ee, Gg, Kk, ses angles diminuent tous ensemble, jusqu'à devenir nuls simultanément. Pourtant cette supposition présente une nouvelle difficulté. En effet, en faisant descendre le triangle ABC, l'angle C, croîtra graduellement, ayant pour limite supérieure deux angles droits, tandis que les deux autres angles A et B décroîtront nécessairement de plus en plus et deviendront nuls à l'infini. Il en résulte qu'inversement, quand le triangle remonte, les angles A et B croîtront graduellement, de sorte qu'on aura d'abord $C = 4A$, puis $C = 2A$ et enfin $C < 2A$, avant l'anéantissement de l'angle C. Alors les trois perpendiculaires médianes, supposées asymptotes entre elles, se couperont inévitablement. Pour échapper à cette nouvelle difficulté, les non-euclidiens devraient prouver que les angles A et B ne croîtront que jusqu'à une certaine limite, ce qui est impossible, car cette nouvelle hypothèse est contraire à la loi de continuité.

2. On sait que, selon leur doctrine, l'asymptote commune aux deux côtés d'un angle est symétrique par rapport à sa bissectrice et que, par conséquent, elle doit être située semblablement par rapport aux deux côtés, c'est-à-dire que tous ses points symétriques doivent être également distants de ces côtés. Or, voici ce qui arrive dans la géométrie non-euclidienne. Considérons trois droites QR, ST, UV, (fig. 1), qui sont asymptotes communes des côtés de trois angles égaux MOX, NOP, POM et, par suite, sont asymptotes réciproques. Elles sont symétriques par rapport aux bissectrices Mm, Nn, Pp, qui se coupent en O. Chacune d'elles est située semblablement par rapport aux côtés de l'angle correspondant. Par exemple, la droite UV est située semblablement par rapport aux côtés MO et NO de l'angle MOX et, par suite, elle ne peut pas être située semblablement par rapport aux côtés

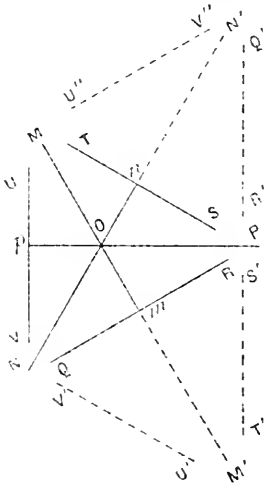


Fig. 1.

d'un autre angle quelconque, dont Pp n'est pas la bissectrice. Retournons maintenant la figure autour de la droite QR et nous aurons quatre asymptotes réciproques ST, UV, U'V' S'T', placées respectivement dans quatre angles droits MmR, MmQ, M'mQ, M'mR, dont les bissectrices sont autres, que celles des angles en O.

Par conséquent, aucune de ces quatre lignes qui sont, d'après la doctrine, asymptotes de la ligne QR, ne saurait être asymptote commune des deux côtés de l'angle correspondant. Par exemple, UV, qui est asymptote des droites MM' et QR, ne saurait être asymptote commune de ces dernières, dès qu'elles sont considérées comme les côtés de l'angle MmQ, car UV n'est pas située semblablement par rapport à ses côtés. Il y a là une contradiction manifeste, qui révèle la défectuosité de la doctrine non-euclidienne. On le comprendra mieux en effectuant d'autres retournements de la figure. Par exemple, si on la retourne autour de la droite ST, on aura cinq asymptotes réciproques UV, U'V', S'T', QR', U''V'' (fig. 2). Or leur disposition générale n'a aucune ressemblance avec celle qu'elles devraient avoir et qui présente l'aspect d'un pentagone régulier, dont les angles sont supposés nuls (fig. 2).

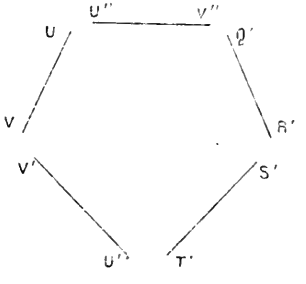


Fig. 2.

3. Il faut rendre justice aux inventeurs de la Géométrie non-euclidienne d'avoir si bien combiné leurs hypothèses qu'il est assez difficile d'y dévoiler des contradictions intrinsèques. Leur secret est très simple : remplacer au besoin les lignes droites par des lignes courbes, tournant leur convexité vers l'intérieur des polygones, sous prétexte de l'insuffisance des définitions de la ligne droite.

Au reste, nous avons signalé dans nos articles quelques cas où leur doctrine semble en défaut. Dans le paragraphe 3 de l'article précédent est exposée une contradiction, ou peut-être un malentendu, qui consiste en ce qu'on ne sait pas au juste ce que deviennent à la limite les côtés du triangle équilatéral ABC qu'on agrandit

indéfiniment. Se transforment-ils en trois lignes brisées aOb, bOc, cOa, composées chacune de deux bissectrices, comme l'a déclaré Gauss dans sa lettre à Schumacher, ou bien se transforment-ils en trois asymptotes réciproques QR, ST, UV, comme l'assurent ses commentateurs ? Selon Gauss, les côtés de ce triangle se brisent d'eux-mêmes ; selon ses commentateurs, ils se détachent l'un de l'autre. Dans le paragraphe 4 la contradiction consiste en ce que les lignes droites sont simultanément asymptotes et sécantes réciproques. La contradiction, exposée dans le paragraphe 2 de ce nouvel article, consiste en ce que les droites peuvent en même temps être et ne pas être asymptotes communes des côtés d'un angle.

4. Ces points faibles de la Géométrie non-euclidienne suffisent pour établir : 1° qu'elle est erronée et ne peut être considérée que comme une démonstration par réduction à l'absurde du postulatum ou de l'axiome XI d'Euclide ; 2° que la géométrie d'Euclide et d'Archimède est non seulement *la plus commode*, comme on dit en cette fin de siècle, mais la seule qui soit possible et qui puisse se passer des hypothèses. En outre, elle ne peut pas être multiple, comme ne le peut être non plus l'Arithmétique, à laquelle la Géométrie ne cède en rien sous le rapport de la certitude absolue, et 3° que la nouvelle doctrine créée récemment sous le titre de *Géométrie Générale* ou de *Métagéométrie*, se réduit à la Géométrie d'Euclide et d'Archimède.

Dans un mémoire remarquable, inséré dans le numéro 7 du Bulletin de l'Académie de Bruxelles de l'année passée, M. Ch. Lagrange a établi d'une manière magistrale que *jusqu'ici on n'a pu donner qu'une seule définition de l'espace, qui consacre l'espace que nous connaissons, et que la Métagéométrie a établi le contraire de ce qu'elle prétendait : elle a voulu faire douter de la réalité physique du postulatum d'Euclide et elle a concouru à la démontrer.* » Ce mémoire doit être lu en entier par tous ceux qui s'intéressent sérieusement aux principes de Géométrie. Il est douteux que les partisans de la Métagéométrie soient en état de combattre ses arguments.

5. On se demande involontairement quelle fut la raison de la négation du postulatum d'Euclide, qui fut admis par des géo-

mètres de tant de siècles? A-t-on découvert quelque fait infirmant cette vérité évidente? On se demande encore avec une certaine anxiété comment la nouvelle doctrine, si paradoxale, issue de cette négation, a pu trouver tant de partisans ardents parmi les analystes modernes les plus hardis? — On ne peut expliquer ce fait étrange que par une certaine connexion qui semble exister entre l'invention de la Géométrie non-euclidienne et l'introduction dans l'Analyse des quantités imaginaires, qui au fond ne sont pas des quantités, mais des *non-quantités*, car une racine de degré pair d'une quantité négative est *impossible*. On a voulu trouver en géométrie quelque chose d'équivalent, comme *impossibilité*. On a songé d'abord à y opposer un triangle à la fois rectangle et équilatéral et l'on a fini par rejeter le postulatum d'Euclide. Depuis cette époque les mathématiques ont changé de caractère : elles ont cessé d'être la science des quantités pour devenir celle des quantités et des non-quantités, qui ne fait aucune distinction entre les unes et les autres, malgré qu'elles n'ont rien de commun.

Le grand avantage des imaginaires est de permettre la décomposition, d'ailleurs toute fictive, des polynômes en facteurs du premier degré et de *laisser libre jeu aux artifices hasardeux sans nombre* [1] ... Tel est le rôle important qu'elles jouent dans les spéculations analytiques. Grâce à ce nouveau moyen d'investigations on a pu, entre autres, achever la théorie des fonctions elliptiques et aller encore plus loin. Mais toute médaille a son revers : ces beaux résultats ne furent obtenus qu'au détriment de la rigueur, de la précision et de la clarté : les mathématiques furent envahies par un grand nombre d'inductions, d'analogies, de conventions arbitraires, et ont perdu leur ancienne apodicticité.

Il est permis d'espérer qu'au XX^e^ siècle la considération des imaginaires sera remplacée par des moyens plus sûrs et qu'on arrivera à concilier les mathématiques avec la logique.

Sans prétendre à une compétence pédagogique, nous osons penser : 1° qu'il vaut mieux n'enseigner rien du tout qu'enseigner des théories d'une certitude douteuse et empiétant sur le bon sens, et 2° que Faraday a eu grandement raison de compa-

---

(1) *Leçons nouvelles sur l'Analyse*, par M. Méray, 1893.

rer les mathématiques à un moulin qui moud admirablement ce qu'on lui donne à moudre, mais qui ne rend pas autre chose que ce qu'on lui a donné. — Gardons-nous donc d'y mettre rien de faux, rien d'arbitraire, rien de contraire au bon sens !

M. Frolov (Genève).

EUCLIDIEN ET NON-EUCLIDIEN

M. Frolov est plutôt dur pour ceux qu'il appelle (1) à tort *les non-euclidiens*.

Il paraît supposer que nous voulons interdire aux équerres le dessin des carrés et réclamer pour nous-mêmes le monopole de l'absurdité.

Que M. Frolov se rassure ! malgré les erreurs de raisonnement que renferme son article, je tiens celui-ci pour très intéressant.

Nous pouvons tous nous tromper, et l'étude de loyales erreurs de logique est précieuse pour ceux qui ont la curiosité des questions de pédagogie ; de plus, il y a des erreurs périodiques qu'il importe de souligner.

Il y a quelques années, dans une réunion que je ne préciserai pas davantage, j'ai entendu, formulée gravement, cette opinion « *que la morale elle-même est intéressée à la démonstration du postulatum d'Euclide ; car, disait-on, si la certitude déserte même les mathématiques, que deviendront hélas, les vérités morales* » ! Vous voyez le thème.

Je crois que la morale est plus qu'une convention, mais j'ai la certitude que le postulatum d'Euclide est *une convention* éminemment utile ; en ce sens, je reste euclidien ; mais l'étude *des autres conventions possibles* a aussi son intérêt, en ce sens je suis non-euclidien.

Il y a dans les sciences quelques autres conventions plus ou

(1) Voir l'*Enseignement mathématique*, 2e année, p. 179-187, mai 1900.

moins utiles, le principe de l'inertie par exemple ; le rôle de ces diverses conventions est de simplifier soit le langage, soit nos images réduites du monde.

Parlons donc, avec M. Frolov, des images que nous faisons de l'espace.

Certains métaphysiciens croient expliquer le monde par des *points*, *centres de forces*, et suppléer ainsi à la matière.

Ils ne se doutent pas, les malheureux, que le géomètre lui-même, pour donner un appui à son espace, a besoin de la matière.

Prenons la définition logique de la droite :

Un ensemble primaire de points qui, dans un domaine suffisamment réduit est défini par deux de ces points.

Si, n'en déplaise à M. Frolov, nous savons *en toute certitude* que cette définition et la notion d'angle superposable à lui-même par ses deux faces, sont insuffisantes pour engendrer la Géométrie euclidienne, il nous faut cependant reconnaître que cette définition pour sortir du pur domaine de l'esprit doit être complétée par deux *hypothèses expérimentales*.

Première hypothèse. — Nous *pouvons* matérialiser dans des conditions physiques déterminées la définition d'une droite limitée ; en d'autres termes, *nous avons foi dans le mètre des Archives*.

Deuxième hypothèse. — Nous pouvons *prolonger une droite* grâce à notre confiance dans la propagation rectiligne de la lumière.

Ces deux confiances simultanées rendent possible la Géodésie.

La Géométrie est sans doute l'étude du groupe des déplacements, mais il faut ajouter que la Géométrie ne peut se réaliser en dehors de notre esprit que par une définition (un idéaliste pur dirait *une convention*) expérimentale qui nous donne : 1° *un type d'assemblages qui ne cassent pas* ; 2° un moyen *de prolonger* l'assemblage particulier qui porte le nom de droite.

Existe-t-il à l'égard de ces assemblages des vérifications de *la convention* euclidienne ?

On a dit qu'il existe de grands triangles astronomiques dans lesquels l'*observation* aurait montré que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Cette assertion n'est pas exacte, et elle ne deviendra exacte que le jour où trois observateurs situés sur trois planètes différentes pourront, à un signal donné, se viser réciproquement les uns les autres.

Et même ce jour-là, l'expérience interplanétaire ne sera tout à fait probante que si nos trois astronomes ont étudié l'Optique non-euclidienne.

J'incline d'ailleurs à croire que lorsqu'une Physique non-euclidienne sera construite, on trouvera *d'excellentes raisons pour continuer à préférer la traduction euclidienne des phénomènes.*

Mais dans cette grande et belle école de logique qui s'appelle la Géométrie il n'y aura alors rien de changé.

Et, alors comme aujourd'hui, tous les penseurs qui voudront se donner la peine de réfléchir sauront démontrer que le postulatum d'Euclide est indémontrable, c'est-à-dire que ni la Géométrie de Riemann, ni celle de Lobatchewsky ne renferment de contradiction intrinsèque.

Voici, de cette affirmation une démonstration simple et brève :

« *Chacune des trois Géométries est caractérisée par ses propriétés métriques, c'est-à-dire par sa Trigonométrie plane ; mais celle-ci, sous l'une ou l'autre de ses trois formes, est la traduction de l'existence du groupe d'équivalence d'un système de vecteurs.*

« *Or, que l'existence générale du groupe d'équivalence ne renferme aucun élément de contradiction, c'est ce qui résulte du théorème suivant :*

« *Tout système de vecteurs est* RÉDUCTIBLE *à un vecteur unique* R *passant par un point arbitraire et à un couple* G *dont l'axe passe par le même point.*

« *Et la Trigonométrie plane de l'une des trois Géométries exprime que la réduction précédente appliquée à une paire de vecteurs contraires, ayant même ligne d'action, conduit à un vecteur* R *nul et à un couple* G *nul.* »

Lorsque seront étudiés, dans l'enseignement moyen, des théorèmes tels que le précédent, les élèves cesseront de perdre leur temps dans la vaine recherche de *la démonstration* de la *convention* d'Euclide.

Jules ANDRADE (Montpellier).

CHRONIQUE

Académie royale d'Irlande.

Dans une communication à la « Royal Irish Academy », M. le Rev. W. R. Westropp Roberts a réussi à réduire toutes les intégrales élémentaires à une seule classe. Il démontre que l'intégrale générale $I \equiv \int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)\sqrt{f(z)}}$ se ramène aux $2m-1$ intégrales $I_r \equiv \int \frac{z^r\,dz}{\sqrt{f(z)}}$ (r entier),

et $$L(z,u) = \int \frac{dz}{(z-u)\sqrt{f(z)}}$$

où $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sont des fonctions de z, rationnelles et entières, et où $f(z)$ est un polynome de degré $2m$.

Au moyen des relations entre u et les racines de $f(z)=0$, il démontre que les intégrales I_r dépendent des intégrales de la forme $L(z,u)$.

M. le professeur Joly, dans un mémoire lu à la même compagnie, prenant pour sujet la position de l'*Ausdehnungslehre* dans l'Algèbre générale, associative du type quaternion, démontre que la distinction essentielle entre les quaternions et les autres systèmes d'analyse de l'espace consiste dans le caractère nettement associatif et distributif du premier. Un système Grassmann, s'appliquant à l'espace à n dimensions, équivaut à l'usage limité de l'Algèbre associative de $(n+1)$ unités, où $i_s^2 = -1$; $i\ i_t = i_t\ i_s$. En effet, un produit progressif n'est que la partie du plus grand ordre dans les unités d'un produit complet de l'Algèbre associative. Les produits régressifs sont formés par cet artifice simple : diviser les produits de l'ordre $n+1$ par le produit de toutes les unités ; et recommencer ensuite.

La priorité de l'invention des Quaternions.

M. le professeur Tait, dans une note à la « Société Royale » de Londres, a démontré, en ce qui concerne la priorité à laquelle Gauss aurait droit dans l'invention des Quaternions, que ce n'était pas le quaternion de Hamilton qu'avaient attribué à Gauss MM. Klein et Sommerfeld (Ueber die Theorie des Kreisels), mais une opération de

déformation limitée et particulière ; en effet, elle consiste en une simple rotation, avec une expansion isotrope, exprimée en fonction de quatre constantes. Il semble donc, que MM. Klein et Sommerfeld se soient mépris sur la notion réelle d'un quaternion.

Pour ceux qu'intéresse le sujet, M. le docteur Knott a donné une critique attentive et approfondie de la section du livre en question s'occupant de la théorie des quaternions.

Congrès des mathématiciens allemands.

Les mathématiciens allemands se réunissent cette année à Aix-la-Chapelle, du 17 au 22 septembre, en même temps que les naturalistes et médecins de l'empire. Le comité d'organisation de la section « Mathématiques et Astronomie » est présidé par M. E. Jürgens, professeur à l'école technique supérieure d'Aix. Il espère pouvoir faire figurer à l'ordre du jour de cette réunion divers rapports détaillés en préparation depuis plusieurs années. Ce sont, dans le domaine des mathématiques pures, le rapport sur la *théorie des groupes finis* et celui sur le *calcul des variations ;* dans le domaine des mathématiques appliquées, un exposé des *méthodes modernes de calculs statiques appliqués aux constructions civiles*, et, éventuellement, un rapport sur le *calcul graphique*.

L'Association des mathématiciens allemands sera présidée par M. D. Hilbert, professeur à l'université de Göttingue. Les sujets des communications doivent être adressés, le plus tôt possible, à M. le professeur A. Gutzmer, secrétaire de la *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* et professeur à l'université de Iéna.

M. Thomas Craig.

M. Thomas Craig, professeur de Mathématiques à l'université Johns Hopkins, est décédé a Baltimore le 19 mai dernier. C'était un mathématicien bien connu. Né à Pittston en 1855, il succombe, dans la force de l'âge, à une maladie de cœur. Il sortit en 1875 du collège Lafayette comme ingénieur civil, il prit en 1878 le grade de docteur en philosophie de l'université Johns Hopkins. Il ne cessa depuis lors d'apporter une importante contribution à la science mathématique par ses travaux, publiés dans de nombreux périodiques, et par la rédaction de l'*American Journal of Mathematics* dont il était l'un des directeurs. Ses principaux ouvrages sont : *Traité des équations différentielles linéaires*, *Traité des projections*, *Mouvements des fluides*.

C'est, en résumé, une perte cruelle et importante que vient de faire la science mathématique des Etats-Unis.

CORERSPONDANCE

Paris, mai 1900.

Mon cher Laisant,

L'article de M. Redl dans le dernier numéro de *l'Enseignement mathématique*, m'a remis en mémoire les analogies de Néper et de Delambre. Il y a quelque quarante ans, je faisais de la Cristallographie et en usais souvent ; mais il me fallait toujours les rechercher dans les traités, faute d'une démonstration simple me permettant de les retrouver rapidement ; j'y arrivai enfin comme suit.

Inscrivons une circonférence dans un triangle sphérique. Soit p le demi-périmètre ; on a de suite, si r est le rayon du cercle inscrit :

$$(1)\quad \operatorname{tg} r = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin(p-a) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\sin(p-b) = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\sin(p-c);$$

un cercle ex-inscrit de rayon r_a donne

$$(2)\quad \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin p = \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\sin(p-c) = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\sin(p-b),$$

d'où

$$\operatorname{tg} r \operatorname{tg} r_a = \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\sin p \sin(p-a) = \sin(p-b)\sin(p-c).$$

Considérons maintenant le petit cercle circonscrit : si O est son centre,

$$OAB = OBA = \gamma,\ OAC = OCA = \beta,\ OBC = OCB = \alpha,$$
$$\alpha+\beta = C\quad \alpha+\gamma = B\quad \beta+\gamma = A.$$

Si on pose

$$2(\alpha+\beta+\gamma) = P = A+B+C,$$

on a

$$(3)\quad \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos(P-A)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\cos(P-B)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\cos(P-C)},$$

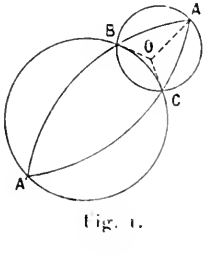


Fig. 1.

et le triangle A′ B C donnerait

$$(4)\qquad \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos P} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}}{\cos(P-C)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{c}{2}}{\cos(P-B)},$$

et

$$\operatorname{tg} R \operatorname{tg} R_A = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{\cos P \cos(P-A)} = \frac{1}{\cos(P-B)\cos(P-C)}.$$

On trouve ainsi les formules que M. Redl appelle du demi-angle.

J'arrive aux analogues.

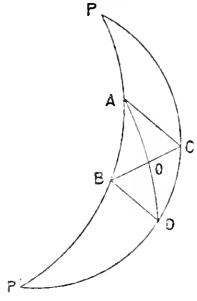


Fig. 2.

I. Soit un triangle ABC; je construis le parallélogramme ABDC, en joignant A au milieu de BC, et prolongeant de OD = OA. ABDC est la projection sur la sphère d'un parallélogramme construit dans le plan tangent en O, et dont le centre serait en O. $OP = OP' = \frac{\pi}{2}$, PA = P'D, PC = P'B. Les quatre côtés sont égaux deux à deux, ainsi que les angles opposés; mais la somme des dièdres BAC, DCA n'est pas 2 droits, comme dans le plan : quelle relation y a-t-il entre ces angles? Egalons les valeurs du rayon du cercle ex-inscrit à PAC, et tangent à PC,

$$\operatorname{tg}\frac{CAP}{2}\sin\left(\frac{AP+PC+AC}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{PCA}{2}\sin\left(\frac{AP+PC-AC}{2}\right);$$

mais

$$CAP = \pi - A,\quad PCA = \pi - (B+C),\quad AP + PC = \pi - CD = \pi - C;$$

d'où

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\frac{c+b}{2},$$

et par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sin\frac{c+b}{2} = \operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}\sin\frac{b-c}{2},$$

d'où

$$\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\operatorname{cotg}\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{B+C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B-C}{2}.$$

H. ABC étant toujours le triangle, on prolonge AB, et l'on prend $AC' = \pi - AC$; les angles AC'C, ACC' sont supplémentaires et l'on a

$$BC'C + BCC' + CBC' = \pi - C + \pi - B,$$
$$BC'C + BCC' - CBC' = B - C,$$

d'où, par la formule (1) appliquée à BC'C,

$$\operatorname{tg}\frac{BC}{2}\cos\frac{B-C}{2} = -\operatorname{cotg}\frac{BC'}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{B+C}{2},$$

et, par application au triangle $\pi - a$, b, $\pi - c$, $\pi - A$, B, $\pi - C$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

On peut donc établir toutes ces formules en partant du triangle rectangle.

S'il existe un triangle a, b, c, A, B, C, il existe :

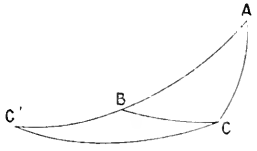


Fig. 3.

1° 1 triangle $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$;

2° 3 triangles a, $\pi - b$, $\pi - c$, A, $\pi - B$, $\pi - C$;

3° 3 triangles a, x, $\pi - a - b$, X, $\pi - C$, $\pi - (A + B)$;

4° 3 triangles, a, x, $\pi - (b - c)$, X, $\pi - B$, $\pi - (X - C)$.

A une relation quelconque entre les éléments du premier correspond par 1° et 2° une relation entre le même nombre d'éléments, qui peut être identique à la première; par 3°, 4°, il n'en est plus de même; une relation du triangle primitif ne se transforme en une autre relation de ses éléments, que si elle ne contient que a, $b + c$, B et C pour 3°, et a, c, B et C + A pour 4°.

Pratiquement, je ne me servais que de 3 relations (1), qui par les transformations 2° donnent les relations (2); de (1) et (2) par la transformation 1° on déduit (3) et (4); et par les transformations 3° et 4° on déduit les analogies de (2) et (4).

Bien à vous,

A. Potier.

A propos d'un article de M Frolov [1].

13 juin 1900.

Il n'y a pas de solution de continuité dans l'hypothèse non-euclidienne, comme l'affirme M. Frolov, et cette hypothèse est une et logique jusqu'au bout. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la figure 1, page 182, en la complétant comme suit : Soit menée AX bissectrice de l'angle TAA′ ; par un certain point M de cette ligne, on peut mener une parallèle BMB′ à AA′ et une parallèle B_1MB_1' à AT ; ces parallèles, qui sont également inclinées sur AX, sont distinctes tant qu'elles sont obliques à AX, c'est-à-dire tant que l'angle ABB′ n'est pas nul ; donc quand cet angle diminue et tend vers zéro, BB′ a pour limite non point TT′, mais l'asymptote commune de AA′ et TT′ qui est perpendiculaire à AX. En conséquence, la démonstration basée sur la figure 3 est incompréhensible.

Arrivons maintenant à la figure 5 ; les distances de BU et de AT augmentent de plus en plus, dit l'auteur, tandis que celles de BS et de AT diminuent, à mesure qu'on s'écarte de AB vers V et vers S ; qu'en faut-il conclure ?

Simplement ceci : le lieu des points de distance constante BA à TT′ est une *ligne* comprise entre BU et BS ; M. Frolov suppose *de plus* que c'est une *droite ;* quoiqu'il s'en défende, tel est son postulat, bien peu *dissimulé* comme on le voit.

P. Barbarin (Bordeaux).

---

(1) Voir *L'Enseignement mathématique*, nº 3, 2me année, p. 179-187, mai, 1900.

Au sujet de ce même article nous venons de recevoir une lettre de M. Tikhomandritzky, prof. à l'Université de Kharkoff ; elle ne pourra être publiée que dans notre prochain numéro. La Direction.

BIBLIOGRAPHIE

E. Cahen. — **Éléments de la théorie des nombres** ; 1 vol. gr. in-8° de VIII-403 pages ; prix : 12 francs ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Malgré quelques publications de mérite parmi lesquelles il faut citer la *Théorie des nombres* de E. Lucas, l'*Introduction à l'Étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* de MM. Borel et Drach, l'*Essai sur la Théorie des nombres* de M. Stieljes, on peut dire qu'il n'existait pas encore, en français, de traité vraiment élémentaire sur la théorie des nombres. L'étudiant désireux de connaître un sujet important, laissé en dehors des programmes officiels, en était réduit à relire les chapitres excellents, mais incomplets, de l'*Algèbre supérieure* de Serret. L'ouvrage de M. Cahen vient donc combler une lacune ; son livre se recommande par la clarté parfaite avec laquelle l'auteur a distribué son sujet.

La théorie des nombres n'est, dans le principe, que l'étude des nombres entiers considérés comme seuls éléments de calcul. Rien de plus clair en apparence que cette idée, ni de mieux fondé en pratique ; les recherches des analystes modernes et des arithméticiens eux-mêmes en ont cependant démontré le caractère artificiel. Renonçant à cette distinction peu précise, M. Cahen n'évite pas de parler des nombres incommensurables ; définis par une suite finie ou infinie d'entiers (coefficients d'une équation algébrique ou quotients incomplets d'une fraction continue illimitée, ces nombres se combinent avec la même facilité que les entiers eux-mêmes.

On peut voir dans le chapitre concernant la réduction et l'équivalence des formes quadratiques de déterminant négatif ($ac - b^2 < 0$), combien la considération des racines incommensurables introduit d'élégance et de facilité dans ce sujet.

Ajoutons que cette introduction des irrationnelles permet à M. Cahen de rattacher à la théorie des nombres certaines questions fort intéressantes, telles que la démonstration de l'existence des nombres transcendants à l'aide des fractions continues. Enfin, au point de vue didactique, il est utile de faire sentir que la théorie des nombres n'est pas une science de pure curiosité, mais qu'elle est liée d'une manière étroite à l'Algèbre et à l'Analyse générale. Regrettons seulement que l'auteur ne se soit pas placé à un point de vue encore plus général et ait cru devoir éviter, dans le corps de l'ouvrage, jusqu'à la mention des imaginaires.

Le livre est divisé en six chapitres : rappel des théories les plus élémentaires, compléments aux théories élémentaires, congruences, résidus quadratiques, nombres incommensurables, formes quadratiques binaires.

Les démonstrations sont toujours élégantes et claires ; peut-être l'auteur eût-il bien fait d'illustrer certaines d'entre elles par des constructions géomé-

triques : nous pensons surtout à la démonstration de la loi de réciprocité due à Kronecker et modifiée par Cayley et aussi à la réduction des formes quadratiques ramenée par F. Klein à la construction d'un *Fundamentalbereich*. De nombreux exercices numériques facilitent la compréhension de ces théories un peu ardues ; quatre tables extraites de la *théorie des congruences* de Tchebychelf permettent au lecteur de multiplier à volonté ces exemples.

N'oublions pas de mentionner dix notes terminant l'ouvrage et contenant l'exposé de questions particulièrement intéressantes ; le lecteur y fait connaissance avec les nombres imaginaires de Gauss, avec les fonctions numériques, la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, etc.

Dans sa préface, l'auteur nous promet la publication d'un ouvrage traitant des parties supérieures de la théorie des nombres ; nous ne doutons pas que l'accueil que le public fera aux *Éléments de la Théorie des Nombres* ne soit de nature à l'encourager dans ce projet.

C. Cayler (Genève).

Ernest Lebon. — **Histoire abrégée de l'Astronomie**, VII-228 pages et 16 portraits, caractères elzéviriens, avec vignettes, culs-de-lampe et fleurons ; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

Voici un livre qui n'est pas banal, et auquel son intérêt, mis encore en relief par une forme littéraire élégante, vaudra, nous n'en doutons pas, un légitime succès.

Il est composé avec une compétence qui n'appartient qu'à quelqu'un qui vit, comme M. Lebon, depuis longtemps dans le professorat.

Le but de cet Ouvrage est de donner un exposé complet des grandes découvertes et des travaux importants en Astronomie, avec une courte biographie des astronomes qui sont morts.

L'auteur a su si bien condenser les matières et éviter les longueurs inutiles que, malgré le peu d'étendue de son livre, on y trouve nombre de faits et de notions biographiques et bibliographiques sur des personnages contemporains dont le nom ne se trouve même pas dans les ouvrages similaires beaucoup plus étendus.

Il divise cette *Histoire* en trois périodes : la *Période ancienne*, se terminant au milieu du XVI^e^ siècle ; la *Période moderne*, s'étendant du milieu du XVI^e^ siècle au milieu du XIX^e^, et la *Période contemporaine*, comprenant la dernière moitié du XIX^e^ siècle.

La partie relative à la période ancienne renferme deux chapitres ; l'un consacré aux premières observations astronomiques, effectuées en Chaldée, en Egypte, en Phénicie et en Grèce, l'autre relative à l'histoire du Système de Ptolémée.

La partie concernant la période moderne comprend neuf chapitres, respectivement intitulés : Système de Copernic, Système des tourbillons, Loi de l'attraction universelle, Figure de la terre, Problème des trois corps, Mécanique céleste, Perfectionnement de l'Astronomie physique, Géodésie, Météorologie. On y trouve les biographies de Copernic, Tycho Brahé, Képler, Galilée, Hevelius, Picard, Huygens, Römer, D. Cassini, I. Newton, Flamsteed, Halley, Bradley, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, de Lalande, Delambre, Brinkley, Burckhardt, Gauss, Jacobi, W. Herschel, Piazzi, Arago et Bessel.

La partie ayant trait à la période contemporaine est partagée en dix chapitres dont les titres sont les suivants : Progrès des méthodes de la Mécanique céleste, Progrès de l'Astronomie stellaire, Expériences, observations et hypothèses, Analyse spectrale en Astronomie, Géodésie, Météorologie, La Photographie en Astronomie, Découverte de petites planètes et de satellites, Sidérostat à lunette, Mécanique céleste à la fin du XIX^e^ siècle. On y trouve les biographies de Cauchy, Delaunay, Le Verrier, Airy, Adams, Yvon Villarceau, Argelander, W. Struve, Foucault, Secchi, Perrier, Bæyer, Maury, Gould, Mouchez, M. Hervé Faye, Sophie Kowalevski, Tisserand et Gylden.

Le bel ouvrage de M. Lebon comprend, outre un très intéressant dictionnaire biographique et bibliographique sur les auteurs contemporains des travaux exposés dans le livre, seize reproductions des portraits de Copernic, Galilée, Képler, I. Newton, V. Herschel, Laplace, F. Arago, Le Verrier, J. Janssen, M. Lœwy, P. Perrier, S. Newcomb, F. Tisserand, Sophie Kowalevki, H. Poincaré et de H. Faye, en frontispice.

R. Guimaraes,
Membre de l'Académie des Sciences de Lisbonne.

Jacques Boyer. — **Histoire des mathématiques,** illustrée de fac-similé de manuscrits et de portraits; Paris, Georges Carré et C. Naud, éditeurs. Un vol. in-8° de 260 pages. Prix relié : 5 fr.

« Dans ce livre, dit l'auteur, nous nous sommes proposé de suivre l'évolution des mathématiques chez les divers peuples, depuis l'origine de la civilisation jusqu'à la fin du XIX^e^ siècle. C'est dire assez, vu l'ampleur du sujet traité, combien de recherches intéressantes, mais de second ordre toutefois, nous avons été obligé d'omettre. Aussi nous ne prétendons pas avoir épuisé une matière à laquelle Montucla au XVIII^e^ siècle, et Moritz Cantor, tout près de nous, ont consacré de gros volumes. Notre but est d'ailleurs différent : ces auteurs s'adressent à ceux qui savent, nous demandons simplement que ceux qui apprennent nous lisent. »

Ayant désigné son objectif, l'auteur élimine de ces pages, « tout luxe d'érudition ». Il se borne à donner des renseignements biographiques sur les principaux mathématiciens et s'efforce d'imprimer à son cours un caractère populaire *très élémentaire*, en évitant presque partout des formules. C'est à ce point de vue que nous devons apprécier ce nouveau livre. Ce ne doit pas être une œuvre appuyée sur les propres recherches de l'auteur, ni un cours pour les adeptes de la science historique, mais c'est un livre destiné à un lecteur instruit s'intéressant au développement des sciences mathématiques. Et même avec cette restriction, le but poursuivi par l'auteur n'était pas facile à atteindre ; car, en effet, exposer le développement de toutes les sciences mathématiques en 260 pages petit format in-8°, c'est une entreprise qui exige un plan habile et du talent pour une exposition succincte d'un si vaste sujet.

L'auteur a eu, il est vrai, dans cet ordre d'idées, des prédécesseurs en ces derniers temps. Le mathématicien anglais Rouse Ball a publié il y a quelques années, un petit exposé de l'histoire des mathématiques (Londres, première édition 1888 ; deuxième édition, 1893, de 520 pages). A la même époque l'américain Cajori a écrit également une courte histoire (Londres et New-York, 1894, de 422 pages) ; en outre, le savant danois Zeuthen a écrit

une histoire des mathématiques dans l'antiquité et pendant le moyen âge (édition allemande 1895, de 341 pages). Cette dernière œuvre, quoique destinée aux étudiants en mathématiques, comprend des vues originales de l'auteur sur les mathématiciens anciens. Les deux premiers ouvrages, presque deux fois plus gros que le livre de M. Boyer, ont eu en vue un lecteur plus familier avec les sciences mathématiques.

L'auteur a adopté l'ordre chronologique en réunissant dans ses récits les progrès accomplis dans les différentes branches de la Mathématique. Il partage son cours en 18 chapitres. Dans le 1^er^, il parle des mathématiques chez les anciens peuples de l'Orient ; les 2^e^, 3^e^ et 4^e^ sont consacrés à la mathématique grecque à partir du commencement de son développement jusqu'aux grands travaux de l'école d'Alexandrie ; dans le 5^e^, il énumère les travaux d'Apollonius et le développement des mathématiques appliquées. Dans le 6^e^, il examine l'état de la science grecque du 1^er^ au 5^e^ siècle après Jésus-Christ ; dans le 7^e^ chapitre il parle de la mathématique chez les Romains ; dans le 8^e^ de celle des Hindous ; dans le 9^e^ et le 10^e^ de la science arabe et de son influence sur l'Europe d'Occident ; dans le 11^e^ de l'école byzantine. Dans le 12^e^ chapitre il étudie les précurseurs des nouveaux progrès ; dans le 13^e^ les découvertes de Viète et de Néper ; dans le 14^e^ celles de Descartes, Fermat et Pascal ; dans le 15^e^ l'invention de la haute analyse par Newton et Leibniz ; dans le 16^e^, les mathématiciens anglais du XVIII^e^ siècle et les recherches d'Euler. Le chapitre 17^e^ est consacré aux œuvres de Lagrange, Monge, Laplace et Legendre. Enfin dans le 18^e^ chapitre, M. Boyer donne un aperçu en plusieurs pages des branches principales de la science contemporaine

L'impression ressentie après la lecture de ce livre a été avantageuse. L'auteur sait non seulement raconter d'une manière intéressante, mais encore il réussit à tirer intelligemment profit des sources et des travaux originaux et à choisir parmi eux ce qui est vraiment essentiel et ce qui donne la preuve convaincante du développement continu de la science. Néanmoins cela lui réussit mieux, en général, avec la science ancienne qu'avec la moderne. La haute portée de la découverte de l'analyse supérieure n'est pas, à notre avis, présentée aux lecteurs avec une clarté et une force satisfaisantes, et dans l'exposition trop succincte de l'époque contemporaine la place lui manque pour mettre en relief les principaux points caractéristiques du progrès, par exemple : la théorie des nombres, la théorie des formes, la théorie des groupes finis et des groupes de transformation ; nous ne trouvons qu'une petite mention de Lie que M. Boyer considère à tort comme suédois. Quoique l'auteur s'occupe principalement des mathématiciens décédés il donne, — avec raison, — quelques renseignements sur les savants vivant encore, mais il cite principalement des noms français. Il n'est pas juste pourtant de taire les noms des illustres allemands contemporains tels que Hilbert, Brill, Nöther, et plusieurs autres dont le mérite ne saurait être mis au-dessous de celui de quelques mathématiciens français cités dans cette *Histoire*.

Parmi les morts nous n'avons pas rencontré le nom du célèbre Helmholtz à qui l'on doit, entre autres, une belle page dans l'histoire du problème sur les fondements de la Géométrie dont M. Boyer parle aux dernières pages de son livre.

Dans le chapitre X, l'auteur consacre deux pages à l'état de la mathématique en Russie, d'après l'article de Bobynin inséré dans *l'Enseignement*

Mathématique; mais à la page 82 il en déduit avec trop d'empressement une remarque générale, qui n'est pas bien fondée, sur l'état des mathématiques chez les Slaves jusqu'au temps de Pierre le Grand.

A la page 198, il dit que Carnot s'est opposé, dans son ouvrage très connu *Réflexions sur la méthapysique du calcul infinitésimal*, à la méthode des variations de Lagrange. Carnot n'est pas contre ce procédé, mais il désapprouve seulement le système de la notation des dérivées introduit par Lagrange, lequel ne lui paraît ni commode, ni convenable.

Le théorème de Gauss (p. 289) se rapporte non pas à la somme des courbures mais à leur produit; c'est-à-dire à la courbure gaussienne des surfaces. A la page 230 où il est question de la représentation géométrique des nombres complexes, il faut mentionner le danois Wessel qui, avant Argand, a découvert cette interprétation.

A la page 10 nous lisons: ce n'est que dans une époque toute récente qu'on a démontré l'incommensurabilité du nombre π, c'est-à-dire l'impossibilité de trouver un carré équivalent au cercle; au lieu de l'incommensurabilité on devrait mettre la transcendance. A la page 28, l'énoncé de quelques théorèmes tirés des *Données* d'Euclide est erronné. A la place de « le triangle dont les angles sont donnés, est donné en grandeur », il faut dire « le triangle dont les angles sont donnés est donné *en son espèce* »; au lieu de « le triangle dont la valeur des angles et le rapport des côtés, est donné par son espèce », rétablir: le triangle dont nous connaissons la valeur d'un angle et le rapport des deux côtés qui forment cet angle est donné par son espèce ».

Il serait à désirer que dans une nouvelle édition de ce livre si utile M. Boyer voulut bien rectifier ces erreurs de détail et agrandir le dernier chapitre en le divisant en deux et peut-être en plusieurs sections.

Enfin l'exécution matérielle de ce volume, qui fait partie de la *Bibliothèque de la Revue Générale des Sciences*, est très réussie. De belles illustrations, surtout dans les chapitres consacrés à l'ancienne littérature et des portraits parfaitement authentiques des mathématiciens: Carnot, Cauchy, Descartes, M^me^ du Châtelet, Euler, Fermat, M^me^ Kovalewska, Galois, Lagrange, Laplace, Leibniz, Lobatchevski, Monge, Napier, Newton, Pascal, Saunderson, Viète et Weierstrass, l'orment agréablement.

S. Dickstein. (Varsovie.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences; t. CXXX; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

N° 18 (30 avril). — P. Painlevé: Sur une relation entre la théorie des groupes et les équations différentielles à points critiques fixes. — A. de Saint-Germain: Sur la fonction S introduite par M. Appell dans les équations de la Dynamique.

N° 19 (7 mai). — A. Korn: Sur la méthode de Neumann et le problème de

Dirichlet. — A. Davidoglou : Sur une application de la méthode des approximations successives. — Helge von Koch : Sur la distribution des nombres premiers.

N° 20 (14 mai). — Le Roy : Sur les séries divergentes. — L. Desaint : Sur la représentation des fonctions non uniformes.

N° 21 (21 mai). — M. Darboux est élu secrétaire perpétuel. — A. Férand : Sur la convergence des coefficients du développement de la fonction perturbatrice. — J. Coulon : Remarques à propos d'un mémoire de M. Masson sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles.

N° 22 (28 mai). — Ed. Maillet : Sur des suites remarquables de sous-groupes d'un groupe de substitutions ou de transformations de Lie. — A. Guldberg : Sur les équations aux dérivées partielles du troisième ordre qui admettent une intégrale intermédiaire.

Bulletin de la Société Mathématique de France ; Paris, Gauthier-Villars.

T. XXVII, fasc. 4. — G. Fontené : Sur les dégénérescences des 63 systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique. — J. Le Roux : Extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second. — L. Autonne : Sur les variétés unicursales à plusieurs dimensions. — Lémeray : Application des fonctions doublement périodiques à la solution d'un problème d'itération. — Ferber : Sur un symbole analogue aux déterminants. — L. Lecornu : Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge. — E. Landau : Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci. — P. Painlevé : Sur la représentation des fonctions elliptiques.

T. XXVIII, fasc. 1. — Goursat : Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x, y)\, pq$. — E. Maillet : Sur les groupes échangeables et les groupes décomposables. — E. Picard : Sur une classe de surfaces algébriques dont les coordonnées s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres. — E. Landau : Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers. — Brigard : Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance (1, 1) entre cubiques focales. — De Sparre : Sur une application des fonctions elliptiques. — Comptes rendus des séances. — Ripert : Sur les propriétés générales des formes quadratiques. — Andrade : Sur l'équation fonctionnelle de Poisson. — Hadamard : Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales. — P. Appell : Note sur les expériences du Commandant Hartmann.

Journal de mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville ; 5e série, publié par C. Jordan ; prix d'abonnement annuel : Paris, 30 fr. ; Départements et Union postale, 35 fr. ; Paris, Gauthier-Villars.

T. V, fasc. 4. — L. Leau : Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. — Lilieu : Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel. — Soltykow : Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

T. VI, fasc. 1. — P. Appell : Développements sur une forme nouvelle des équations de la dynamique. — H. Dupont : Sur les équations aux dérivées

partielles. — S. Zaremba : Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. — G. Stéphanos : Sur une extension du calcul des substitutions linéaires.

Bulletin de la Société philomatique de Paris, 9e série, t. I, 1899

N° 1. — D. André : De la comptabilité des assauts complets.

Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, publiée par G. Enestrom (Stockholm) : série 3, tome I; Leipzig, Teubner, 1900.

Nos 1 et 2 (avril). — G. Enestrom : Ziele und Aufgaben eines Organs fur mathemastich-historiche Forschung und für aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften. — F. Hultsch : Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen. — W. Schmidt : Archimedes' Ephodikon. — P. Duhem : Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique ? — G. Zeuthen : Note sur la Trigonométrie de l'antiquité. — C. de Vaux : Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. — P. Tannery : Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce. — M. Curtze : Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. — F. Kuchárzewski : Sur quelques niveaux du seizième siècle. — A. von Braunmühl : Die Entwickelung der Zeichen- und Formelsprachen in der Trigonometrie. — G. Loria : Le ricerche inedite di Evangelista Torricelli sopra la curva logaritmica. — G. Heinrich : Notiz zur Geschichte der Simpsonschen Regel. — J. Bosscha : Les « Œuvres complètes de Christiaan Huygens ». — D. J. Korteweg : La solution de Christiaan Hygens du problème de la chaînette. — J. Stäckel : Integration durch imaginäres Gebiet. — E. Lampe : Zur Biographie von Jacob Steiner. — E. Wolfing : Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten. — G. Vivanti : Lista bibliografica della teoria degli aggregati 1893-1899. — F. Engel : Sophus Lie. — F. Müller : Carl Immanuel Gerhardt. — S. Günther : Ferdinand Rosenberger. — M. Curtze : Zum siebenzigsten Geburtstage Moritz Cantors. — P. Mansion : Programme du cours d'histoire des mathématiques de l'université de Gand. — G. Valentin : Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie. — C. A. Laisant : Sur l'état d'avancement du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. — J. H. Graf : Uber die geplante internationale naturwissenschaftliche Bibliographie. — J. Boyer : Le congrès international des mathématiciens à Paris, 1900. — G. Enestrom : Le congrès d'histoire des sciences à Paris, 1900.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, anno 297, série 5a, vol. IX : 1er semestre 1900 : Rendiconti ; Rome, tip. dell. R. Acc. dei Lincei.

Fasc. 3 (4 février) et 4 (18 février). — Vitterbi : Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica a due variabile.

Fasc. 5 (4 mars). — Cerruti : Commemorazione del defunto Presidente Eugenio Beltrami.

Fasc. 6 (18 mars). — Levi-Civita : Complementi al teorema di Malus-Dupin.

Fasc. 7 (1er avril) — Levi-Civita : Complimenti al teorema di Malus-Dupin. — De Francesco : Sull' integrazione delle equazioni differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante.

Fasc. 9 (6 mai). — Almansi : Integrazione della doppia equazione di Laplace.

Rendiconti del Circolo matematica di Palermo ; t. XIV, 1900.

Fasc. 3, 4 (mai, juin, juillet, août). — Gerbaldi : Sul gruppo simplice di 360 collineazioni piane (Parte seconda). — Bucca : Studii di Analisi : I. Sullo sviluppo degl'integrali d'un'equazione differenziale lineare omogenea nell'intorno d'un punto singolare. — II. Sulla riduzione del gruppo di Galois d'un'equazione algebrica coll'aggiunzione di irrazionalità arbitrarie. — III. Sulle espressioni algebriche costruibili geometricamente colle sole coniche o con curve di ordine superiore al secondo. — IV. Sulla irrazionalità icosaedrica. — V. Sulla riduttibilità delle equazioni binomie. — Pincherle : Sopra un problema d'interpolazione. — Vivanti : Sulla trasformazione di Laplace. — Severini : Sulla rappresentazione delle funzioni reali di variabili reali mediante serie di polinomi razionali interi. — Puglisi : Sul movimento di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro. — Burgatti : Teoria dei sistemi articolati più semplici (con una tavola).

Giornale di matematiche di Battaglini, dirigé par A. Capelli ; vol. XXXVIII, 1900 : prix d'abonnement annuel (Union postale), 18 L. : Naples, R. Pellerano.

Mars-Avril. — G. A. Miller : On the transitive substitution Groups which are isomorphic to a given group. — Guido Fubini : Sulla teoria dei limiti. — Pietro Alibrandi : Sulla elasticità dei solidi complicata da variazioni di temperatura. — Geminiano Pirondini : Una corrispondenza particolare fra i punti di due linee piane. — Roberto Bonola : Sulla introduzione degli enti impropriî in Geometria projettiva. — V. Alberti : Su le differenze di O.

Annali di matematica pura ed applicata, dirigées par L. Bianchi, L. Cremona, U. Dini, G. Iung ; série 3, t. IV ; prix d'abonnement à un vol., 16 L. : Milan, C. Rebeschini, 1900.

Fasc. 1, 2 (mars). — Bianchi : Sulla deformazione dei paraboloidi di rotazione negli spazi di curvatura costante. — Tanturri : Ricerche sugli spazi plurisecanti di una curva algebrica. — Calò : Risoluzione di alcuni problemi sull' applicabilità delle superficie. — Armanini : Sulla superficie di minima resistenza. — Dini : Eugenio Beltrami (Cenno necrologico ed Elenco dei suoi lavori).

American Journal of mathematics, publié par S. Newcomb ; vol. XXII, 1900 ; prix d'abonnement annuel, 5 dollars ; Baltimore, Johns Hopkins Press.

N° 2 (avril). — O. Bolza : Remarks concerning the expansions of the hyperelliptic sigma-functions. — H.-F. Blichfeldt : On a certain class of groups of transformation in space of three dimensions. — L.-E. Dickson : Canonical

form of a linear homogeneous substitution in a Galois field.— E.-O. Lovett : Families of transformations of straight lines into spheres. — E.-M. Blake : The ellipsograph of Proclus. — N.-J. Hatzidakis : Displacements depending of one, two,... k parameters in a space of n dimensions. — G.-A. Miller : On a product of two substitutions.

Zeitschr. f. d. Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Glöser. 25e année, 1900. Alf. Hölder, Vienne.

N° 5.— H. Kleinpeter : Zur Einführung in die Calorimetrie.— P. Raimund Fischer : Die Gleichungen der gemeintschaftlichen Tangenten zweier Kreise.

Paedagogisches Archiv, herausgegeben von Prof. C. Dahn ; 42e année, n° 6, 1900, Dürr, Leipzig.

Nyt Tidsskrift for Matematik, redigeret of C. Juel et V. Trier, 11e année ; série B, n° 2. Kobenhavn, 1900.

El Progresso matematico. revista de matematicas puras y aplicadas, director D. Zoll G. de Galdeano. Série 2, ano II, Zaragoza, 1900.

N° 11. — G. Pirondini : Quelques applications des coordonnées intrinsèques. — A. Kraue : Nota matemática. — Z. G. de G. : La geometría noeuclídea. — D. Lauro Clariana : Aplicacion á la mecánica de la fórmula de L. Dirichlet — A. Aubry : Etude élémentaire sur la théorie des maxima et minima. — A. Bozal : Suma de las potencias m^{simas} de los reciprocos de todos los divisores de un numero.

Wiadomosci Matematyczne, rédigé par S. Dickstein, t. IV, n° 4, 1900 : J. Sikorskiego, Warszawa.

Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturæs. publié sous les auspices de l'Acad. R. des sciences de Lisbonne ; 2e série, t. VI, n° 21 (février 1900). — A. Schiappa Monteiro : Sur une inégalité. — J.-A. Martins da Silva : Sobre um integral definido. — A. Cabreira : Sobre o calculo das phases de uma funcção simples.

The american mathematical Monthly, rédigé par B.-F. Finkel et J.-M. Colaw ; prix d'abonnement annuel, 2 dollars ; vol. VII, 1900 : Drury College, Springfied, Mo., U. S. A. ; agent en Europe, A. Hermann, Paris.

Principales formules de la théorie des fonctions elliptiques. Tableau résumé par les *Nouvelles annales de mathématiques ;* in-8° ; prix 0 fr. 75 : Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Cette petite brochure est appelée à rendre les plus grands services aux candidats à l'agrégation. On peut même dire qu'elle leur est indispensable, puisqu'aux termes du dernier programme, pour le concours de 1900, ils sont officiellement autorisés à faire usage de ce tableau pour les compositions écrites. Nous ne pouvons qu'applaudir sans réserve à cette innovation. La surabondance des formules n'est pas en effet l'une des moindres difficultés de la théorie des fonctions elliptiques ; et il était profondément inutile, pour ne pas dire plus, d'imposer à la mémoire des candidats une pareille surcharge.

G. Alasia. — **Calcolo grafico ed applicazioni alla statica grafica** 1 vol. gr. in-8°, 97 p., 7 pl.; prix : 4 L.; Castello, S. Lapi, 1899.

P. Moutier. — **Essais sur l'organisation rationnelle de la comptabilité à parties doubles.** Première étude : Théorie algébrique de la comptabilité; gr. in-8°, 46 p.; prix : 2 fr.; Rouen, chez l'auteur, 15, rue Pillore, 1899.

A. Calinon. — **Etude de Géométrie numérique;** gr. in-8°, 34 p.; Paris, Gauthier-Villars; Nancy, Berger-Levrault, 1900.

Dr Eng. Jahnke. — **Ueber dreifach perperktivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie**: wissenschaftliche Beilage, Progr. der 8 ten Realschule, 1 broch. in-4°, 26 p., Berlin, 1900.

Fred. Pietzker. — **Beitrage zur Funktionen-Lehre.** 1 vol. in-8°, 64 p., Teubner, Leipzig.

J.-H. Graf. et Ed. Gubler. — **Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen;** erstes Heft (143 p.), die Bessel'schen Funktionen erster Art; zweites Heft, (156 p.) die Bessel'schen Funktionen zweiter Art; prix des deux fascicules : 8 fr. Wyss, Berne.

F. Amodeo. — **Aritmetica particolare e generale;** 1 vol. in-12, XV-415 p.; prix : 3,50 L.; Naples, Luigi Pierro, 1900.

G. Veronese. — **Elementi di Geometria,** avec la collaboration de P. Gazzaniga; in-12; 1re partie, XVI-119 p.; prix : 150 L.; 2e partie, VI-240 p.; prix : 2,50 L.; Vérone, Padoue, Drucker frères, 1900.

Cte Magnus de Sparre. — **Etude du mouvement des projectiles** dans le cas où la résistance de l'air est supposée proportionnelle au cube de la vitesse : 1 br. in-8°, 59 p.; Paris, Nancy, Berger-Levrault, 1899.

J. Massau. — **Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles;** 1er fasc., in-4°, autog., IV-144 p.; Gand, F. Meyer van Loo, 1899.

G. Martinelli. — **Divisibilità pei numeri primi e non primi;** in-8°, 32 p.; prix : 0, 60 L.; Naples, Aurelio Tocco, 1899.

P. Sacerdote. — **Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes** (thèse de doctorat) : in-4°, 112 p.; Paris, Gauthier-Villars, 1899.

J.-A. Serret. — **Cours de calcul différentiel et intégral;** augmenté d'une note sur la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite; 5e édit., 2 forts volumes in-8°, avec figures; prix : 25 fr.; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN HOLLANDE

1. Je me propose, dans les pages qui vont suivre, de donner quelques indications sur l'enseignement des mathématiques dans les Pays-Bas. L'étendue du sujet est telle que des restrictions me sont prescrites d'avance. Ce ne sera donc qu'un aperçu qui, sans doute, présentera des lacunes. Espérons qu'elles seront comblées plus tard et qu'un jour l'*Enseignement Mathématique* arrivera à posséder les éléments nécessaires à un aperçu complet.

Quoique le but de cette étude soit surtout d'arriver à donner des notions sur l'enseignement actuel, je ne crois pas inutile de présenter d'abord un court aperçu historique du développement de l'enseignement mathématique en Hollande.

2. L'époque la plus brillante de l'histoire de la Hollande, le XVII^e^ siècle, fut aussi l'époque de ses grands géomètres.

Leurs noms occupent une grande place dans l'Histoire des mathématiques ; les savants de tous les pays ont rendu hommage au génie créateur de quelques-uns, aux grandes qualités des autres. Il serait superflu d'insister sur ce fait généralement connu. Un aperçu de leur carrière scientifique se trouve dans les traités de l'histoire des mathématiques ; et, de son côté, M. D. J. Korteweg a résumé le caractère général de l'époque dans un discours prononcé à l'Université d'Amsterdam (1). Qu'il me suffise donc de citer les noms de S. Stevin, W. Snellius, Jean de Witt, C. Huygens, F. van Schooten, H. van Heuraet, J. Hudde ; auxquels il faut joindre ceux des savants étrangers, qui ont passé en Hollande une partie de leur vie, comme

(1) *Het bloeitydperk der wiskundige wetenschappen in Nederland.* Redevoering uitgesproken op den Jaardag der Amsterdamsche Universiteit den 8sten januari 1891.

A. Girard et R. Descartes. Mais il convient d'examiner, si l'influence de ces éminents maîtres fut assez grande pour faire éclore des traités de mathématiques élémentaires, propres à initier la jeunesse aux principes de la science et à les propager dans toutes les classes de la population. Consultons, à cet effet, le catalogue de la Société Mathématique d'Amsterdam qui nous donnera sous ce rapport quelques renseignements, et la série des communications de M. Bierens de Haan publiées dans les comptes rendus de l'Académie Royale des sciences d'Amsterdam (1).

3. L'inspection du catalogue montre qu'au moins une quarantaine de traités d'Arithmétique parus pendant le XVII^e^ et le XVIII^e^ siècle ont été conservés ; ce nombre s'augmente d'une vingtaine de traités d'Algèbre, d'une trentaine de traités de Géométrie et d'une vingtaine de traités de Mathématiques appliquées. Une liste dressée avec le plus grand soin par M. Bierens de Haan fait voir qu'environ quarante tables de logarithmes et de Trigonométrie furent publiées pendant ces deux siècles ; enfin plusieurs des traités conservés embrassent toutes les branches des mathématiques élémentaires pures et appliquées. Si d'une part on se rappelle que j'ai exclu de cette énumération les ouvrages des géomètres de premier ordre, traités destinés à ouvrir de nouvelles voies à la science et non à la populariser ou à l'enseigner, et, si d'autre part on tient compte du fait que je n'ai consulté qu'un nombre restreint de sources, on peut dire à bon droit, qu'on faisait grand cas de l'étude des mathématiques.

4. Tâchons maintenant de saisir l'esprit dans lequel ces traités étaient conçus, et, dans ce but, procédons d'abord à une inspection plus minutieuse des titres.

Nous voyons, dès l'abord, que les Hollandais ont bien vite saisi le côté pratique des mathématiques. Ce sont surtout les traités d'Arithmétique qui en font preuve. L'esprit du commerce se révèle dans un grand nombre d'entre eux ; on s'aperçoit que beaucoup d'auteurs s'efforcent d'initier les marchands à l'art de

(1) Ces communications se trouvent, sous le titre : Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis-en Natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden dans les comptes rendus (*Verslagen en Mededeelingen der Kon. Ak. v. Wetensch.*) depuis l'an 1874 jusqu'en 1888.

dresser et de faire leurs comptes. Dans d'autres, le jaugeage et le cubage des tonneaux est le but visible des calculs : enfin on s'adresse aux ingénieurs, aux arpenteurs et aux niveleurs pour leur donner un guide dans leurs opérations sur le terrain, aux marins pour guider leur course à travers l'Océan.

La même remarque se répète quant à la Géométrie. Plusieurs auteurs voient parfaitement le parti que l'art du dessin peut tirer de la Perspective et par conséquent de la Géométrie et son application à la science de l'ingénieur, de l'arpenteur et du marin.

Dans cet ordre d'idées il est naturel qu'un si grand nombre de tables de logarithmes aient paru en Hollande et que la Trigonométrie ait fait de rapides progrès : relevons, quant à cette catégorie, que la première table faisant usage de l'instrument encore nouveau des logarithmes parut dès 1626 par les soins d'Ezechiel de Decker, géomètre arpenteur et collaborateur d'Adr. Vlack, qui plus tard compléta la table [1].

5. C'est de ce même point de vue qu'on doit envisager la fondation de l'Académie pour l'éducation des ingénieurs, en 1600, par le prince Maurice de Nassau, institution qu'on peut regarder comme une première tentative pour fonder une École Polytechnique ou une École militaire supérieure. Les mathématiques furent d'emblée admises dans le cours ; ce dont on n'a pas à s'étonner pendant le règne d'un prince qui eut pour ami et guide scientifique S. Stevin ; mais le côté pratique est mis en relief ; et les instructions prescrivent d'initier les ingénieurs, au plus vite, aux opérations qu'ils seront appelés à exécuter, sans les torturer avec les parties plus abstraites de la science. L'enseignement mathématique fut donc ce que nous appellerions élémentaire.

6. Ne croyons pas, toutefois, que les côtés scientifique et pédagogique des mathématiques aient échappé à l'attention des auteurs. Plusieurs faits démontrent qu'ils avaient des vues plus larges.

---

(1) Voir les détails sur cette publication et la discussion de la question de priorité des Hollandais : *Bierens de Haan l. c.*, année 1874, p. 57.

En premier lieu, nous voyons qu'une grande partie du contenu des traités est souvent consacrée aux problèmes ; et parmi ces problèmes on fait grand cas de ceux qui sont propres à exercer l'esprit et à augmenter l'adresse dans l'art de résoudre les problèmes (le mot hollandais qu'on retrouve sans cesse dans ces traités est *ontbinding* c'est-à-dire la décomposition des problèmes). Les auteurs se portent des défis, se disputent sur l'exactitude des solutions, et s'intéressent aux problèmes proposés par les grands géomètres de l'époque.

En second lieu, on voit que l'étude du cercle et particulièrement celle de la quadrature était en vogue ; comme de nos jours, il convient de séparer les érudits sérieux des spéculateurs qui, sans fondement scientifique, se sentent attirés par le problème de la quadrature. Les recherches de Ludolph van Ceulen et d'Adriaen Anthonisz dit Métius (de Metz) sur l'approximation du nombre π sont bien connues. On est quelque peu surpris de trouver parmi les spéculateurs le nom célèbre de Scaliger, professeur à l'Université de Leyde.

En troisième lieu, plusieurs auteurs se donnent beaucoup de peine pour mettre en relief l'influence salutaire des mathématiques sur le bon goût, sur le jugement, voire même sur l'esprit religieux ; ils tâchent de faire ressortir le côté scientifique de leurs traités ; ils s'adressent à leurs lecteurs comme à un auditoire, qui a grandement besoin d'être convaincu de l'utilité de la science qui leur est offerte.

Enfin on voit qu'il y a des traités destinés aux élèves d'écoles et d'autres encore à l'adresse des amateurs ; deux catégories de lecteurs qui exigent qu'on s'occupe de considérations, autres que celles qui font aboutir la science aux applications pratiques.

7. Une analyse systématique des traités de mathématiques élémentaires des deux siècles précédents me ferait sortir du cadre dans lequel j'ai cru devoir resserrer cet exposé ; il n'est pas sans intérêt, cependant, d'en prendre quelques-uns, quelque peu au hasard, pour se former une idée de la méthode des auteurs et de la manière dont ils s'y prenaient pour composer leurs ouvrages. Fixons d'abord notre attention sur quelques cours complets de mathématiques.

Ozanam, bien connu par un recueil de Récréations mathématiques, publia à Amsterdam un cours complet de mathématiques (1697). Le cours se divise en cinq parties : I, Introduction aux mathématiques et éléments d'Euclide ; II, l'Arithmétique, la Trigonométrie et les tables sinus ; III, La Géométrie et la Fortification ; IV, La Mécanique et la Perspective ; V, La Géographie et la Gnomonique. On observera qu'on jugeait alors le domaine des mathématiques beaucoup plus étendu que de nos jours. L'ouvrage peut être considéré comme une preuve, qu'aussi en mathématiques on jugeait la Hollande propre à publier des traités en langue étrangère.

Gerhard Kinckhuysen, mathématicien résidant à Harlem, publia pendant la seconde moitié du XVII^e^ siècle, entre autres, un traité d'Arithmétique, un traité d'Algèbre et un traité de Géométrie. Le traité d'Algèbre (1661) attira l'attention de Newton qui eut l'intention d'en publier une nouvelle édition, intention qui ne fut pas réalisée.

Un travail caractéristique du XVII^e^ siècle est le traité de A. de Graaf (1694). L'auteur qui, pendant quelque temps, tint une école à Amsterdam, publia de même plusieurs ouvrages d'école et était aussi connu comme polémiste. Le titre promet : « Toutes les mathématiques reconstruites dans leur forme naturelle ». L'ouvrage est in-4°, compte 318 pages et est divisé en treize livres, contenant les Proportions, l'Arithmétique, la Géométrie, la Trigonométrie, l'Astronomie, l'Arpentage et le Jaugeage, la Navigation, les Fortifications, la Gnomonique, la Perspective, l'Optique, la Mécanique et l'Algèbre. Mais ce n'est pas tout, tant s'en faut. L'auteur fait précéder son ouvrage d'un discours sur l'utilité des mathématiques, science d'origine divine, et qui prédispose à comprendre les vérités du Christianisme, d'un discours sur la méthode qui nous y initie, sur l'attention qu'on doit porter à ses principes, sur la mémoire, ce don qui aide à l'apprendre. Une péroraison sur la manière d'étudier l'ouvrage couronne l'édifice.

On reçoit une impression à peu près analogue du traité de S. Panser (1766). Le domaine qu'il embrasse est moins vaste ; ce n'est que l'Algèbre et l'Arithmétique, mais la conception est la même. Encore un titre propre à faire impression : « Mathe-

matische Rariteitskamer (Cabinet de curiosités mathématiques) » ; encore de longs discours et des considérations métaphysiques, une dédicace d'un style ampoulé. Qu'on remarque que l'auteur écrit en hollandais et s'adresse aux autorités hollandaises ; bien qu'il fût géomètre officiel à Emden sur l'Ems dans une contrée maintenant allemande.

8. Nous terminerons notre aperçu sur les traités du dix-septième et du dix-huitième siècle par quelques remarques générales ; elles se rapporteront aux ouvrages dont le but est plus restreint.

Parmi les traités d'Arithmétique on en trouve qui sont destinés à l'école ; déjà en 1647 l'Arithmétique de Sybr. Hansz Cardinael porte le titre de Schoolboeck (livre d'école).

Les traités de Géométrie paraissent en général sous le nom d'éléments d'Euclide ; celui de Dou parut en 1606 et fut suivi de plusieurs autres ; sans doute l'opinion prédominante était qu'on ferait preuve de pédantisme en prétendant corriger le géomètre grec.

Parmi les traités il faut remarquer ceux consacrés à la Perspective ; leur publication à cette époque est en harmonie avec le degré de perfection qu'atteignirent l'Architecture et la Peinture. Citons parmi ces traités la traduction de l'ouvrage bien connu de Bosse qui parut en 1664 et l'essai de Perspective de G.-J. s' Gravesande (1711).

Au XVIII^e^ siècle, nous voyons apparaître des traductions de quelques traités classiques, comme de ceux de Clairaut sur l'Algèbre et la Géométrie (1760) et de l'Algèbre d'Euler (1773).

Dans ce même siècle, nous rencontrons des traités où l'esprit pédagogique se dessine plus nettement ; en même temps les collections de problèmes augmentent en nombre et on attache visiblement grand prix à leur résolution.

9. Passons maintenant à la fin du XVIII^e^ siècle et au commencement du XIX^e^, époque remarquable, sous plus d'un rapport, de l'histoire des mathématiques dans les Pays-Bas ; et tâchons de saisir quelques particularités distinctives de cette époque.

Le besoin d'étudier les sciences se fait vivement sentir dans toutes les classes de la population ; à côté des professionnels on

rencontre de nombreux dilettanti; bientôt les amateurs de la même science sentent le besoin de s'unir par un lien solide; la fondation de sociétés scientifiques en est la conséquence. En mathématiques, nous voyons la fondation de la société de mathématiques d'Amsterdam (1779). D'après les premières indications assez vagues, la société fut fondée pour former un lien entre ceux qui se vouaient aux sciences mathématiques, soit en professionnels, soit en amateurs, et surtout pour publier des ouvrages et des périodiques, parce que les efforts dans cette direction n'avaient naguère pas eu de succès. Bientôt la société publia des opuscules et des collections de problèmes; en outre elle fournit aux frais de la publication de quelques traités propres à l'étude des mathématiques, savoir : un traité des Fluxions et une traduction de l'histoire des Mathématiques de Montucla par A.-B. Strabbe, un traité de Trigonométrie par O. Bangma et une Géométrie par J. de Gelder.

10. Ce qui distingue en second lieu l'époque, c'est une tendance à régulariser l'enseignement, qui se révèle par des lois et des décrets. La loi sur l'enseigement primaire est promulguée (1806); déjà, à une époque plus reculée, le besoin d'un enseignement plus solide pour les officiers de marine et les officiers de l'artillerie et du génie s'était fait sentir; dès la restauration de l'indépendance des Pays-Bas, cet enseignement se trouve définitivement dans les mains de l'Etat; de même l'enseignement universitaire et l'enseignement préparatoire aux universités se trouve réglé par des décrets; tout cela exerce une influence manifeste sur l'enseignement mathématique et nous porte à examiner quelques ouvrages de ce temps.

11. A partir de cette époque les traités de mathématiques commencent à se subdiviser à mesure que la catégorie des lecteurs varie. Parmi les ouvrages d'Arithmétique il y en a qui sont destinés à l'éducation de la jeunesse; ils prennent un caractère plus élémentaire et se contentent des premiers éléments et de problèmes qu'on pourrait appeler rudimentaires. D'autre part, nous voyons des traités destinés évidemment aux élèves des gymnases et des écoles militaires; enfin il y a des traités dont le caractère est plus scientifique et qui s'adressent aux étudiants des

universités. Examinons-en quelques-uns pour saisir l'esprit de l'époque.

12. Le traité de Géométrie du professeur J.-H. van Swinden mérite une mention particulière. Ce géomètre remarquable (1746-1823), professeur à Amsterdam, doué d'un esprit original et lucide et d'un zèle infatigable, bien connu par sa coopération à l'introduction du système décimal des poids et des mesures, prenant vivement part au mouvement scientifique de son temps, contribua puissamment par son traité à une réforme de la Géométrie. Il annonce la rupture avec l'ancienne méthode d'Euclide que les auteurs antérieurs avaient trop servilement suivie. La forme se ressent encore des particularités du temps passé, une certaine ampleur se fait sentir dans la préface, mais l'originalité de l'auteur se révèle partout. Le traité attira l'attention de G.-C.-J. Jacobi, qui publia les solutions des problèmes.

De même J. de Gelder (1765-1840), professeur à Leyde, publia des traités de mathématiques élémentaires roulant sur toutes les parties de la science; ses ouvrages, comme celui de van Swinden se distinguent par la rigueur des méthodes, mais sont encore affectés de la prolixité dans les raisonnements qui distingue la période précédente, seulement l'auteur divague beaucoup moins; s'il tient à nous sermonner dans ses préfaces, s'il se plaît à énumérer les avantages de ses traités, du moins il ne quitte pas le domaine des mathématiques.

13. Les nombreux ouvrages de de Gelder contiennent de précieux renseignements sur l'enseignement mathématique de la première partie du XIX^{e} siècle; nous les examinerons donc de plus près sous ce rapport. Le but pédagogique de l'auteur se montre par le fait qu'il a presque toujours composé, à côté de ses grands traités, des doublures. Ainsi, par exemple, on a de lui les « Principes de la Géométrie » et les « Premiers principes de la Géométrie ». La même chose se répète quant à l'Algèbre. En lisant la préface très étendue des « Premiers principes de la Géométrie » on s'aperçoit bien vite que les « Principes » représentent un cours d'Université (Leyde) et sont destinés à ceux qui se vouent aux mathématiques, mais que les « Premiers

principes » sont destinés aux écoles latines. Ces premiers principes se bornent à la Géométrie plane et contiennent les notions générales, la congruence, les proportions, les aires des figures les plus simples, les figures semblables et quelques notions du cercle. Cette dernière partie a le caractère d'une introduction à l'étude universitaire, elle renvoie aux « Principes » et contient en outre quelques éléments de Trigonométrie.

Nous voilà donc au fait de l'étendue de l'enseignement mathématique des écoles latines; mais le petit livre nous renseigne aussi sur les conditions dans lesquelles cet enseignement se trouve vers la date de sa publication (1827), car il est à noter qu'il revêt dans plusieurs de ses parties, le caractère d'un plaidoyer. D'abord, dans la préface, l'auteur observe avec une certaine vigueur que la loi de 1815 exige des futurs étudiants des universités des connaissances en mathématiques; mais ensuite il lance ses invectives contre ceux qui prétendent qu'un esprit vraiment cultivé se distingue par son ignorance en Géométrie, et cela principalement parce que les mathémathiques sont le tombeau du bon goût. Et, vraisemblablement, on le voit par la peine que l'auteur se donne, les antagonistes ne se trouvent pas seulement dans les rangs du monde illettré; il vise les savants et les personnages influents qui se rendent coupables de semblables hérésies.

Le contenu de l'ouvrage est en harmonie avec le début. Evidemment l'auteur sent qu'il s'adresse à un auditoire réfractaire, un auditoire qui a grandement besoin d'être convaincu. Surtout dans la première partie, les premières notions, il montre par de nombreux exemples tirés de la Physique, de la Géographie et de la Cosmographie que la Géométrie a ses attaches dans toutes les parties de la science et de la civilisation humaine.

14. Il serait superflu d'analyser, pour le but que nous avons en vue, d'autres ouvrages du même auteur, puisque avec l'Algèbre la même chose se répète avec quelques variantes; nous en pouvons conclure que, dans la première moitié du XIX^e^ siècle, les mathématiques aux écoles latines se bornaient aux premiers principes dans le véritable sens du mot; que l'opposition contre cet enseignement était assez vive, et qu'une grande partie

de ce que nous appelons mathématiques élémentaires étaient reléguées à l'enseignement universitaire.

15. L'enseignement mathématique de l'école militaire eut, aussi, dans la première moitié du siècle, un représentant plein de mérite, savoir J. R. Schmidt, professeur de mathématiques à l'Ecole du génie et de l'artillerie de Delft. Le mot Ecole militaire doit être pris dans le sens le plus étendu, puisqu'un décret de l'année 1816 prescrit que les futurs officiers de marine doivent suivre le cours de cette école fondée en 1814. Schmidt fut, comme de Gelder, travailleur infatigable, et un des membres prédominants de la Société mathématique d'Amsterdam. Il publia des traités sur toutes les parties des mathématiques, qui, comme ceux de de Gelder, nous suggèrent quelques remarques.

L'auteur est original dans ses ouvrages sur les mathématiques supérieures; dans ses traités de mathématiques élémentaires il est l'interprète de S. F. Lacroix. Parmi ses traductions on remarque l'Algèbre, la Géométrie, la Trigonométrie, mais il rendit surtout un véritable service à la Hollande en publiant une traduction de la Géométrie descriptive de Lacroix (1821). Ce dernier ouvrage est probablement le premier traité sur cette science en langue hollandaise: du moins Strootman, qui publia en 1841 une Géométrie descriptive, remarque dans sa préface qu'il n'existe qu'un seul ouvrage hollandais sur la Géométrie descriptive et que cet ouvrage est une traduction, ce qui fait présumer qu'il a eu vue le traité de Lacroix-Schmidt.

De plus on remarque dans ses ouvrages une plus grande concision. Une des causes en est peut-être que l'auteur se rattache aux auteurs français; mais il y a une raison plus vraisemblable. Qu'on se rappelle que déjà au XVII^e^ siècle le besoin d'une académie pour les officiers du génie se fit sentir, ajoutons-y qu'au XVIII^e^ siècle on jugea l'enseignement mathématique de beaucoup d'importance pour les officiers de marine; cela prouve que les traités pour les écoles militaires répondaient à un besoin moins discuté, plus impérieusement senti; l'auteur a donc moins besoin de se poser en avocat.

16. Dans la période suivante, les auteurs professeurs de l'Ecole

militaire (depuis transférée à Breda), continuent la tradition. Relevons les noms de H. Strootman, auteur de la première Géométrie descriptive originalement hollandaise et de quelques traités élémentaires, et de J. Badon Ghyben, qui publia des traités sur presque toutes les parties des mathématiques élémentaires et supérieures. Le changement, déjà signalé, dans la forme des ouvrages se continue ; ils contiennent davantage, mais dans une forme plus concise ; les discussions et les considérations auxquelles de Gelder attachait tant de prix disparaissent. Si les traités sont encore assez volumineux, c'est parce que l'auteur tient à ne rien oublier et à donner surtout une grande dose de science à l'élève : on ne peut cependant nier que la valeur des traités comme conception scientifique a baissé depuis la période précédente.

17. Avant d'en finir avec cette période, fixons encore notre attention sur deux genres d'institutions où l'enseignement mathématique remplit un certain rôle.

En premier lieu, il est évident qu'un enseignement préparatoire dans les mathématiques devait être donné aux futurs élèves des Ecoles militaires ; cet enseignement se donnait pour la plus grande partie dans des institutions particulières. Les traités de mathématiques et les collections de problèmes, dont on faisait usage, peuvent en quelque sorte être considérés comme préparatoires aux traités complets de cette période ; ils ont souvent en vue un futur emploi de ces livres.

Remarquons, en second lieu, que déjà en 1817, un décret royal régla l'enseignement aux écoles de dessin et stipula qu'elles devaient servir à l'éducation des futurs artisans. En 1829 une extension fut donnée au decret ; il semble qu'on s'était aperçu que les arts utiles étaient trop sacrifiés aux beaux-arts et que surtout l'éducation des artisans était trop reléguée au second plan. Une conséquence de ces décrets fut que dans les programmes de ces écoles les mathématiques trouvent leur place. Ce furent surtout les applications de la Géométrie qui furent enseignées, l'enseignement était très élémentaire et tout pratique, mais nous relevons ce fait parce qu'il se rattache à l'état ultérieur de l'enseignement.

18. Les considérations précédentes nous ont menés insensiblement jusqu'à l'an 1850 environ ; en résumé, on voit que, comme aujourd'hui, l'enseignement mathématique était à la fois utilitaire et destiné à développer l'intelligence et le jugement. La première forme se trouve dans l'enseignement de l'Arithmétique dans les écoles primaires, dans l'enseignement aux écoles militaires et aux écoles de dessin ; la seconde forme se trouve surtout dans l'enseignement aux écoles latines (gymnases). Pour voir le résultat, il y a lieu de consulter une brochure de M. Steyn Parvé, à cette époque (1850) professeur à l'Athenée royal de Maestricht, plus tard Inspecteur de l'Enseignement secondaire. Cette brochure est surtout remarquable parce qu'elle fait sentir des lacunes dans l'enseignement mathématique, lacunes qui, plus tard, ont été comblées par la loi sur l'Enseignement secondaire. Nous croyons utile d'en donner une analyse sommaire.

19. En premier lieu l'auteur donne une revue générale de l'enseignement mathématique aux écoles latines et aux gymnases (les deux institutions préparent à l'université, le programme de la dernière est plus étendu) ; il se base sur les rapports des commissions d'examen d'admission à l'université. Par la clarté et le calme du style mêmes, par la multitude de faits cités à l'appui des assertions, cette revue assume de plus en plus le caractère d'une amère critique. Visiblement l'auteur est forcé de se poser en avocat pour défendre des principes qu'aujourd'hui personne ne conteste.

Il commence par la définition des mathématiques et démontre la nécessité de leur enseignement sous le point de vue du développement de l'intelligence et celui de la pratique ; il pose que le premier point de vue doit être celui du gymnase.

Il constate le triste état des connaissances en mathématiques chez les futurs étudiants et s'oppose, comme jadis de Gelder, aux savants, aux autorités et aux personnages d'influence qui croient les mathématiques superflues quand on se destine à la littérature, à la théologie ou au barreau. Ces résultats médiocres sont dus aux programmes, aux professeurs et à la méthode.

20. *Les programmes.* Nous avons déjà vu que l'enseignement aux gymnases était réglé par des décrets royaux. Ils étaient datés

de 1815, 1816, 1826. L'auteur met en relief que les limites de l'Arithmétique et de l'Algèbre y étaient passablement arrêtées, mais que dans la Géométrie tout est vague ; par conséquent la Géométrie de l'espace a tout à fait disparu des programmes, et, encore, on a resserré les limites des autres parties autant qu'on l'a pu. La conséquence directe en est qu'à l'université les professeurs ont la plus grande peine du monde à donner une certaine unité aux cours destinés à des étudiants accourus de tous côtés, et doivent souvent se contenter de donner une répétition de mathématiques très élémentaires.

Les professeurs. — L'auteur n'hésite pas à dire que beaucoup d'entre eux laissent à désirer, et cela principalement parce qu'on n'a pas toujours eu le soin de désigner à ces cours des personnes ayant étudié suffisamment les mathématiques ; il semble qu'alors on croyait que des personnes dont les études avaient pris une autre direction pouvaient bien enseigner les mathématiques par dessus le marché ; il démontre énergiquement que quiconque veut enseigner les mathématiques doit avoir fait de cette science le principal but de ses études.

La méthode d'enseignement. — Celle-ci était souvent défectueuse, ce dont on n'a pas à s'étonner ; au lieu de faire comprendre la liaison organique des théorèmes de Géométrie, au lieu de former et de développer l'indépendance du jugement des élèves, on leur faisait souvent apprendre par cœur les démonstrations des théorèmes et on les forçait à une reproduction pénible et machinale de la démonstration du professeur.

21. Mais la brochure est loin d'être seulement destructive, elle renferme aussi les idées de l'auteur sur la réforme essentiellement nécessaire de l'enseignement mathématique.

Avant tout, il démontre la nécessité de faire disparaître tout à fait les mathématiques élémentaires de l'enseignement universitaire et de les transférer aux gymnases et aux écoles préparatoires. Pour en finir avec les notions fausses, conséquences du vague des programmes qu'il condamne, il donne lui-même les limites des mathématiques élémentaires et les décrit de la manière suivante :

Arithmétique. — Nombres entiers, propositions élémentaires des nombres, fractions et nombres décimaux, poids et mesures.

Algèbre. — Opérations fondamentales, polynômes, fractions algébriques, théorie des radicaux, équations du premier et du second degré, logarithmes.

Géométrie. — Notions fondamentales, congruence et similitude des figures planes, cercle, aires des figures planes, polygones réguliers, la Trigonométrie, la Géométrie de l'espace (évidemment l'auteur suppose que cette dernière partie se borne aux premières notions).

Enfin l'auteur fait observer une grande lacune dans l'enseignement mathématique des Pays-Bas; cette lacune est le manque total d'écoles où ceux qui n'ont pas l'intention de compléter leurs études à l'université puissent se préparer à leur carrière sociale. Il cite comme exemples les institutions en Allemagne, les Realgymnasien, où l'étude des sciences exactes remplace celle des classiques. Il exprime le vœu que de pareilles écoles soient créées en Hollande.

Il a été donné à l'auteur de voir la réalisation de ses vœux et de coopére rplus tard, comme inspecteur, au fonctionnement d'écoles semblables à celles qu'il avait en vue.

22. Cette brochure nous mène à l'enseignement actuel des mathématiques élémentaires, dont nous donnerons une esquisse rapide. Passons donc en revue les différentes formes de l'enseignement et relevons-en ce qui appartient au domaine des mathématiques. Quelque rapide que soit l'esquisse, elle permettra de comparer cet enseignement à celui qui se donne ailleurs.

23. *Enseignement primaire.* — Il n'est pas facile de donner une classification des écoles primaires, puisqu'elles varient selon qu'elles se trouvent dans les villes populeuses où elles sont subdivisées en plusieurs catégories, ou dans les villages où elles sont souvent l'unique institution; mais cependant on peut les diviser en deux grandes classes, celles qui s'appliquent surtout à préparer les élèves à l'enseignement secondaire et celles qui se proposent de leur donner l'enseignement unique et final. Parmi les

dernières, on compte les écoles primaires supérieures professionnelles où actuellement le cours est plus développé.

L'enseignement mathématique est celui de l'Arithmétique. La loi ne donne pas d'autre définition et, quoique le programme varie selon les besoins de la population, une certaine unité se montre.

Il va sans dire que l'Arithmétique est élémentaire. Les nombres entiers, les fractions et les nombres décimaux, les poids et les mesures en constituent une grande partie ; la méthode prédominante pourrait être appelée la méthode de gradation. Comme les enfants commencent leur éducation à l'âge d'environ six ans, l'enseignement commence par les manipulations avec de très petits nombres ; à mesure que les enfants avancent en âge, les nombres s'augmentent et, de la sorte, ils sont graduellement initiés aux opérations fondamentales. Mais, en vertu de la classification susdite, l'instruction primaire embrasse encore d'autres opérations arithmétiques. Sans entrer dans de profonds détails, on demande l'attention des élèves pour les proportions et les rapports, la méthode de réduction à l'unité, les intérêts simples, les partages de propriété, les règles de société, les alliages, les questions de gain et de perte, etc. Notons qu'un grand nombre de collections de problèmes gradués à l'usage des écoles primaires a été publié et se publie constamment, problèmes adaptés à l'âge des élèves et contenant des applications de toutes ces parties à leur portée [1].

Relevons que la loi sur l'enseignement primaire de 1878 comptait parmi les sciences à enseigner la Géométrie pratique élémentaire, mais que la loi de 1889 a ôté cette science du programme et l'a remplacée par le dessin libre ; ce dessin vient en aide à l'imagination géométrique, parce que les exemples sont des figures d'une régularité géométrique.

L'enseignement mathématique trouve encore sa place dans les institutions appartenant à l'enseignement primaire, mais qui

---

(1) Dans la première partie de cette étude j'ai cité un assez grand nombre d'auteurs. J'ai pu le faire, parce que leurs noms appartiennent déjà à l'Histoire. On me pardonnera si, dès à présent, je me dispense de mentionner les noms d'auteurs, qui, pour la plupart, sont encore en vie et si je me contente de constater que leur efforts pour créer de bons livres de classe méritent l'appréciation.

poursuivent un but plus élevé, celui de former les futurs précepteurs des écoles primaires.

Remarquons enfin que la loi permet de donner de l'extension à l'enseignement des écoles primaires et, que dans les écoles supérieures déjà nommées, les mathématiques en général complètent le cours d'Arithmétique.

24. *Enseignement secondaire.* — Nous avons vu qu'à la fin de sa brochure M. Steyn Parvé démontra la nécessité de la fondation d'écoles, qu'il compara aux Realgymnasien de l'Allemagne. L'idée fut secondée par plusieurs autres autorités pédagogiques ; la lacune dans l'éducation se fit sentir de plus en plus, lorsqu'enfin le gouvernement entreprit la réforme. En 1863 le ministre de l'intérieur, Thorbecke, réussit à faire promulguer la loi sur l'enseignement secondaire. Elle contenait l'organisation des écoles suivantes :

L'Ecole secondaire à cours de cinq années,
L'Ecole secondaire à cours de trois années,
L'Ecole secondaire du soir,
L'Ecole d'Agriculture,
L'Ecole polytechnique.

Comme on le voit, l'ensemble des institutions réglées par la loi est hétérogène. On désirerait ardemment y voir des institutions qui ne sont pas nommées ; d'autre part on se demande si l'Ecole d'Agriculture et l'Ecole polytechnique n'exigent pas une organisation spéciale. Mais qu'on se rappelle que la loi date de 1863 : qu'on s'est d'abord appliqué à subvenir aux besoins les plus pressants, et que beaucoup d'institutions qui pourraient s'y trouver sont régies par d'autres lois ou décrets. Néanmoins une revision de la loi est vivement désirée par quiconque s'intéresse à l'enseignement en Hollande.

Comme le présent travail traite de l'enseignement des mathématiques élémentaires, nous passerons sous silence l'Ecole polytechnique et nous ne ferons qu'effleurer l'Ecole d'Agriculture, pour nous occuper plus en détail des autres écoles.

25. *École secondaire à cours de cinq années.* — Cette école est celle que M. Parvé réclamait ; c'est la principale institution pour l'enseignement des mathématiques élémentaires. Pour bien comprendre son organisation, ne perdons pas de vue que, tout comme

l'école primaire, elle a un but double. L'enseignement est final et en même temps préparatoire ; final pour ceux qui abordent leur carrière sociale à la sortie de l'école et ont senti le besoin d'une base solide de sciences exactes ; préparatoire pour ceux qui se proposent de suivre un cours plus élevé, particulièrement celui de l'École polytechnique. Une certaine hétérogénité dans le programme en est la cause.

Voyons d'abord ce qu'on entend par mathématiques élémentaires. M. Steyn Parvé donna des limites dans sa brochure pour remédier au vague des opinions sur ce sujet. Le programme de l'école secondaire part des idées qu'il formula, mais il a étendu les limites. En fixant notre attention sur les points principaux et en faisant ressortir les côtés saillants, nous arrivons à l'énumération suivante :

Arithmétique. — Nombres entiers, propositions élémentaires des nombres, fractions et nombres décimaux, poids et mesures, proportions et rapports, le calcul des intérêts, la règle de société, etc., nombres incommensurables, racine carrée et cubique, nombres approchés. Problèmes empruntés à la vie pratique.

Algèbre. — Opérations fondamentales, polynômes, fractions algébriques, équations du premier degré, théorie des radicaux et des exposants négatifs ou fractionnaires, équations du second degré et équations à plusieurs inconnues dont la solution se réduit à celle d'une équation du second degré ; nombres imaginaires ; logarithmes, progressions arithmétiques et géométriques, intérêts composés, équations indéterminées du premier degré, premiers éléments de quelques opérations traitées en détail dans l'Algèbre supérieure.

Géométrie. — Notions fondamentales, congruence et similitude des figures planes, cercle, aires des figures planes, polygones réguliers. Trigonométrie. Géométrie de l'espace ; ligne droite et plan, polyèdres, solides de révolution, quelques notions de Géométrie supérieure devant servir d'introduction à l'étude de cette science. Géométrie descriptive ; droite et plan, trièdre, polyèdres selon la méthode de la projection orthogonale.

Ajoutons qu'on donne un cours de Mécanique élémentaire et

que le Dessin linéaire fait parti de l'enseignement. Ce dessin vient en aide à la Géométrie, parce qu'il permet de faire exécuter les problèmes de Géométrie plane et les épures de Géométrie descriptive.

Nous avons analysé en détail le programme de l'École à cours de cinq années parce qu'il donne à peu près la mesure des mathématiques élémentaires, telle qu'on les entend en Hollande; l'analyse des autres institutions peut donc être sommaire.

26. *École secondaire à cours de trois années.* — Les deux classes qu'elle compte de moins que la précédente sont les deux classes supérieures. Ne croyons pas toutefois qu'on obtiendrait le programme de cette école en retranchant la dernière partie du précédent.

Le but de cette école étant d'être en même temps une école finale, on s'applique à enseigner les mathématiques dans une forme plus concise, à entrer moins profondément dans quelques détails; et de cette manière l'enseignement devient peut-être plus superficiel mais en même temps plus complet.

Le programme original de Steyn Parvé s'accorde en plusieurs points avec celui de cette école. L'école à cours de trois années est l'unique école secondaire de plusieurs petites villes et fleurit dans les grandes villes à côté de l'école à cours de cinq années.

27. *École secondaire du soir.* — Nous voilà arrivés à une école qui poursuit un but tout différent. J'emploie le mot *école du soir*, quoique la loi parle aussi d'écoles qui donnent leurs cours pendant la journée.

Mais comme cette forme n'a jamais été populaire, nous ne nous en occuperons pas, et considérerons seulement celle où l'enseignement se donne pendant les heures du soir. D'après les termes de la loi, l'école est destinée aux futurs artisans et laboureurs; comme les écoles se trouvent surtout dans les villes, c'est à la première catégorie d'élèves qu'elles s'adressent.

Comme nous l'avons vu, bien avant la loi de 1863, il existait dans la plupart des villes des écoles de dessin; surtout dans les villes populeuses; celles-ci avaient pris leur essor et, à l'époque de la promulgation de la loi, il y en avait qui étaient devenues de véritables écoles des arts et métiers. En créant les écoles du soir, la loi ne fit dans beaucoup de villes autre chose que légaliser, régu-

lariser et étendre des institutions déjà florissantes ; mais dans d'autres, surtout dans les villes moins populeuses, elle remédia aux lacunes des programmes et rendit ainsi un véritable service à l'enseignement. Tâchons donc maintenant de décrire le rôle que joue l'enseignement mathématique, dans ces institutions, qui, sous des noms différents, sont d'une grande utilité pour les artisans et artistes.

Il ne peut être question d'un cours de mathématiques comme celui des deux institutions précédentes. La majorité des élèves sont de futurs artisans qui n'ont parcouru que l'école primaire et qui, pendant le jour, exercent leur métier ; une grande partie des heures scolaires est consacrée au dessin libre et au dessin linéaire ; il ne reste donc guère de temps pour les sciences. Par conséquent l'enseignement mathématique prend une forme à la fois élémentaire et pratique ; il devient la continuation de l'Arithmétique de l'école primaire et donne les calculs pratiques et la géométrie pratique qui joue un si grand rôle dans les arts et métiers.

Mais les mathématiques sont représentées dans ces écoles d'une manière indirecte encore. Comme il a déjà été remarqué, le dessin linéaire et plus particulièrement le dessin industriel y joue un grand rôle ; or, la connaissance des éléments de la méthode des projections et de la perspective étant indispensable pour bien saisir les méthodes de dessin, et le temps ne permettant pas qu'on y consacre un cours spécial, on y remédie en faisant exécuter aux élèves des dessins où ces principes sont appliqués à des exemples simples, empruntés pour la plupart aux objets familiers aux élèves par la pratique de leur métier.

Ajoutons que, dans quelques villes, ces écoles du soir ont pris une extension qui les a transformées en de véritables académies ; en ce cas le cours de mathématiques est plus développé, la Géométrie descriptive trouve sa place dans le programme et la perspective est traitée avec plus de détails.

28. Terminons l'analyse des écoles nommées dans la loi par un seul mot sur l'École d'Agriculture. Cette école à Wageningen est maintenant subdivisée en plusieurs parties et a pris un développement beaucoup plus grand que ne le prévoyait la loi. Une de ces parties est une école secondaire, qui retombe dans les con-

sidérations précédentes ; il est clair que dans les autres parties les mathématiques sont surtout considérées au point de vue de leurs applications.

29. L'analyse sommaire de l'enseignement des mathématiques élémentaires d'après la loi sur l'enseignement secondaire terminée, la tâche de donner un aperçu sur les autres institutions devient difficile. Jusqu'ici on pouvait remarquer une certaine unité, mais maintenant une multitude d'écoles et de lycées se déroulent devant les yeux de l'observateur, institutions dont l'organisation se trouve disséminée dans plusieurs lois et dont plusieurs sont des créations particulières et locales. Nous en parcourrons rapidement quelques-unes en nous proposant surtout de les rapprocher des types déjà traités.

30. Considérons d'abord les institutions qui se rapprochent plus ou moins de l'école secondaire à cours de cinq années.

Ecole secondaire pour les jeunes filles à cours de cinq années. — La loi de 1863 passe sous silence la question du sexe des élèves ; par conséquent bien des écoles secondaires nommées comptent des jeunes filles parmi leurs élèves ; la grande majorité des élèves cependant sont des garcons.

Le besoin s'étant fait sentir, dans plusieurs villes, d'une instruction solide pour les jeunes filles, on érigea, à leur usage, des écoles dont le programme montre une grande analogie avec ceux des écoles décrites. Cependant, quand on y regarde de plus près, on voit que les sciences en général et les mathématiques en particulier, se trouvent beaucoup plus au second plan. Il s'ensuit que l'enseignement mathématique se borne à l'Arithmétique et aux premiers éléments de l'Algèbre et de la Géométrie. Je me bornerai à cette remarque générale, car il n'est pas facile de tracer rigoureusement les limites ; la loi, les décrets et les droits qui s'acquièrent par les examens de sortie des écoles secondaires précédentes donnent à celles-ci une certaine unité ; mais les écoles pour les jeunes filles sont beaucoup plus indépendantes l'une de l'autre et par conséquent moins assujetties à des règles immuables.

31. *Gymnase.* — Après la création des écoles secondaires les

gymnases perdirent de plus en plus le caractère d'écoles finales pour revêtir celui d'écoles préparatoires aux universités. Leur organisation est décrite à grands traits dans la loi de l'enseignement supérieur (1876), mais leur programme, en ce qui concerne les sciences exactes, ne pouvait manquer d'être influencé par celui des écoles secondaires.

La loi de 1876, se plaçant sur le point de vue que les étudiants des universités doivent être, aussi vite que possible, initiés à leurs études spéciales, retira les mathématiques élémentaires de l'enseignement universitaire afin de leur assigner leur place définitive dans l'enseignement des gymnases. Mais leur position y est tout autre que dans les écoles secondaires. Tandis que dans celles-ci les sciences exactes prédominent, dans celles-là les classiques doivent occuper la place d'honneur, et par conséquent les mathématiques occupent beaucoup moins de place sur le programme. Il s'ensuit qu'en même temps la signification du mot élémentaire s'altère.

Au Gymnase, on avait à vaincre la difficulté que l'éducation mathématique de ceux qui se destinent à l'étude des lettres, à celle de la théologie et à celle du droit, doit différer de celle des futurs étudiants de la médecine et des sciences exactes et naturelles. Par conséquent on a divisé le cours en deux parties. En examinant le cours de la seconde catégorie, et en le comparant à celui de l'école secondaire, on voit qu'on y a remplacé la Géométrie descriptive par la Trigonométrie sphérique et les premiers éléments de la Géométrie analytique, changement qui s'explique, quand on songe à la différence entre les études de l'université et celles de l'Ecole polytechnique. Le cours de la première catégorie se rapproche du programme donné autrefois par M. Steyn Parvé.

31. *Ecole secondaire de commerce ou d'industrie.* — Déjà dans l'enseignement secondaire on a senti le besoin d'une préparation spéciale pour le commerce ou l'industrie. Quoique la loi ne dise rien à cet égard, l'initiative des autorités municipales y a remédié ; dans quelques villes on a ajouté à l'école secondaire un cours spécial pour ceux qui se destinent au commerce, tandis qu'à Amsterdam une véritable école du commerce a été fondée. En considérant le cours de l'école secondaire comme typique, on

conçoit aisément comment ce cours s'est transformé dans ces écoles et a pris une direction plus spéciale et plus pratique en tenant compte de la future carrière des élèves.

32. *Ecoles militaires ou navales.* — Nous avons vu que dans la première moitié du XIX^e^ siècle les écoles militaires étaient des institutions à cours complet de mathématiques élémentaires et qu'en même temps leurs professeurs étaient les auteurs de plusieurs traités qui, de leur temps, jouirent d'une réputation plus ou moins méritée. Comme, depuis, ces écoles ont été réorganisées, on pourrait croire au premier abord que, de même que dans l'enseignement de l'Ecole polytechnique et celui des universités les mathématiques élémentaires aient entièrement disparu du programme. Ce n'est pas le cas cependant, car l'âge d'admission des élèves est tel qu'il ne peuvent avoir guère parcouru que l'école secondaire à cours de trois années, le programme des écoles navale et militaire comprend donc le cours des deux dernières années de l'école à cours de cinq années. Ce qui est dit s'applique sans réserve à l'école navale : quant à l'école militaire, elle est divisée en une école préparatoire et une école supérieure ; cette division donne en même temps la démarcation entre les mathématiques inférieures et supérieures. Remarquons que l'entrée à ces écoles est soumise à un concours d'admission, concours où, pour ce qui concerne l'école militaire supérieure, les élèves d'institutions civiles, en particulier ceux de l'école secondaire à cours de cinq années, peuvent prendre part. Quant aux examens d'admission à l'école militaire préparatoire, elles exigent une préparation très intense ; des écoles fondées par l'initiative particulière existent et s'appliquent en assez grand nombre à la donner.

33. Considérons en second lieu les institutions qui, dans leur programme scientifique, et par conséquent dans le rôle qu'y jouent les mathématiques élémentaires, se rapprochent du type de l'école secondaire du soir.

Citons, par exemple, comme appartenant à cette catégorie, les écoles des métiers, les écoles des beaux-arts et des sciences industrielles, les écoles des mécaniciens de la flotte, etc., institu-

tions ayant toutes le caractère d'écoles professionnelles. Disons un mot sur leur origine.

34. La loi sur l'enseignement secondaire avait créé, avec l'école secondaire du soir, l'école secondaire du jour; l'observation a montré que cette école ne fut jamais très populaire ; une des principales raisons de ce manque de viabilité est que son caractère professionnel n'est pas suffisamment indiqué. Au lieu de cette école on a vu surgir, dues à l'initiative particulière, souvent avec des subventions des municipalités, des écoles professionnelles parmi lesquelles on compte par exemple les écoles des métiers, les écoles des beaux-arts et des sciences industrielles, les écoles des mécaniciens etc. Disons en général que l'enseignement des mathématiques est tout pratique dans ces institutions et doit être envisagé du même point de vue que celui de l'école du soir.

35. Terminons enfin cette revue en remarquant qu'en Hollande, de nos jours comme au passé, on comprend clairement le profit que l'art du dessin peut tirer de la perspective et de la Géométrie appliquée. Les grandes écoles où se forment les futurs professeurs du dessin, l'école normale pour les professeurs du dessin et les écoles ou académies des beaux-arts et des sciences ont donc donné place sur leurs programmes à la perspective, mais elles se sont en même temps appliquées à la débarrasser des procédés machinaux et à la déduire d'une base géométrique rationnelle.

36. La création des écoles secondaires, suivie de celle des autres institutions, dont le présent exposé contient une brève analyse donna une grande extension au nombre de professeurs. M. Steyn Parvé se plaignit de ce qu'on confiât l'enseignement mathématique à des personnes n'ayant fait aucune étude spéciale de cette science ; depuis lors l'étude des mathématiques devint le but d'un grand nombre de jeunes gens se destinant à l'enseignement. Un grand nombre de traités et de livres de classe furent publiés se distinguant, quant au fond et à la forme de ceux de la période précédente. Une analyse de ces traités dépasserait de loin les limites que je me suis tracées dans cette étude.

J. Cardinaal Delft.

SUR LA CLASSE
DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Au moment où il est question de grandes réformes dans l'Enseignement secondaire, et les conditions d'admission aux écoles de l'Etat, je considère comme un devoir d'attirer l'attention sur la voie déplorable dans laquelle est engagé l'enseignement des *mathématiques spéciales*.

La préparation aux Ecoles polytechnique et normale a donné naissance à cette classe qui exerce une influence capitale, non seulement sur l'enseignement des mathématiques, mais sur le développement même de l'esprit scientifique en France. Les années passées en *spéciales* laissent dans l'intelligence des élèves une impression des plus vives et des habitudes d'esprit qui, chez beaucoup d'entre eux, ne peuvent plus être effacées, même par deux années d'Ecole polytechnique. En outre, le prestige de cette classe est tel que son enseignement rayonne sur les enseignements voisins ; et si, depuis quelques années, la préparation et les examens d'admission à l'Ecole centrale se font dans un esprit qui n'est pas approprié à de futurs ingénieurs, c'est à l'influence des *spéciales* qu'on le doit.

Cette classe qui a rendu autrefois de grands services, s'est peu à peu écartée de son rôle et il est grand temps de l'y ramener.

La classe de *spéciales* doit recevoir des élèves possédant très bien les mathématiques élémentaires : arithmétique, algèbre jusqu'au second degré inclus, géométrie d'Euclide, éléments de trigonométrie. On doit y enseigner les éléments de la théorie des séries, le calcul et les applications des dérivées, les théorèmes généraux de la théorie des équations, les *éléments* de la géométrie analytique ; je souligne à dessein le mot *éléments* pour la

géométrie analytique ; la place occupée par l'enseignement de cette partie du programme devrait en effet être très restreinte, car l'influence de la géométrie analytique au point de vue éducatif est presque nulle, dès qu'on en a bien compris l'idée fondamentale qui est assurément de la plus haute importance.

La durée des études de mathématiques spéciales, comptée à partir de la sortie de la classe d'élémentaires (programme du baccalauréat), ne devrait pas dépasser deux ans.

Dans d'autres pays cet enseignement est donné par les universités; mais il est utile de lui faire une place à part dans l'enseignement secondaire, car les élèves étant encore traités en écoliers et astreints à des exercices réguliers acquièrent l'habitude du calcul, tant pour les dérivées que pour les problèmes essentiels de la géométrie analytique et peuvent aborder facilement l'enseignement supérieur.

Ainsi comprise, cette classe rendrait les plus grands services dans le développement scientifique des jeunes gens, comme un intermédiaire entre l'enseignement élémentaire et l'enseignement supérieur, continuant le premier et préparant au second.

Malheureusement, cette mission n'est plus remplie par la classe actuelle de spéciales. Les nécessités de la préparation aux concours et de la concurrence, au point de vue des succès, avec les établissements libres, ont produit un enseignement qui est à lui-même sa fin propre, qui ne regarde ni au-dessus, ni au-dessous de lui, qui est néfaste pour l'esprit scientifique. Il s'agit pour le professeur de l'État aussi bien que pour le professeur libre, de faire admettre à l'École polytechnique les jeunes gens qui leur sont confiés : les parents et beaucoup d'élèves se soucient fort peu de la science : ils demandent le succès et s'adressent à la maison qui opère le mieux dans ce but. Il en résulte que tout l'enseignement est faussé par l'idée de la préparation à l'examen. L'importance d'une question n'est pas son importance réelle, éducative, scientifique ou pratique, c'est son importance dans l'examen. On recueille les questions des examinateurs, on note leurs habitudes ou leurs préférences : on prépare l'examen oral comme on prépare le baccalauréat dans les « fours à bachot ». Qu'un examinateur ayant devant lui un élève intelligent et voulant le pousser, fasse quelques objections, s'élève au-dessus des

questions moyennes pour voir s'il peut donner une très bonne note, ou, ayant constaté que le candidat a des connaissances en dehors du programme, le pousse sur ces connaissances pour savoir ce qu'elles valent, aussitôt les objections sont recueillies, les nouvelles questions sont enregistrées et enseignées l'année suivante. On est ainsi tout surpris de trouver dans certains cours des fragments d'enseignement supérieur, sortes d'aérolithes sans relation apparente avec le milieu environnant ; l'explication de ce phénomène est dans ce que nous venons de dire. Il arrive qu'un examinateur pose, en restant parfaitement dans les termes du programme, des questions qui lui ont été suggérées par la connaissance qu'il a des parties plus élevées de la science. Certains professeurs qui assistent aux examens, reconnaissent l'origine de ces questions, et se croient ensuite obligés d'introduire ces théories étrangères au programme, sous prétexte que « cela peut servir aux examens ». Par exemple, il y a quelques années, on enseignait dans certains cours l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

La plupart des professeurs de l'Université ont d'abord lutté contre ces tendances ; j'en connais qui ont déclaré ne vouloir s'occuper des questions d'examen que dans la révision finale à titre d'exercice ; ils n'ont pas pu résister : les élèves d'un côté, l'administration de l'autre les ont obligés à imiter l'enseignement libre ; les élèves veulent arriver, l'administration ne veut pas que les lycées aient moins de succès que les autres établissements.

On est ainsi arrivé à un enseignement qui est moins une science qu'un « sport », et auquel il faut reprocher : l'artifice, les énoncés généraux prétendant parer d'avance à toutes les difficultés, le cas exceptionnel devenu plus important que le cas général, des notations trop bien combinées pour soutenir la mémoire et dispenser de raisonner, le dédain des applications, des calculs numériques, des questions simples. L'abus de la géométrie analytique, surtout dans la recherche des lieux géométriques, est un point sur lequel il faut insister ; comme nous l'avons déjà dit, cette partie du programme, une fois les principes établis et les problèmes fondamentaux traités, est stérile au point de vue éducatif : les élèves s'y habituent aux formules toutes faites et perdent l'habitude de raisonner sur les objets eux-

mêmes : ils ne voient plus qu'une règle « *traduire analytiquement un énoncé et éliminer* » ; ajoutons que, dans beaucoup de questions posées aux examens et traitées dans les cours comme préparation, cette *élimination* ne peut pas être faite et n'est qu'une vue de l'esprit ; on habitue ainsi l'élève à se contenter de possibilités au lieu de lui faire creuser une question jusqu'au fond. Il me semble que cette place exagérée prise par la géométrie analytique, tient à ce que les examinateurs y trouvent une mine de questions de formes très variées qui, petit à petit, pénètrent dans l'enseignement sous la pression des élèves.

On jugera de la place occupée dans l'enseignement par les différentes parties du programme sur le tableau suivant. Un professeur de spéciales à Paris fait à peu près six mois de cours, à raison de douze heures de leçons et trois heures de conférences par semaine :

Algèbre	2 mois
Géométrie analytique	3 mois
Mécanique	10 à 12 jours
Compléments d'élémentaires et trigonométrie	2 à 3 semaines.

Dans ces cours faits très rapidement les livres sont pour ainsi dire proscrits ; tout l'enseignement se fait oralement, par leçons d'une heure et demie au moins sur deux heures de classe : le professeur peut à peine interroger et corriger les devoirs au tableau. Ainsi se perd l'habitude de la réflexion, du travail personnel, de la recherche, de la critique.

Pour beaucoup d'élèves, ce régime dure trois ans, pour quelques-uns quatre. Je fais naturellement entrer dans ce compte le temps passé dans ce qu'on appelle la classe d'élémentaires A, qui est, en somme une première année de spéciales, instituée depuis une quinzaine d'années. Autrefois les élèves allaient directement, de la classe de mathématiques élémentaires en mathématiques spéciales, et en moyenne, étaient reçus au bout de deux ans.

Après les trois années de préparation actuelles, l'esprit des élèves a pris un pli tel que, pour la plupart d'entre eux, l'enseignement supérieur n'est ni compris, ni apprécié ; beaucoup de jeunes gens sortent de l'École Polytechnique sans avoir profité, comme ils le devraient, de l'excellent enseignement qu'on y

donne. Aussi s'est-il produit, dans ces dernières années, des plaintes des chefs de service (École de Fontainebleau, École des Ponts et Chaussées) sur la difficulté qu'éprouvent les élèves à appliquer les théories qu'ils ont apprises. Il arrive ainsi qu'un effort immense, fait par des professeurs excellents et dévoués, par des examinateurs savants et consciencieux, sans cesse préoccupés de choisir les meilleurs candidats, par des jeunes gens qui donnent une somme de travail bien supérieure à celle qu'exige l'obtention des grades littéraires correspondants, bien supérieure aussi à celle de jeunes Anglais ou Allemands du même âge, n'aboutit qu'à de mauvais résultats avec un véritable surmenage des maîtres et des élèves.

Il n'est que temps de changer cet état de choses; il faut conserver le contact avec la géométrie et l'algèbre élémentaire dont l'influence sur la formation de l'esprit est plus profonde que celle de la géométrie analytique; il faut donner des problèmes et des exercices que l'on puisse traiter à la fois par la géométrie élémentaire et la géométrie analytique, ne pas faire une théorie nouvelle sans nombreuses applications numériques, éviter les généralités pour traiter à fond des cas types, multiplier les exercices écrits où l'élève peut montrer de l'initiative et de l'esprit de recherche, enfin ne laisser les élèves en *spéciales* que deux ans.

Comment arriver à ce résultat ? On dira que les examinateurs peuvent réagir et donner aux études l'orientation qu'ils veulent : cela ne me paraît pas exact. Quel que soit l'examinateur, quelles que soient les questions qu'il pose, il sera forcément amené à se répéter, à faire des objections ou des critiques pour s'assurer que le candidat a compris et pour dérouter la préparation artificielle : si l'élève répond bien, l'examen s'élèvera et les questions deviendront plus difficiles. Comment empêcher les préparateurs de recueillir ces objections, ces critiques et de les incorporer au cours. Ainsi d'année en année de nouvelles questions deviennent classiques et l'examinateur ne sait plus comment faire pour dérouter une préparation aussi bien truquée. Un autre remède, déjà essayé mais tout aussi inefficace, est la modification des programmes. Le système a un vice fondamental, comme tous les concours : c'est de décider l'avenir d'un jeune

homme sur quelques épreuves très rapprochées les unes des autres. Dès lors, l'esprit est tendu toute l'année vers ces instants redoutables dont la perspective hypnotise les plus forts et leur enlève toute liberté d'esprit, en les livrant tout entiers aux soucis et aux artifices de la préparation.

Le seul remède est de classer les élèves d'après leur travail d'une, ou mieux de deux années entières : pour cela il faut résolûment adopter l'idée, soit du stage scolaire dans les lycées pour les candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, soit de l'organisation d'écoles préparatoires analogues à celles qui sont établies dans les Facultés des Sciences pour les futurs étudiants en médecine. Nous ne pouvons pas, dans cet article, donner un projet étudié pour l'organisation de ces écoles préparatoires : il faudrait que les candidats y restassent deux ans, une première année avec révision des mathématiques élémentaires, théorie des dérivées, application à l'étude des fonctions et à leur représentation graphique ; une deuxième année consacrée au développement de l'algèbre, de la géométrie analytique et de la mécanique.

Chaque candidat aurait son dossier avec ses notes, ses places, les appréciations des professeurs. En outre, il faudrait que tous les mois environ les candidats fissent une composition sur des sujets *faciles* et *faisables* envoyés de l'École Polytechnique : ces compositions seraient corrigées à Paris et les notes serviraient au classement pour l'entrée à l'École. On pourrait alors admettre à l'École, sans autre examen, les trente ou quarante premiers résultant de ce classement, éliminer complètement ceux dont la moyenne serait trop basse et faire un examen oral pour les autres. Un système analogue serait employé pour l'École Normale. Les élèves refusés le seraient définitivement : ils auraient, comme actuellement, la ressource d'entrer à Centrale, à Saint-Cyr ou dans les Universités ; mais au lieu d'apporter dans ces écoles les habitudes d'esprit du « taupin » actuel, ils contribueraient à en élever le niveau scientifique.

La liberté d'enseignement n'est pas en question ici : si l'on admet que l'État a de grandes écoles, il faut admettre qu'il emploie tous les moyens possibles pour les bien recruter. Si l'on veut la liberté, que l'on permette aux Universités de l'État

et aux Universités libres de faire concurrence à l'École Polytechnique et de présenter aux Écoles des Ponts, des Mines, de Fontainebleau, des jeunes gens ayant fait une année ou deux de service militaire et justifiant des connaissances théoriques nécessaires. C'est ainsi que les élèves de l'École Normale supérieure retrouvent, à leur sortie, des concurrents venant des Universités.

Le système actuel est le pire de tous, puisque, avec une concurrence illimitée dans la préparation aux examens d'admission à l'École Polytechnique, il organise ensuite, pour ceux que cette préparation a fait réussir, un monopole à peu près absolu.

P. Appell (Paris).

LIÈS-BODART

Je veux essayer de décrire, d'une façon sommaire, l'œuvre d'un savant, mort depuis plusieurs années, qui a surtout été un grand pédagogue et dont le nom, malheureusement, est peu connu.

Né de parents pauvres, Liès-Bodart a su s'élever progressivement et se faire son éducation seul et sans maîtres, après avoir seulement suivi les cours d'une école primaire; il est devenu professeur de Faculté et inspecteur général de l'Université. Il avait fondé à Charleville, dans les Ardennes, une pension sans rivale dans le département ; et c'est de cette pension que je voudrais dire quelques mots.

Elle comptait environ deux cent cinquante élèves à l'époque où j'y commençais mes études ; quatre professeurs avec le directeur constituaient tout le personnel enseignant et surveillant ; seul Liès-Bodart avait ses grades universitaires, il était licencié ès sciences. Ses professeurs avaient tout intérêt à le satisfaire, car ils auraient difficilement trouvé à se caser ailleurs ; trois d'entre eux étaient ses anciens élèves. Ces professeurs avaient été admirablement préparés à accomplir leur tâche : ils répétaient

à leurs élèves les leçons de leur maître, et de là résultait une unité admirable de l'enseignement, qui émanait en réalité d'un seul chef, d'une autorité incontestée en théorie et en pratique.

A l'institution Liès-Bodart, ce que l'on appelle un cancre dans nos lycées, était une espèce absolument inconnue, grâce à la merveilleuse installation des classes. Et d'abord le patron (c'est ainsi que l'on appelait le directeur de l'établissement) ne souffrait à aucun prix qu'un élève fût dans une classe qu'il ne pouvait pas suivre, et il n'hésitait pas à renvoyer dans une classe inférieure ceux qui ne profitaient pas de l'enseignement donné dans la classe où ils se trouvaient.

En second lieu, un élève n'appartenait pas à une classe déterminée, en ce sens que dans chaque branche de l'enseignement il appartenait à une classe où il avait pour condisciples des camarades à peu près de sa force. Ainsi un élève fort en lettres et faible en sciences, par exemple, se trouvait dans une classe élevée de lettres et dans une classe inférieure de sciences; il n'avait donc aucune excuse quand il n'avait pas fait son devoir et les punitions qu'il pouvait mériter étaient toujours *justement* infligées. Il y a plus ; les punitions étaient données d'une façon intelligente ; elles consistaient surtout en exercices oraux roulant sur les parties de l'enseignement que l'élève était coupable d'avoir négligées. Enfin comme les professeurs remplissaient en même temps les fonctions de maîtres d'étude, les élèves embarrassés pouvaient à chaque instant les consulter à propos des difficultés qui venaient les arrêter ; jamais, comme cela arrive dans nos lycées, un élève n'était obligé de s'arracher les cheveux de désespoir devant une phrase dont il ne pouvait comprendre le sens malgré toute sa bonne volonté ; nous ne connaissions pas le dégoût dont sont abreuvés les malheureux collégiens que l'on gratifie si facilement du nom de cancres et dont le seul crime consiste souvent à n'avoir pas compris ce qui pour eux était réellement incompréhensible.

Au lycée on a la haine du cancre ; chez Liès-Bodart on en avait pitié, on lui venait en aide et, au lieu de l'enfoncer dans l'ornière, on l'en faisait sortir.

J'aurais encore beaucoup de choses à dire sur les rapports bienfaisants entre les élèves et les professeurs en dehors des heures

de travail ; mais j'ai hâte d'expliquer de quelle façon se faisait l'enseignement des Mathématiques.

Les cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Trigonométrie avaient été rédigés avec soin par le patron, cette rédaction concise contenait le strict nécessaire, c'était la partie qui devait être sue et sue à fond ; les élèves copiaient cette rédaction soit sur l'original, soit sur les cahiers de leurs anciens ; leur copie était revue et corrigée par les professeurs. Un seul et même cahier leur servait à étudier et à repasser pendant toute la durée de leurs études ; et les cours oraux reproduisaient exactement les démonstrations du cahier. Pour la Géométrie on suivait Legendre revu par Blanchet, ouvrage alors réputé, et à juste titre, comme excellent.

L'avantage, l'immense avantage de ce système, est de faire suivre à l'élève une méthode toujours la même, et de lui faire apprendre toujours les mêmes démonstrations qui se gravent alors imperturbablement dans l'esprit, ce qui est excellent pour les jeunes intelligences.

Pour des raisons qu'il serait trop long de donner ici, il ne m'a pas été permis d'achever mes études chez Liès-Bodart. C'est là un des plus grands malheurs qui m'ont frappé, chez lui j'aurais fait des études infiniment meilleures qu'au lycée ; je n'aurais pas oublié l'allemand que j'ai désappris au lycée et que je parlais aussi bien que le français quand j'y suis entré ; j'aurais achevé mes études mathématiques élémentaires dans de bonnes conditions et je n'aurais pas été un cancre. Enfin il m'est resté quelque chose de l'éducation reçue chez Liès : à savoir le goût des Sciences qu'il savait inspirer en rendant leur étude attrayante ; il avait trouvé en Mathématiques la *regia ad mathesin via* qu'Euclide n'avait pu indiquer au roi Ptolémée.

Un mot avant de terminer : N'est-il pas fâcheux que des essais pédagogiques aussi remarquables soient aujourd'hui rendus impossibles à la suite de ces lois qui ont tué l'enseignement libre au profit de l'état et des Congrégations religieuses ?

H. Laurent (Paris).

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES [1]

GÉNÉRALITÉS

Lorsque une science progresse d'une manière continue, on peut juger de son développement ultérieur par l'examen des problèmes qui l'occupent actuellement.

L'existence de problèmes précis a une importance capitale et pour le progrès des mathématiques et pour le travail de chaque chercheur.

A quels signes pourrons-nous reconnaître quels sont parmi ces problèmes les plus proches à faire avancer notre science ?

Un problème doit être bien défini ; son sens et sa portée faciles à saisir ; il doit être difficile, mais non pas inabordable.

Nous pouvons citer comme exemples, d'une part le problème de Fermat, par lequel Kummer a été amené à introduire les idéaux dans la théorie des nombres algébriques, et d'autre part le problème des trois corps.

D'où nous viennent les problèmes mathématiques ?

C'est l'expérience qui, dans chaque domaine, pose devant nous les problèmes primaires. Duplication du cube, quadrature du cercle, les premiers problèmes de l'analyse infinitésimale et de la théorie du potentiel.)

Dans le développement ultérieur de la science, c'est notre esprit qui, par des raisonnements logiques (combinaison, généralisation, spécialisation...) crée lui-même des problèmes nouveaux et féconds. (Problème des nombres premiers, problèmes provenant de la théorie de Galois, de la théorie des fonctions elliptiques et de celle des fonctions automorphes.)

---

(1) Résumé de la conférence tenue par M. HILBERT à la sixième section (*Enseignement et méthodes*) du Congrès international des mathématiciens, le 8 août 1900.

A quelles exigences la solution d'un problème mathématique doit-elle répondre ?

Nous disons qu'une question est résolue, lorsque, en nous appuyant sur un nombre fini d'hypothèses fournies par le problème lui-même, nous pouvons démontrer la justesse de la solution à l'aide d'un nombre fini de syllogismes.

La *rigueur mathématique* que nous exigeons ainsi n'entraîne pas nécessairement des démonstrations compliquées ; la méthode la plus rigoureuse est souvent la plus simple et la plus facile à comprendre. (Introduction des intégrales abéliennes dans la théorie des courbes algébriques, emploi des séries de puissances dans la théorie des fonctions.)

Les conceptions de l'Arithmétique ou celles de l'Analyse ne sont pas les seules qui soient susceptibles d'un traitement rigoureux. Celles de la Géométrie et des sciences physiques le sont également, pourvu qu'au moyen d'un système complet d'axiomes, elles soient aussi bien fixées que les conceptions de l'arithmétique.

Chaque système de conceptions nous conduit à créer un système de symboles destinés à servir d'instruments de démonstration.

Une démonstration faite au moyen des symboles géométriques sera donc parfaitement légitime, dès que l'on se rendra un compte exact des axiomes qui leur servent de base. (Minkowski, Geometrie der Zahlen.)

Lorsqu'un problème présente des difficultés sérieuses, *par quelles méthodes pouvons-nous l'attaquer ?*

D'abord par *généralisation*, en rattachant le problème considéré à un groupe de questions du même ordre. (Introduction des nombres idéaux dans la théorie des nombres algébriques, emploi des chemins complexes dans la théorie des intégrales définies.)

Ou bien par *spécialisation*, en approfondissant l'étude de problèmes analogues plus simples déjà résolus.

L'échec des tentatives faites pour résoudre un problème provient souvent de ce que la question est impossible à résoudre sous la forme donnée. Nous exigeons alors une *démonstration* rigoureuse *de l'impossibilité*. (Axiome des parallèles, quadrature du cercle, résolution algébrique des équations du 5^{e} degré.)

Mais nous avons la conviction qu'en mathématique, il sera tou-

jours possible ou bien de résoudre le problème, ou bien de démontrer qu'il ne comporte aucune solution.

Jamais mathématicien ne sera réduit à dire : *Ignorabimus.*

ÉNONCÉ DE QUELQUES PROBLÈMES

Nous voulons illustrer ce que nous venons de dire par quelques problèmes empruntés aux divers domaines des mathématiques, et qui nous semblent particulièrement propres à contribuer à l'avancement de notre science.

I. Problèmes relatifs aux notions fondamentales

1. *Problème de Cantor sur la puissance du continu.*

Chaque ensemble de nombre est équivalent ou bien à l'ensemble des nombres entiers rationnels, ou bien au continu.

Le premier pas à faire pour trouver la démonstration de ce théorème serait peut-être de résoudre le problème suivant :

Mettre le continu sous la forme d'un ensemble bien ordonné (*wohlgeordnete Menge*).

2. *Axiomes de l'Arithmétique.*

Trouver un système d'axiomes régissant et définissant les conceptions arithmétiques ;

Examiner si ces axiomes sont indépendants les uns des autres, et, *dans le cas contraire, mettre en évidence les parties communes,* de façon à obtenir un système d'axiomes complètement indépendants ;

Enfin *prouver que ces axiomes sont compatibles,* c'est-à-dire qu'une suite finie de déductions logiques partant de ces axiomes, ne peut jamais conduire à une contradiction.

Nous disons qu'une conception existe au point de vue mathématique, lorsque les axiomes qui la définissent sont compatibles. D'après cette définition, la solution du problème précédent ne serait autre chose que la démonstration de l'existence mathématique du continu. De là, nous serions peut-être conduits à établir de la même manière l'existence des ensembles de puissance transfinie supérieure.

3. *Axiomes de la Physique.*

Établir les systèmes d'axiomes du Calcul des probabilités, de la Mécanique rationnelle et des différentes branches de la Physique, puis fonder sur ces axiomes l'étude rigoureuse de ces sciences.

II. Problèmes empruntés a l'arithmétique et a l'algèbre

4. *Problème de Riemann sur les nombres premiers.*

Démontrer dans toute leur étendue les propositions formulées par Riemann sur la fonction $\zeta(s)$, en particulier la suivante :

La différence entre le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité x *et le logarithme intégral de cette quantité devient infinie avec* x *d'un ordre égal ou inférieur à* $\sqrt{x}$.

Etendre les propositions de Riemann à la fonction analogue $\zeta_k(s)$ *correspondant à un corps algébrique* k :

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{(n\,j)^s}$$

$(n\,j)$ désigne la norme de l'idéal j : la somme s'étend à tous les idéaux j du corps).

5. *Certains nombres sont-ils transcendants ou du moins irrationnels?*

Démontrer que la fonction $e^{\pi z}$ *a une valeur transcendante, lorsque la variable* z *est algébrique irrationnelle.*

Examiner si les puissances a^b *ont toujours des valeurs transcendantes ou du moins irrationnelles, lorsque la base est un nombre algébrique et l'exposant un nombre algébrique irrationnel.* (Exemples : $2^{\sqrt{2}}$, $e^{\pi} = i^{-2i}$).

6. *Les solutions de l'équation du 7e degré ne peuvent pas s'obtenir par la Nomographie.*

La Nomographie permet de résoudre une équation lorsque les racines peuvent être obtenues par *une suite finie d'opérations ne portant que sur deux paramètres.* Il s'agit de *démontrer que l'équation générale du 7e degré ne rentre pas dans cette catégorie.*

7. *Géométrie de situation des courbes et des surfaces algébriques.*

Harnack a déterminé le nombre maximum de traits de courbe fermés et séparés les uns des autres dont peut se composer une courbe algébrique d'ordre m. On demande *d'étudier la situation réciproque de ces traits ; d'établir un théorème analogue à celui de Harnack pour les surfaces algébriques et d'examiner ensuite la situation réciproque des diverses nappes.*

III. Problèmes empruntés a la théorie des fonctions

La notion de fonction est tellement générale, que, dans une étude approfondie, il faut se borner à n'en considérer que certaines classes particulièrement importantes.

Si l'on choisissait la classe des fonctions définies par des équations différentielles algébriques, un certain nombre de fonctions intéressantes échapperaient à nos recherches (ainsi la fonction $\zeta(s)$ de Riemann).

Si, d'autre part, nous considérions toutes les fonctions continues ayant des dérivées de tous les ordres, nous ne pourrions pas employer la méthode si souple des séries de puissances.

Il paraît donc légitime de vouer une attention toute spéciale aux fonctions analytiques ; les fonctions importantes étudiées jusqu'à présent rentrent du reste toutes dans cette catégorie.

8. *Caractère analytique de certaines fonctions rencontrées dans le calcul des variations.*

Un problème du calcul des variations

$$\int\int F(z, p, q; x, y)\, dx\, dy = \min. \qquad \left[\frac{\partial z}{\partial x} = p, \frac{\partial z}{\partial y} = q \right]$$

sera dit *régulier*, lorsque la fonction F est analytique et lorsqu'elle satisfait à l'inégalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} \right)^2 > 0.$$

Démontrer que la solution z *d'un problème régulier est nécessairement une fonction analytique des variables* x *et* y.

Voici encore un problème analogue plus spécial :

Examiner si les surfaces à courbure de Gauss constante et positive ne seraient pas toutes des surfaces analytiques.

9. *Existence d'équations différentielles linéaires ayant un groupe donné.*

Prenons dans le plan de la variable un nombre fini de points et fixons pour chacun d'eux un système de substitutions linéaires. *Démontrer qu'il existe une équation différentielle linéaire de la classe régulière admettant ces points comme points singuliers et ayant comme groupe le groupe de substitutions défini par les systèmes donnés.*

10. *Deux variables liées par une relation analytique quelconque peuvent être exprimées en fonction uniforme d'un paramètre* z.

Le beau théorème de M. Poincaré sur ce sujet, publié dans le Bulletin de la Société mathématique de France (t. XI, 1883), est encore astreint à quelques restrictions. Il serait important *d'établir le théorème dans toute sa généralité et surtout d'examiner si les variables sont toujours des fonctions automorphes du paramètre* z.

Il s'agirait en outre *d'étendre ce théorème au cas de plusieurs variables indépendantes.*

Pour un plus grand choix de problèmes, nous renvoyons le lecteur à l'article que nous allons publier dans le Bulletin de la Société des Sciences de Goettingue. (Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900.)

CONCLUSION

Les problèmes précédents nous montrent la variété croissante des mathématiques. N'est-il donc pas à redouter que notre science ne se scinde en plusieurs branches n'ayant plus guère de rapports entre elles?

Nous ne le croyons ni ne voulons l'espérer.

Nous voyons du reste que la mathématique, en se développant, bien loin de perdre son caractère de science unique, le manifeste de jour en jour plus clairement.

De plus, chaque progrès réel entraîne nécessairement la découverte de méthodes plus incisives et plus simples, permettant à chaque géomètre un accès relativement facile à toutes les parties de notre science.

D. Hilbert (Göttingue).

SUR LA TRANSCENDANCE DES NOMBRES *e* ET π (1)

1. Depuis 1873, époque où M. Hermite, dans son *Mémoire sur la fonction exponentielle*, a démontré la transcendance du nombre *e*, de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer en première ligne M. Hurwitz (*Math. Annalen*, 1893), ont cherché à donner à sa démonstration une forme plus élémentaire. D'autre part, le travail analogue de M. Lindemann, au sujet du nombre π, (*Math. Annalen*, 1882), a provoqué, depuis son apparition, de nombreuses recherches entreprises dans le même sens. Parmi les géomètres qui se sont signalés dans cet ordre d'idées, il en est, comme M. Hilbert, à qui l'on doit d'importantes simplifications; mais M. Gordan a eu le mérite de ramener à des considérations d'ordre purement élémentaire la démonstration d'un théorème de M. Lindemann, entraînant, comme conséquences, la transcendance du nombre *e*, et la transcendance du nombre π. Les travaux de M. Gordan ont été magistralement exposés par M. Klein, dans son opuscule intitulé : *Sur certaines questions de Géométrie*

(1) Ainsi qu'on peut le voir dès les premières lignes de l'article de M. Jamet, son étude a un caractère nettement pédagogique, et elle nous semble constituer à ce point de vue un progrès fort important. Il s'agit de l'un des problèmes les plus fameux dans l'histoire des sciences mathématiques, celui de la quadrature du cercle; et, en somme, l'impossibilité n'en a été rigoureusement démontrée qu'à partir des travaux de MM. Hermite et Lindemann. Apporter à cette démonstration des perfectionnements qui aient pour résultat de lui donner un caractère de plus en plus élémentaire est à notre avis tout à fait intéressant au point de vue qui nous préoccupe surtout ici. Aussi remercions-nous bien sincèrement M. V. Jamet de son importante contribution à la transcendance des nombres *e* et π.

(NOTE DE LA RÉDACTION).

élémentaire, dont on doit une rédaction française, à M. Griess (Paris, Nony, 1896).

Le théorème de M. Lindemann, auquel nous faisons allusion, est celui-ci : « *L'égalité*

$$A_0+A_1(e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n})+A_2(e^{b_1}+e^{b_2}+\ldots+e^{b_q})+\ldots \\ +A_m(e^{l_1}+\ldots+e^{l_r})=0$$

où A_0, A_1, A_2 ... A_m *sont des entiers, et où les exposants écrits dans une même parenthèse sont les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, est impossible.* »

Nous voulons apporter, s'il est possible, une légère simplification à la méthode de M. Gordan. Cet auteur s'est servi, avec une habileté rare, du symbole

$$h^r = 1.2.3\ldots r,$$

mais nous pensons qu'on peut substituer à cet heureux artifice de calcul l'emploi de la formule des accroissements finis, adaptée aux fonctions d'une variable imaginaire, et procéder ensuite comme l'a fait M. Hurwitz pour démontrer la transcendance du nombre e.

2. Nous prenons pour point de départ l'identité

$$D.e^{-x}[F(x)+F'(x)+\ldots+F^m(x)]=-e^{-x}F(x)$$

où $F(x)$ désigne un polynôme entier, de degré m.

Nous rappelons d'ailleurs que si l'on désigne par $\Phi(z)$ une fonction d'une variable, finie, continue, et pourvue d'une dérivée, au moins quand le point z décrit le chemin rectiligne qui va du point z_0 au point Z, il est possible de trouver un nombre λ, compris entre zéro et 1, un argument réel ω, et une quantité algébrique réelle ou imaginaire ξ, représentée par un point situé sur le chemin considéré, de telle sorte que l'on ait :

$$\Phi(Z)-\Phi(z_0)=\lambda e^{\omega i}\Phi'(\xi).(Z-z_0).$$

---

(1) Voir par exemple, MANSION, *Principes d'une théorie nouvelle des fonctions d'une variable imaginaire* (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 9e année, 1885-1886, 2e partie); la démonstration de cette formule, que M. Darboux avait d'ailleurs établie antérieurement à M. Mansion, fait l'objet du paragraphe IX.

Cette formule est applicable, notamment, si l'on suppose

$$\Phi(z) = e^{-z}[F(z) + F'(z) + \ldots + F^m(z)]$$

avec $z_0 = 0$ et $Z = a_1$ ($F(x)$ désigne un polynôme entier, de degré m). Nous en concluons que, quel que soit a_1,

$$e^{-a_1}[F(a_1) + F'(a_1) + \ldots + F^m(a_1)] - [F(0) + \ldots + F^m(0)] = -\lambda e^{\omega_1 i} F(\xi_1), e^{-\xi_1}\xi_1$$

λ_1, ω_1, ξ_1, remplissant les conditions énoncées au sujet de λ, ω, ξ. La formule précédente équivaut à celle-ci

$$e^{a_1}[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)] = F(a_1) + \ldots + F^m(a_1) + \lambda_1 e^{a_1 + \omega_1 i - \xi_1} F(\xi_1)\,\xi_1.$$

Supposons que a_1 soit racine d'une équation algébrique à coefficients entiers $f_a(x) = 0$, et soient $a_2, a_3, \ldots a_n$ ses autres racines. Nous établirons une égalité analogue par rapport à chacune de ces racines, puis en ajoutant membre à membre les n égalités obtenues de la sorte, nous trouverons

$$[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)](e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}) = \sum_{i=1}^{i=n} F(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} F'(a_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{i=n} F^m(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e^{a_i - \xi_i + \omega_i \sqrt{-1}} F(\xi_i)\,\xi_i).$$

Au second membre de cette égalité, la somme de tous les termes, sauf le dernier, est une fonction symétrique entière des racines de l'équation $f_a(x) = 0$. Si, de plus, le polynome F est à coefficients entiers, cette fonction est égale au quotient d'un nombre entier par la puissance, d'exposant m, du coefficient de x^n dans le développement du polynôme $f_a(x)$; soit a ce coefficient ; nous transformons l'égalité précédente comme il suit :

$$[F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)]\,a^m[e^{a_1} + e^{a_2} + \ldots + e^{a_n}] = B + a^m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{a_i - \xi_i + \omega_i \sqrt{-1}} F(\xi_i)$$

B désignant un nombre entier.

3. Composons maintenant le polynôme $F(x)$ de la manière suivante. Soient, outre l'équation $f_a(x) = 0$, d'autres équations algé-

briques à coefficients entiers, $f_b(x) = 0$, $f_c(x) = 0 \ldots f_l(x) = 0$, dont la première a pour racines $b_1, b_2, \ldots b_q$, la deuxième $c_1, c_2 \ldots$ la dernière $l_1, l_2, \ldots l_r$. Nous poserons

$$F(x) = x^{p-1}[f_a(x).f_b(x)\ldots f_l(x)]^p$$

p désignant un entier quelconque. Je dis que la somme

$$F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0)$$

sera un entier, divisible par $1.2.3\ldots\overline{p-1}$, et que B sera divisible par $1.2.3\ldots p$.

En effet, si l'on développe le polynôme $F(x)$ et qu'on l'ordonne par rapport aux puissances croissantes de x, on trouvera un développement de la forme

$$F(x) = \alpha x^{p-1} + \alpha_1 x^p + \alpha_2 x^{p+1} + \ldots + \alpha_m x^m$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ désignant des entiers. On en déduira

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 0, \ldots \qquad F^{p-2}(0) = 0\ldots$$

puis

$$F^{p-1}(0) = 1.2.3\ldots\overline{p-1}\,\alpha, \qquad F^p(0) = 1.2.3\ldots p.\alpha_1,$$

et ainsi de suite.

Il faut observer que α est la puissance p^{me} d'un entier qui ne dépend nullement de p, savoir, le produit des termes constants pris dans les polynômes

$$f_a, \qquad f_b\ldots \qquad f_l.$$

Nous appellerons ce produit M, et nous trouverons :

$$F(0) + F'(0) + \ldots + F^m(0) = 1.2.3\ldots\overline{p-1}\,(M^p + \mathfrak{M}p).$$

ce qui démontre la première de nos deux propositions.

De plus, on voit qu'il est possible de choisir p de telle sorte que ce nombre ne divise ni M^p, ni même le produit de M^p par une puissance quelconque d'un entier donné A : il suffit que parmi les facteurs premiers de p, il y en ait au moins un qui n'entre pas dans la décomposition du produit MA en facteurs premiers.

4. En second lieu, faisons, dans le polynôme $F(x)$, la trans-

formation $x = a_i + x'$, et ordonnons le polynôme obtenu par rapport aux puissances croissantes de x'.

Nous trouvons un développement de la forme

$$F(x) = x'^p G_0(a_i) + x'^{p+1} G_1(a_i) + \ldots + x'^m G_m(a_i).$$

G_0, G_1,... G_m désignant des polynômes entiers, à coefficients entiers, dont le degré ne dépasse pas m. Mais, pour $x = a_i$, le polynôme $F(x)$ et ses dérivées successives prennent les mêmes valeurs que pour $x' = 0$, et l'on en déduit :

$$F(a_i) = 0 \qquad F'(a_i) = 0 \ldots \qquad F^{p-1}(a_i) = 0$$
$$F^p(a_i) = 1.2.3 \ldots p\, G_0(a_i), \qquad F^{p+1}(a_i) = 1.2 \ldots \overline{p+1}\, G_1(a_i),$$

et ainsi de suite. Par conséquent :

$$\sum_{i=1}^{i=n} F(a_i) + \sum_{i=1}^{i=n} F'(a_i) + \ldots + \sum_{i=1}^{i=n} F^m(a_i) = 1.2.3 \ldots p \left[\sum_{i=1}^{i=n} G_0(a_i) + (p+1) \sum_{i=1}^{i=n} G_1(a_i) + \ldots \right].$$

Or le facteur écrit entre crochets, au second membre de cette égalité, est égal à une fonction symétrique entière, à coefficients entiers, de $a_1, a_2, \ldots a_m$, et le degré de cette fonction est au plus m. Donc le second membre de cette égalité a une expression de la forme :

$$\frac{1.2.3 \ldots p.C}{a^m}.$$

où C désigne un entier; et le numérateur de cette fraction est précisément le nombre que nous avons désigné par B.

La deuxième proposition énoncée au début du paragraphe 3 est donc démontrée.

5. En résumé, le polynôme $F(x)$ étant choisi comme il a été dit au paragraphe 3, on peut trouver deux entiers M et C, tels qu'on ait

$$1.2.3 \ldots \overline{p-1}\, (M^p + \mathfrak{M}p)\, a^m \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} = p!C + a^m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1}} + a_i - \xi_i F(\xi_i)$$

les λ étant des nombres compris entre zéro et 1, les ω étant réels, et les ξ remplissant la condition

$$|\xi_i| < |a_i|.$$

De cette formule on déduit la suivante

$$(1)\quad (M^p + \mathfrak{M}p)\, a^m \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} = p.C + \frac{a^m}{1.2.3\ldots p-1} \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1} + a_i - \xi_i} F(\xi_i)$$

6. Cela posé, considérons l'expression

$$(2)\qquad A_0 + A_a \sum_{i=1}^{i=n} e^{a_i} + A_b \sum_{i=1}^{i=q} e^{b_i} + \ldots + A_l \sum_{i=1}^{i=r} e^{l_i}$$

où les lettres A_0, A_a, ... A_l désignent des entiers, et où les racines des équations $f_a = 0$, $f_b = 0$ ... $f_l = 0$, dont les premiers membres sont des polynômes entiers, à coefficients entiers, ont été désignées, respectivement par $a_1, a_2 \ldots a_n$, $b_1, b_2 \ldots b_q$, ... $l_1, l_2 \ldots l_r$. Je dis, avec MM. Lindemann et Gordan, que cette expression n'est pas nulle. En effet, soient, dans les polynômes f_a, f_b, ... f_e, $a, b, c, \ldots l$, les coefficients des plus hautes puissances de x. A l'égard des équations $f_b = 0$, $f_c = 0 \ldots f_e = 0$, établissons les égalités analogues à (1) et additionnons-les membre à membre, après avoir multiplié les deux membres de la première par $A_a b^m c^m \ldots l^m$, de la deuxième par $A_b a^m c^m \ldots l^m$, et ainsi de suite. Nous trouverons une égalité de la forme :

$$\begin{aligned}(M^p + \mathfrak{M}p)\, a^m b^m \ldots l^m \left(A_a \Sigma e^{\alpha_i} + A_b \Sigma e^{b_i} + \ldots + A_l \Sigma e^{l_i}\right) \\ = \mathfrak{M}p + \frac{(abc\ldots l)^m}{1.2.3\ldots p} \left[A_a \Sigma \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1} + a_i - \xi_i} F(\xi_i) + \ldots \right. \\ \left. + A_l \Sigma \varphi_i \sigma_i e^{\theta_i \sqrt{-1} + l_i - \sigma_i} F(\sigma_i)\right]\end{aligned}$$

les nombres φ, θ, σ, jouant le même rôle que les nombres λ, ω, ξ. Si donc l'expression (2) était nulle, le second membre de cette dernière égalité devrait être égal et de signe contraire à

$$(3)\qquad A_0 (abc\ldots l)^m (M^p + \mathfrak{M}p),$$

et je dis qu'on peut disposer de p de telle sorte qu'il en soit autre-

ment. En effet, si nous supposons (hypothèse toujours possible) que, parmi les facteurs premiers de p, il y en ait au moins un qui n'entre pas dans la décomposition du nombre

$$A_0 M a.b.c...l$$

en facteurs premiers, le nombre (3) ne sera pas divisible par p, et par conséquent ne sera pas nul; et cependant il devrait être égal à une somme de deux parties, dont l'une est entière et divisible par p, tandis que, conformément à la démonstration suivante, la deuxième partie pourrait être supposée numériquement inférieure à 1.

7. Pour établir ce dernier point, observons que, quand le point z décrit le rayon vecteur d'un quelconque des points $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_q \ldots l_1, l_2, \ldots l_r$ le produit

$$f_a(z) f_b(z) \ldots f_l(z)$$

conserve un module plus petit qu'un nombre constant ρ, et que le module de z reste au-dessous d'un nombre constant ϱ, qu'on peut supposer inférieur à 1. La fonction e^z conserve elle-même un module plus petit qu'un nombre constant ν, et ce nombre est une limite supérieure des modules des facteurs tels que $e^{\alpha_1 - \xi_1}$, $e^{\alpha_2 - \xi_2} \ldots e^{\beta_r - \tau_r}$. Enfin les facteurs tels que $\lambda_j e^{\omega_j \sqrt{-1}}, \ldots \varrho_i e^{\omega_i \sqrt{-1}}$, ont des modules inférieurs à l'unité : le degré m du polynôme $F(x)$ est égal à

$$(n+q+\ldots+r)p-1$$

et le terme :

$$\frac{abc\ldots l^m}{1.2.3\ldots p}\left[A_0 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \xi_i e^{\omega_i \sqrt{-1}} e^{\alpha_i - \xi_i} F(\xi_i, \xi_i) + \ldots \right.$$

$$\left. + A_l \sum_{i=1}^{i=r} \varrho_i e^{\omega_i \sqrt{-1}} e^{\beta_i - \tau_i} F(\tau_i, \tau_i) \right]$$

a un module plus petit que

$$\frac{\left[\varrho\rho^{n+q+\ldots+r-1}\right]^{p-1}}{1.2.3\ldots p-1} \left[|A_a| + |A_b| + \ldots + |A_l|\right] \frac{\rho}{abc\ldots l}.$$

Or il est possible de choisir p de telle sorte que cette limite

supérieure soit plus petite que 1. Le théorème est donc démontré.

8. Si maintenant on veut déduire de là le théorème de M. Hermite, c'est-à-dire démontrer que l'égalité

$$A_0 + A_1 e + A_2 e^2 + \ldots + A_m e^m = 0$$

est impossible, si $A_0, A_1, \ldots A_m$ sont des entiers, il suffit d'appliquer la méthode précédente au cas où les polynômes $f_a, f_b, \ldots f_l$ sont définis comme il suit

$$f_a = x - 1, \qquad f_b = x - 2, \ldots \qquad f_l = x - m, \ldots$$

ce qui revient, au fond, à répéter la démonstration de M. Hurwitz.

9. Si l'on veut en déduire la transcendance du nombre π, on observe, avec M. Hilbert, que s'il existait une équation algébrique à coefficients entiers, admettant parmi ses racines le nombre πi, et si l'on désignait ces racines par $a_1, a_2 \ldots a_k$, le produit

$$(1 + e^{a_1})(1 + e^{a_2})(1 + e^{a_k})$$

aurait un facteur égal à $1 + e^{\pi i}$, c'est-à-dire à zéro. Donc ce produit serait nul. Mais si on l'effectue, on trouve une expression de la forme

$$1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_k}$$

où $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ désignent les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers. Parmi ces racines, quelques-unes peuvent être nulles ; s'il en est ainsi, la somme des exponentielles qui leur correspondent est un nombre entier ; celles d'entre elles qui ne sont pas nulles, savoir, $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_h$ sont les racines d'une équation algébrique à coefficients entiers, et l'on est conduit à démontrer l'impossibilité d'une identité de la forme

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \ldots + e^{\beta_h} = 0$$

où a désigne un nombre entier. On retombe encore sur un cas particulier du théorème de M. Lindemann.

V. Jamet (Marseille).

THÉORIE DE L'ÉQUATION QUADRATIQUE

La théorie courante de l'équation quadratique peut être établie comme il suit :

Une équation quadratique à coefficients réels a, soit deux racines réelles, soit deux racines imaginaires, le cas de séparation ayant lieu lorsque les racines sont égales. Si l'équation est représentée par :

$$x^2 + 2a\,x + b = 0$$

les deux racines sont :

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}$$

et

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 - b}$$

Si a^2 est plus grand que b, le radical se prête à une simple addition algébrique avec $-a$, et les deux racines sont réelles. Les deux termes peuvent être représentés par des segments d'une seule et même ligne droite et leur somme est aussi un simple segment. Mais quand a^2 est plus petit que b, c'est $\sqrt{b-a^2}$ qui est réel et les deux racines sont représentées par :

$$x_1 = -a + \sqrt{-1}\,\sqrt{b-a^2} \qquad x_2 = -a - \sqrt{-1}\,\sqrt{b-a^2},$$

On sait que, comme le terme radical est affecté du symbole $\sqrt{-1}$, il ne peut être combiné avec $-a$ par simple addition. On sait que les deux termes ne peuvent être représentés par des segments d'une seule et même ligne droite, mais que le terme radical doit être représenté suivant une ligne formant un angle droit avec celle sur laquelle $-a$ est représenté. Pour cette raison, la racine est dite complexe et on sait que le plan est nécessaire pour sa représentation adéquate. Comme conséquence, on sait que $\sqrt{-1}$ indique que l'axe pour le terme imaginaire est à

angle droit sur l'axe pour le terme réel, autrement dit, cela démontre que l'axe réel tourne d'un angle droit.

Le point de vue auquel je me place est le suivant :

Dans tous les cas, la signification de $\sqrt{-1}$ est scalaire ; ce symbole ne signifie rien de plus que l'indication qu'il doit donner, c'est-à-dire que le carré du terme affecté est négatif. Il ne s'en suit pas que deux segments d'une ligne dont l'un est affecté de $\sqrt{-1}$ et l'autre ne l'est pas, ne se composent pas en quelque chose de réel ; je montrerai que leur simple addition correspond à une réalité géométrique. De cette manière de voir, on déduit que les racines ont toujours une signification scalaire.

Mais dans les deux cas, les racines se prêtent aussi à ce que nous pouvons appeler une signification planaire. Soit que $\jmath$ représente un axe de longueur égale à l'unité, et soit $\jmath^2$ égal à $+1$; alors dans le dernier cas, lorsque a^2 est plus petit que b,

$$x_1 = -a + \sqrt{b - a^2}\,\sqrt{-1}\,\jmath$$

représente une quantité complexe circulaire, tandis que dans le premier cas

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - b}\,\jmath$$

représente une quantité complexe hyperbolique.

La preuve que cette quantité hyperbolique satisfait à l'équation est la suivante :

$$\begin{array}{rrrr} x_1^2 = & a^2 & + a^2 - b - 2a\sqrt{a^2 - b}\,\jmath & \\ + 2ax_1 = & & - 2a^2 \quad + 2a\sqrt{a^2 - b}\,\jmath & \\ + \quad b \quad = & & b & \\ \hline x_1^2 + 2ax_1 + b = & 0 & + 0. & \end{array}$$

Le tout est égal à 0, parce qu'il se décompose en une partie scalaire et une partie vectorielle qui sont séparément égales à 0.

La même preuve s'applique à la quantité complexe circulaire.

Conformément à cette théorie, le symbole $\sqrt{-1}$ est caractéristique de la quantité complexe circulaire, tandis qu'il est absent dans la quantité complexe hyperbolique ; et ceci s'accorde avec ce fait algébrique, que

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

tandis que

$$x^2 + y^2 = (x + \sqrt{-1}\, y)(x - \sqrt{-1}\, y).$$

La signification de la quantité complexe scalaire résultera de la considération de la Trigonométrie d'un angle complexe

Soit (fig. 1) que AOP représente un angle circulaire, et POQ un angle hyperbolique ; OA et OB sont les demi-axes du cercle, OP et OD ceux de l'hyperbole équilatère. Menons PM et QK parallèles à la tangente en A, et par suite perpendiculaires à OA ; puis QN parallèle à la tangente commune en P, et par suite perpendiculaire à OP. De N, menons NL et NR parallèles à PM et OA, respectivement. Représentons par u et v, respectivement, les angles circulaire et hyberbolique ; alors, comme M. Laisant l'a montré dans son *Essai sur les fonctions hyperboliques*, les définitions premières des fonctions trigonométriques de ces angles sont

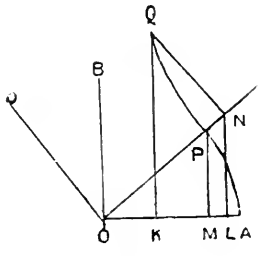


Fig. 1.

$$\cos u = \frac{OM}{OA}, \quad \sin u = \frac{MP}{OB}, \quad \cosh v = \frac{ON}{OP}, \quad \sinh v = \frac{NQ}{OD}.$$

D'après ces définitions, les fonctions sont entièrement scalaires, parce que la direction des deux termes dans chaque rapport est la même. Si nous réduisions les relations ci-dessus à

$$\cos u = \frac{OM}{OA}, \quad \sin u = \frac{MP}{OA}, \quad \cosh v = \frac{ON}{OP}, \quad \sinh v = \frac{NQ}{OP},$$

alors, dans le cas de $\sin u$, ce sont seulement les longueurs de MP et de OA que l'on considère, sans avoir égard à leur différence de direction ; et de même pour $\sin hv$.

On a coutume de définir les fonctions de l'angle complexe analytiquement ; mais elles ont une définition géométrique. Les définitions de l'angle complexe ci-dessus sont

$$\cos(u + \sqrt{-1}\, v) = \frac{OK}{OA},$$

et

$$\sin(u + \sqrt{-1}\, v) = \frac{KQ}{OB},$$

expression qui peut s'écrire dans le cas ci-dessus $\frac{KQ}{OA}$.

Considérons maintenant l'addition de ces angles d'un point de vue géométrique. Nous avons

$$OK = OL - LK = \frac{ON}{OP} OM - NQ \frac{MP}{OP};$$

donc

$$\frac{OK}{OA} = \frac{OM}{OA}\frac{ON}{OP} - \frac{MP}{OA}\frac{NQ}{OP}$$
$$= \cos u \cosh v - \sin u \sinh v.$$

De plus

$$KQ = LN + RQ = \frac{ON}{OP} MP + NQ \frac{OM}{OP};$$

donc

$$\frac{KQ}{OA} = \frac{MP}{OA}\frac{ON}{OP} + \frac{OM}{OA}\frac{NQ}{OP}$$
$$= \sin u \cosh v + \cos u \sinh v.$$

Considérons maintenant le signe d'un point de vue géométrique. L'angle complexe ci-dessus est exprimé par $u + \sqrt{-1}\, v$, et

$$\cos(u + \sqrt{-1}\, v) = \cos u \cosh v - \sqrt{-1} \sin u \sinh v,$$
$$\sin(u + \sqrt{-1}\, v) = \sin u \cosh v + \sqrt{-1} \cos u \sinh v.$$

Ainsi l'Analyse conduit au symbole $\sqrt{-1}$ comme affectant le second terme, tandis que la Géométrie donne les mêmes formules sans $\sqrt{-1}$. Nous en concluons que les parties sont ajoutées linéairement comme résultat final, mais que le symbole $\sqrt{-1}$ doit être conservé dans une période intermédiaire du calcul. De toutes façons, dans cette quantité scalaire complexe, le symbole $\sqrt{-1}$ n'a aucune signification *directionnelle*, il signifie simplement que le carré de la quantité à laquelle il est attaché doit être prise avec le signe négatif. Les deux termes de la quantité sont représentés par des segments d'une seule et même droite. La justification complète de cette théorie se trouve dans les développements auxquels elle conduit ; mais je puis indiquer ici le chemin par lequel j'y arrive.

L'application, à la décharge d'un condensateur électrique, du

principe de la conservation de l'énergie, conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

où q représente la charge au temps t, R la résistance, L la puissance d'induction du circuit et C la capacité du condensateur.

Si $q = Ae^{mt}$ est supposé être la solution de l'équation, alors m doit être tel que

$$Ae^{mt}\left(m^2 + \frac{R}{L}m + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

relation qui se réduit à $m^2 + 2am + b = 0$, si par abréviation a est écrit à la place de la quantité positive $\frac{R}{2L}$, et b à la place de la quantité positive $\frac{1}{LC}$.

La théorie courante de l'équation quadratique conduit aux solutions suivantes de l'équation différentielle.

Dans le cas des racines réelles,

$$q = c_1 e^{-a-\sqrt{a^2-b}\,t} + c_2 e^{-a+\sqrt{a^2-b}\,t};$$

Dans le cas des racines imaginaires,

$$q = c_1 e^{-(a-\sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,t} + c_2 e^{-a+\sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,t}$$

et dans le cas de transition,

$$q = e^{-at}(c_1 + c_2 t).$$

Dans le cas imaginaire, la solution apparemment impossible se réduit, après beaucoup de travail, à la forme :

$$q = Ae^{-at}\sin(\sqrt{b-a^2}\,t + \gamma).$$

La réduction peut être effectuée d'une façon très claire et très directe en traitant les racines imaginaires comme des quantités complexes planaires de la forme

$$-a + \sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,\zeta \quad \text{et} \quad -a - \sqrt{-1}\sqrt{b-a^2}\,\zeta;$$

et une réduction analogue est possible dans le cas des racines

réelles, en les traitant comme des quantités complexes hyperboliques de la forme :

$$-a+\sqrt{a^2-b}\,\beta \text{ et } -a-\sqrt{a^2-b}\,\beta.$$

Supposons que la quantité réelle a^2-b soit désignée par n. Dans le cas imaginaire,

$$m_1=-a+\sqrt{-1}\,n\beta \quad m_2=-a-\sqrt{-1}\,n\beta$$

de là

$$q_1=e^{-at+c+\sqrt{-1}(nt+\varphi)\beta}$$

et

$$q_2=e^{-at+c-\sqrt{-1}(nt+\varphi)\beta}.$$

où un terme arbitraire a été ajouté aux parties scalaires et vectorielle de m.

Maintenant q_1 et q_2 dénotent des spirales convergentes équiangulaires différant seulement en ce que l'une est la réflexion de l'autre par rapport à la ligne initiale. De là, si nous ajoutons les deux, nous avons deux fois la projection horizontale, et si nous retranchons, nous avons deux fois la projection verticale. Suivant les conditions initiales du problème, nous aurons à ajouter ou à retrancher ; dans le cas du problème ci-dessus, nous devons retrancher.

De là

$$q=2e^c\,e^{-at}\sin(nt+\varphi).$$

Dans le cas réel nous avons :

$$m_1=-a+n\beta \quad m_2=-a-n\beta$$
$$q_1=e^{-at+c+(nt+\varphi)\beta}$$
$$q_2=e^{-at+c-(nt+\varphi)\beta}$$

et

$$q=2e^{c-at}\sinh(nt+\varphi).$$

La première équation représente la décharge d'un condensateur quand il oscille : la dernière, quand il n'oscille pas. L'analyse ici donnée correspond à la méthode graphique dont se servent actuellement les électriciens dans l'étude des courants alternatifs.

Nous nous trouvons ainsi conduit à la conception d'une spirale hyperbolique équiangulaire convergente, laquelle est précisément l'analogue de la spirale circulaire équiangulaire convergente.

Je crois que cette courbe est nouvelle, car je ne la trouve pas dans la très complète *Bibliographie des courbes géométriques*, de M. Brocard.

Les spirales correspondantes sont représentées par les figures 2 et 3.

La fonction $Ae^{-at}\sin(nt+\varphi)$ représente la projection verticale

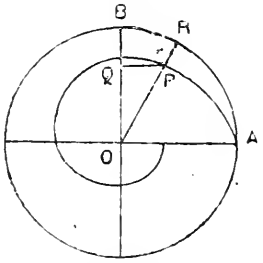


Fig. 2.

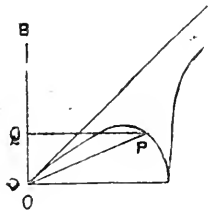


Fig. 3.

d'un mouvement uniforme circulaire d'amplitude A, de vitesse angulaire n et d'époque φ. De même la fonction

$$Ae^{-at}\sin(nt+\varphi)$$

représente la projection verticale du mouvement spiral circulaire du point P ayant pour vitesse angulaire n, pour époque φ et pour amplitude décroissante logarithmique Ae^{-at}.

De la même manière, la fonction

$$Ae^{-at}\sin h(nt+\varphi)$$

représente la projection verticale du mouvement spiral hyperbolique du point P, ayant pour vitesse angulaire hyperbolique n, pour époque l'angle hyperbolique φ et pour amplitude Ae^{-at}.

Cette spirale est convergente, car n est pas nécessairement moindre que a.

Le point R décrit le mouvement uniforme primaire; le point P décrit le mouvement spiral et le point Q décrit le mouvement harmonique correspondant.

AL. MACFARLANE (South-Bethleem. Penn. U. S. A.)

SUR LA NOTION DE L'INFINI

EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

M. Appell a publié, dans le numéro de mai de l'*Enseignement mathématique*, un court article par lequel il rejette fort loin une idée que j'avais émise, dans le numéro précédent, sur l'utilité et la possibilité de l'introduction de la notion de l'infini dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire. N'ayant aucun goût pour la polémique, et éprouvant d'ailleurs quelque scrupule à en engager une avec mon éminent contradicteur, je me serais borné à soumettre à son appréciation les observations que ses critiques me suggéraient s'il n'avait bien voulu m'engager de la façon la plus aimable à publier ma réponse et à y joindre même les réflexions que je pouvais avoir à faire sur deux objections formulées par M. Niewenglowski dans le même numéro du Journal [1]. J'aurai soin, dans ce qui suit, de reproduire, avec les critiques contenues dans l'article de M. Appell, quelques observations complémentaires qui résultent de la correspondance échangée ; le lecteur aura ainsi entre les mains tous les éléments de la question.

1. « La Géométrie élémentaire, — dit M. Appell, — a heureu-
« sement échappé jusqu'ici aux innovations qui, sous couleur de
« progrès scientifique, ont entraîné les mathématiques spéciales
« dans une voie dangereuse. Aussi suis-je bien loin de partager
« l'opinion de M. Ripert sur l'introduction, dans la Géométrie
« élémentaire, de l'infini, au sens que M. Ripert donne à ce
« mot. »

Je ne discuterai ici en aucune façon ce qui constitue une *opinion* de M. Appell, opinion qu'il a d'ailleurs précisée ainsi : « Quand

(1) Voir *Enseignement mathématique*, 1900 (n° 2, p. 127 ; n° 3, p. 205 et 219).

je parle d'innovations en Géométrie élémentaire, je veux parler, non de changements dans la démonstration ou l'ordre des théorèmes, — ce qui serait exclure tout perfectionnement dans l'enseignement, — mais de changements dans *l'esprit* de la Géométrie élémentaire aussi considérables que l'introduction de l'infini d'une façon systématique, ou encore, l'introduction des éléments imaginaires, etc. »

Il est évident que l'introduction des éléments imaginaires serait absolument contraire à l'esprit de la Géométrie élémentaire ; mais il ne me semble pas qu'il en soit de même pour la notion de l'infini, dans les modestes proportions que j'ai proposées et d'une façon qui, dans ma pensée, n'a rien de systématique. Il est possible, au reste, que je me sois mal fait comprendre à ce sujet ; j'y reviendrai plus loin.

Mais est-il bien vrai que la Géométrie élémentaire ait échappé jusqu'ici aux innovations ? Est-il même désirable qu'elle y échappe complètement, les améliorations qui sont dans l'esprit de la Géométrie étant, bien entendu, hors de cause ?

Lorsque, dans leur Cours, MM. Niewenglowski et Gérard placent la première notion du cercle dans l'introduction même, côte à côte avec celle de la ligne droite, au lieu de la réserver pour le Livre II ; lorsqu'ils intervertissent l'ordre d'exposition des théories des parallèles et des perpendiculaires ; lorsqu'ils introduisent, dans l'enseignement même, la Géométrographie, etc., ils nous mettent bien en présence de nouveautés. Je m'empresse de reconnaître que ces nouveautés, que, pour ma part, je trouve excellentes, ainsi que je l'ai dit, sont de celles que M. Appell admet comme conformes à l'esprit de la Géométrie, et il m'a même déclaré qu'il partageait entièrement, sur ces divers points, la manière de voir des auteurs cités. Si je rappelle ces innovations, c'est que, dans ma pensée, l'introduction *élémentaire* de la notion de l'infini n'est pas sans relations avec la première, la Géométrie débutant par la notion du cercle considérée comme aussi intuitive que celle de la droite.

Une nouveauté d'une extrême importance, inaugurée, si je ne me trompe, par MM. Rouché et de Comberousse, est l'adjonction à la Géométrie plane d'un livre ou sous-livre de compléments consacrés à l'exposition des théories de la Géométrie moderne.

La plus grande des innovations, pour laquelle il est inutile d'ailleurs d'examiner si elle est conforme ou contraire à l'esprit de la Géométrie, mais qui, si elle est adoptée, modifiera profondément les méthodes d'enseignement, est la *fusion de la planimétrie et de la stéréométrie*. Je n'ai pas à savoir si M. Appell en est ou non partisan ; mais il est certain qu'elle a, surtout en Italie, des partisans éminents et convaincus. Ainsi que l'ont dit MM. Lazzeri et Bassani, dans la préface de leurs *Elementi di Geometria* (1), cette idée, qui fut considérée comme une utopie lorsque De Paolis l'émit il y a seize ans seulement, a fait rapidement beaucoup de chemin.

Rappellerai-je enfin que, dans son premier numéro, l'*Enseignement mathématique* signalait l'éclosion simultanée des Traités ou Cours de MM. Hadamard, Guichard, Niewenglowski et Gérard, etc., dans notre pays qui possède déjà le Traité que l'on peut dire classique de MM. Rouché et de Comberousse, comme un indice du besoin que l'on semble éprouver de reviser dans une certaine mesure l'enseignement de la Géométrie élémentaire. Depuis, d'autres Traités ont paru à l'étranger. Il y a là un fait sur la signification duquel il est inutile d'insister.

2. Dans mon article *élémentaire*, j'avais donné au mot *l'infini* son sens le plus élémentaire, en le considérant comme la limite de l'infiniment grand. M. Appell m'a fait observer que « l'idée de l'infini en Géométrie est essentiellement relative et tient au mode de coordonnées employées. On parle plus habituellement de la droite de l'infini parce que l'on emploie habituellement les coordonnées cartésiennes, ou mieux les coordonnées homogènes. Mais, en coordonnées polaires, si on rend l'équation $F(x, y) = 0$ homogène en remplaçant x par $\frac{x}{\rho}$, les points à l'infini correspondent à $\rho = 0$, et il est commode de les regarder comme confondus en un point unique $(\rho = 0)$. »

Cette observation est d'une justesse incontestable ; mais il reste à savoir si, en Géométrie élémentaire, *où l'on n'emploie aucun système de coordonnées*, il est vraiment impossible de

(1) Voir *Enseignement mathematique*, 1899, n° 1.

donner *une explication* faisant apparaître l'idée de l'infini d'une façon correspondant à celle que l'on emploiera lorsque l'on abordera la Géométrie analytique par les coordonnées cartésiennes et implantant ainsi, dans l'esprit des élèves, une première notion importante.

M. Appell explique ensuite pourquoi, à son avis, l'introduction de la notion de l'infini ne peut venir utilement qu'en mathématiques spéciales; ceci est une opinion, et je m'abstiens de la discuter.

3. Je viens de parler *d'une explication*; dans mon article, j'avais dit *une démonstration*, et M. Appell a répondu : « Vouloir « *démontrer*, comme une vérité absolue, par un théorème énoncé « de la même façon que les théorèmes relatifs aux angles inscrits, « qu'*une droite n'a pas deux points à l'infini mais seulement un*, « c'est une idée inadmissible. »

J'ai en effet employé le mot *théorème*, et en conséquence, j'avais cherché à préciser un énoncé. J'admets volontiers que ce mot *théorème* est ici impropre, et je l'abandonne. Mais je n'avais pas parlé de vérité absolue; j'avais au contraire insisté sur les mots *conception* et *convention*. Ceci dit, la contestation me paraît surtout porter sur la forme. Que, au lieu de parler de théorème, on dise : « On peut faire comprendre, par telles considérations, la conception de la droite de l'infini, son utilité, sa nécessité même pour expliquer les faits », c'est une nuance que les professeurs sauront bien établir, et, dans ces conditions, la véritable question est : *Que vaut l'explication ?*

4. « Quant à la démonstration proposée, — dit à ce sujet « M. Appell, — je n'y insisterai pas : elle repose sur un mode « de transformation vague d'un cercle en une droite, et elle per- « met de démontrer tout ce qu'on veut pour les points à l'infini « de la droite, suivant le mode de correspondance qu'on établit « entre les points du cercle, ou d'une portion du cercle, et ceux « de la droite ».

J'observerai que, m'étant proposé de faire un article ne relevant que de la Géométrie élémentaire, j'ai dû éliminer toutes les considérations qui ne sont pas ordinairement invoquées en Géométrie élémentaire, telles que celle des modes de correspondance

qu'on peut établir entre les points d'un cercle et ceux d'une droite. M. Appell, précisant sa critique, m'a écrit : « Si j'ai dit que votre démonstration était vague, c'est qu'elle pourrait s'appliquer à d'autres courbes. Ainsi, vous pourriez faire le même raisonnement pour un demi-cercle, A et B étant les extrémités du diamètre perpendiculaire à OO′ (voir la figure, n° 2, p. 129), le point A allant à l'infini d'un côté et le point B de l'autre ».

Cela ne fait pas doute ; mais, dans l'esprit de la Géométrie élémentaire, on ne considère pas d'autres courbes que le cercle, et, bien que l'observation relative au demi-cercle soit exacte, il y a lieu d'examiner si, l'idée de théorème écartée, mon *explication* demeure contraire à l'esprit de la science en cause et si elle n'est pas de nature à faire saisir par les élèves une convention importante, quand elle aura été précisée de manière à ne plus donner prise à ce reproche de *vague* que lui adresse M. Appell.

Ceci m'amène à examiner les objections de M. Niewenglowski (n° 3, p. 219).

5. La première est : « Le point O′ a pour limite, quand le « rayon du cercle grandit indéfiniment, le point à l'infini sur la « perpendiculaire à la droite $x'x$ menée par O. Il ne peut donc « servir à définir le point à l'infini sur $x.x.$ » — Il est absolument vrai que, si l'on considère le point O′ comme se déplaçant sur le diamètre OO′, normal à $x'x$, *sa limite* est le point à l'infini sur OO′, et ceux qui sont fixés sur la question peuvent même dire qu'il est tout aussi bien à l'infini en bas qu'à l'infini en haut. Mais il est vrai aussi que, si l'on regarde le cercle comme engendré, ainsi que je l'ai dit (n° 2, p. 129), par deux mobiles partant de O et parcourant dans des conditions identiques la circonférence, — mode de génération qui exclut l'intervention du centre et des diamètres [1], — on ne peut arriver à O′ qu'en

[1] Je me suis servi, pour désigner O′, de l'expression usuelle : *point diamétralement opposé à* O. Mais il est visible que le diamètre n'est pas, au fond, dans la question et que l'on peut se borner à dire que O′ est le point de rencontre des deux mobiles. La notion de longueur, et même celle d'aire, sont intuitives; elles résultent, dès le début, de la considération d'une circonférence et d'un cercle. — Enfin, j'ai placé la notion de l'infini au commencement du livre III; on peut la reporter, si l'on veut, à la fin du livre IV, pourvu qu'elle reste en Géométrie plane. Si l'idée est juste, de pareils détails ne peuvent suffire pour la faire rejeter.

passant par toutes les positions intermédiaires ; pour y arriver quand le rayon, par hypothèse, devient infini, il est indifférent de prendre la voie $\overrightarrow{Ox}$ ou la voie $\overrightarrow{Ox'}$, et, comme, dans cette hypothèse, on ne peut plus sortir de $x'x$, si cela ne *démontre* pas, en toute rigueur, que le point à l'infini sur $x'x$ est unique, cela *montre* au moins que l'on ne saurait en concevoir deux, ce qui, au point de vue *explication*, est sensiblement la même chose.

D'ailleurs, cette explication peut être précisée, et c'est un de ces détails que tout professeur aurait trouvé aisément. Après avoir insisté sur ce fait que, sur le cercle, il n'y a qu'un seul point O′ acquis simultanément par les deux mobiles et qui ne peut être coté que $\pm C$ ($2C$ étant la longueur totale de la circonférence ou du trajet à parcourir), on peut dire : Ouvrons le cercle en O′ au moment précis où ce point est acquis, et développons-le sur $x'x$, de part et d'autre de O : nous aurons une droite limitée O′OO′, ayant O pour milieu et pour extrémités deux points O′ provenant l'un et l'autre du point O′ du cercle et cotés l'un comme l'autre, $\pm C$. Il en sera de même quels que soient l'ampleur du cercle considéré, et par suite, l'éloignement des deux extrémités O′ de la droite limitée, etc.

6. M. Niewenglowski remarque en second lieu, que « le cercle « ne se confond pas avec la droite $x'x$ quand son rayon grandit « indéfiniment ; *sa limite* se compose de *deux droites :* la « droite $x'x$ et la droite de l'infini du plan considéré ». Cette remarque peut être rapprochée d'une note à peu près identique que l'on trouve à la page 205 du tome I du cours Niewenglowski-Gérard : « *En réalité*, le cercle C a pour limite un système de « deux droites : la droite Δ et la droite de l'infini. »

Oui, cela est vrai si l'on admet que la droite de l'infini existe, qu'on peut la considérer comme normale à OO′ si l'on veut, que le cercle qui, en principe, est une courbe fermée, s'ouvrira latéralement à la limite, aux points à l'infini situés sur le diamètre perpendiculaire à OO′ ; que, Ω étant le centre, et bien que l'on ait toujours $O\Omega = \Omega O'$, on aura, à la limite, $O\Omega = \infty$ et $\Omega O' = o$, si l'on veut, etc. La note de la page 205 a visiblement pour objet d'éviter une objection ; mais cette note est incompréhensible pour les lecteurs du tome I, puisque la notion de la droite de

l'infini est rejetée, à la fin du tome II, dans les compléments sur les coniques, à moins qu'ils n'aient un professeur qui, en dépit du programme, leur a donné quelques explications. D'ailleurs, cette observation n'est pas faite pour répondre à une critique par une critique, mais seulement pour montrer que les auteurs eussent été plus à l'aise s'ils avaient eux-mêmes, au préalable, donné ces explications.

Pourquoi d'ailleurs ne pourrait-on pas dire, *couramment* et *provisoirement*, que la limite d'un cercle dont le rayon croit indéfiniment est une droite ?

Est-ce qu'on ne parle pas couramment de la corde commune à deux cercles, sans se croire obligé d'ajouter qu'il y a, *en réalité*, deux cordes communes, celle que l'on considère et la droite de l'infini ?

Est-ce que l'on ne dit pas couramment que la parabole est la limite soit d'une ellipse, soit d'une hyperbole, variant dans telles et telles conditions ? Et peu de professeurs se croient dans la nécessité d'ajouter que, en réalité, la limite se compose de deux portions de coniques, celle qui devient la parabole et une autre rejetée à l'infini et que l'on abandonne, cette *demi-conique* s'aplatissant, par convention, avec tous ses éléments, sur la droite de l'infini, si bien que l'on peut dire que la parabole a son centre et un sommet (trois, si l'on veut) à l'infini, que la droite de l'infini est un axe, une tangente, une asymptote double, la demi-conique elle-même, etc. Ce sont des choses bien peu conformes à la *réalité* et qui ne deviennent explicables que lorsque l'on s'est familiarisé avec la conception de Poncelet et les conventions qui en sont la conséquence.

La vérité est donc que : 1° toutes ces notions sont inintelligibles, tant que l'on n'a pas expliqué la droite de l'infini ; 2° on peut très bien, tant que cette explication n'a pas été donnée, dire qu'une droite est la limite d'un cercle, parce que cette notion, sans être rigoureusement exacte, est en quelque sorte parlante ; 3° lorsque l'on sera suffisamment avancé, on observera qu'il y a une portion de cercle à l'infini, se confondant, *par convention*, avec la droite de l'infini et qu'il faut considérer comme venant s'ajouter à la portion du cercle qui subsiste et qui se confond *en réalité* avec la droite $x'x$.

7. M. Appell observe que la notion de l'infini doit venir en mathématiques spéciales comme une conséquence de la transformation homographique du plan. C'est en effet ainsi qu'elle devrait être logiquement enseignée ; malheureusement, l'homographie ne fait pas partie des programmes classiques [1]. On peut dire cependant qu'elle est, *par le fait*, dans la Géométrie élémentaire, puisque tous les traités de Géométrie élémentaire, depuis celui de MM. Rouché et de Comberousse, contiennent, comme je l'ai dit, un Livre de compléments. Cela étant, je me borne à dire : « Quelques notions sur les éléments de l'infini peuvent et doi-« vent trouver place dans ces compléments ». J'ai exposé mon idée telle que je la comprends ; je ne me dissimule nullement que, à cause de mon inexpérience en matière d'enseignement, elle est susceptible de modification dans les détails et *dans l'application ;* mais, la croyant juste et utile, je la verrais avec regret rejetée *dans son principe* sans un examen suffisant.

L. Ripert (Paris).

---

(1) Voir H. Laurent, *Les Mathématiques spéciales en France. Enseignement mathématique*, 1899, n° 1, p. 40).

CHRONIQUE

Congrès international des Mathématiciens; Paris, août 1900.

« Provoquer des relations personnelles entre les mathématiciens des différents pays », tel est, entre autres, l'un des buts inscrits en tête du règlement du premier Congrès tenu à Zurich en 1897. Cette fois encore ce but a été pleinement atteint, et nous sommes certains, que sous ce rapport, le deuxième Congrès international des mathématiciens, qui vient d'avoir lieu à Paris, du 6 au 12 août, laissera un agréable souvenir à tous ceux qui se sont accordé le plaisir d'y assister. Ce congrès a réuni près de trois cents personnes dont plus de deux cent cinquante membres effectifs. Il a été marqué par un ensemble de séances du plus grand intérêt et par un certain nombre de réceptions empreintes d'une grande cordialité.

Rendons d'abord brièvement compte des séances générales, au nombre de deux. La première, la séance d'inauguration, a eu lieu dans l'enceinte de l'Exposition au Palais des Congrès, sous la présidence de M. H. Poincaré, membre de l'Institut. Elle a été consacrée d'abord à une courte partie administrative consistant en la nomination du bureau du Congrès et des bureaux de sections, puis aux conférences de MM. Cantor et Volterra. La communication de M. Moritz Cantor (Heidelberg), *sur l'Historiographie des mathématiques* est un véritable rapport sur le développement de cette importante branche. Nul n'était mieux qualifié pour aborder cette question que le savant professeur allemand dont chacun connaît l'œuvre magistrale sur l'Histoire des mathématiques. M. Volterra (Turin) dans sa conférence *sur trois mathématiciens italiens : Betti, Brioschi et Casorati*, a su nettement faire ressortir le caractère propre aux travaux de chacun d'eux et leur influence sur le mouvement mathématique contemporain.

Au début de la seconde séance générale, tenue à la Sorbonne, le Congrès, sur la proposition de M. Laisant, a voté, par acclamation, un télégramme à l'adresse de M. Hermite, comme témoignage d'admiration et de vénération. Il décide ensuite que le prochain Congrès aura lieu en Allemagne en 1904, à Baden-Baden ou ailleurs. Le choix de la ville et la date sont laissés à la *Deutsche Mathematiker Vereingung*, chargée de l'organisation du congrès.

Puis on entend une brillante conférence de M. Mittag-Leffler (Stockholm) *sur une page de la vie de Weiertrass ;* c'est une étude très

documentée des lettres adressées par le grand savant berlinois à son illustre élève Sophie de Kowaleski. Enfin, M. H. Poincaré, reprenant une question qu'il a abordée dans notre *Revue* (1re année, p. 157), fait une communication *sur le rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*; il insiste tout particulièrement sur le rôle prépondérant que doit jouer l'intuition.

Voici maintenant la composition du Bureau du Congrès :

Président d'honneur : M. Hermite. — *Président :* M. H. Poincaré. — *Vice-présidents :* MM. Czuber (Vienne), Geiser (Zurich), Gordan (Erlangen), Greenhill (Londres), Lindeloef (Helsingfors), Lindemann (Munich), Mittag-Leffler (Stockholm), Moore Chicago), Tikhomandritzky (Kharkoff), Volterra (Turin), Zeuthen (Copenhague).

Secrétaire général : M. Duporcq (Paris). — *Secrétaires :* MM. Bendixon (Stockholm), Capelli (Naples), Minkowski (Zurich), Ptaszycki (Saint-Pétersbourg), Whitehead (Cambridge).

Nous y joignons les noms du président et du secrétaire de chacune des six sections :

I. Arithmétique et Algèbre : MM. Hilbert et Cartan.
II. Analyse : MM. Painlevé et Hadamard.
III. Géométrie : MM. Darboux et Niewenglowski.
IV. Mécanique, Physique mathématique, Mécanique céleste ; MM. Larmor et Levi-Civita.
V. Bibliographie et Histoire : M. le prince Roland Bonaparte et M. d'Ocagne.
VI. Enseignement et Méthodes : MM. Cantor et Laisant.

Les séances de sections ont toutes eu lieu à la Sorbonne. Il nous est impossible de résumer ici les travaux présentés dans les six sections ; ils seront d'ailleurs publiés dans les mémoires du Congrès. Nous devons nous borner à une simple nomenclature, forcément aride, des principaux sujets traités dans les cinq premières sections en ajoutant que plusieurs d'entre eux ont donné lieu à d'intéressantes remarques. L'assiduité avec laquelle les congressistes ont suivi les séances est une preuve certaine de l'intérêt que présentaient les questions traitées.

I. MM. Autonne (Lyon) : sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire quartenaire. — H. Hancock (Cincinnati) : Remarks on Kronecker's modular systems. — C. Stephanos (Athènes) : Sur la séparation des racines des équations algébriques. — Von Koch (Djursholm) : Sur la distribution des nombres premiers. — R. Perrin (Paris) : Sur les propriétés d'un certain covariant de la forme binaire du 5e ordre et leur application à la résolution de l'équation. — L.-E. Dickson (Texas) : The known systems of simple groups and their inter-isomorphism. Note on abstract groups. — Rados (Budapest) :

Note sur la théorie des substitutions orthogonales. — Gavrilovic (Belgrade) : Sur une propriété remarquable des déterminants. — A. Padoa (Rome): Un nouveau système irréductible de postulats pour l'Algèbre.

II. MM. Mittag-Leffler (Stockholm) : Fonction analytique et expression analytique. — Une application de la théorie des séries n fois infinies. — Sur une extension de la série de Taylor. — J. Bendixon (Stockholm) : Sur les courbes définies par les équations différentielles. — J. Drach (Clermont-Ferrand) : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. — Jahnke (Berlin): Zur Theorie der Thetafunktionen von zwei Argumenten. — Tikhomandritzki (Kharkoff): Sur l'évanouissement des fonctions θ de plusieurs variables. — Padé (Lille): Aperçu sur les développements récents de la théorie des fractions continues. — Cartan (Lyon): Sur une classe d'équations différentielles.

III. MM. Lovett (Princeton) : Sur les transformations de contact entre les éléments les plus essentiels de l'espace. — Macfarlane (South Bethlehem) : Application of space analysis to curvilinens coordinates. — J. Stringham (Californie) : Orthogonal transformations in elleptic or in hyperbolic space. — Jamet (Marseille): Sur le théorème de Salmon concernant les cubiques planes. — Vaes (Rotterdam) : Sur les corps réguliers et semi-réguliers. — Padao (Rome): Un nouveau système de définitions pour la Géométrie euclidienne. — A signaler encore les communications de MM. Issaly (Bordeaux) et Amedeo (Naples).

IV. Communications de MM. Ch.-V. Zenger (Prague), Boccardi (Rome), Fredholm (Stockholm), Somigliana (Pavie), Hadamard (Paris), Volterra (Turin).

V. M. Fujisawa (Tokio) : The mathematiks of the old japanese school. — Trois autres communications pourraient être rangées dans cette section, ce sont celles de MM. Cantor, Volterra et Mittag-Leffler, lues en séance générale.

Quant à la section VI (Enseignement et méthodes), son utilité est maintenant clairement démontrée. Plusieurs questions très importantes y ont été traitées et nous croyons devoir les signaler tout particulièrement à l'attention de nos lecteurs. En première ligne nous devons mentionner la remarquable conférence de M. D. Hilbert (Göttingue) *sur les problèmes futurs des mathématiques*. Nos lecteurs en trouveront plus haut (p. 349) le résumé qui est la reproduction de la plaquette que l'auteur avait eu soin de faire distribuer d'avance à ses auditeurs. Nous insisterons aussi sur la communication de M. de Galdeano (Saragosse) intitulée *Note sur la critique mathématique* et nous serions heureux si le résumé que nous allons en donner pouvait engager quelques-uns de nos abonnés à reprendre cette importante question dans notre *Revue*.

M. DE GALDEANO dit que les progrès réalisés dans les divers domaines de la mathématique rendent nécessaire une étude comparée des diverses branches en envisageant spécialement la méthode employée dans chacune d'elle. On parviendrait ainsi à des vues d'ensemble permettant aux mathématiciens d'embrasser un plus grand domaine de la science. Les diverses branches pénètrent les unes dans les autres sans qu'il soit possible de les délimiter d'une manière précise. Il s'agirait donc d'une étude de la mathématique faite non pas d'après l'objet de chaque branche, ainsi que cela se fait dans l'enseignement, mais faite d'après les concepts qui en sont la base. Cette étude constituerait la *critique mathématique*, une branche nouvelle qui serait appelée à rendre de grands services ; elle pourrait être rattachée à la Pédagogie mathématique. Il faut qu'à côté des cours consacrés aux diverses branches de la mathématique, les futurs professeurs trouvent à l'Université une chaire spécialement réservée à une étude parallèle entre le développement logique et le développement historique des connaissances mathématiques.

Signalons encore la communication de M. D'OCAGNE (Paris) *sur les divers modes d'application de la méthode graphique à l'art du calcul*, celle de M. CAPELLI (Naples) *sur les opérations fondamentales de l'Arithmétique*, et enfin la proposition de M. LEAU (Paris) demandant à la section de formuler un vœu en vue de l'adoption d'une langue scientifique universelle. Cette proposition a donné lieu à une discussion à laquelle ont pris part MM. Schroeder, Laisant, Vassilief, Couturat, etc.; elle a été repoussée à une faible majorité. L'assemblée a donné la préférence à la proposition de M. Vassilief invitant l'Association des Académiciens à prendre des mesures pour que les travaux scientifiques soient publiés dans l'une des quatre principales langues européennes.

A noter encore la remarque faite à juste titre par M. Dickstein au sujet d'une série de questions soulevées au Congrès de Zurich, et qui devront être remises à l'ordre du jour du prochain congrès. Il s'agit, d'une part des questions de bibliographie et de terminologie [1] au sujet desquelles une entente internationale paraît nécessaire, d'autre part, de la publication d'un dictionnaire biographique des mathématiciens, d'un journal de Bibliographie, et d'un livre d'adresse des mathématiciens. Pour ce qui est de cette dernière publication, chacun sait qu'elle ne tardera pas à paraître sous le titre d'*Annuaire des mathematiciens*, édité à Paris par MM. Carré et Naud. Quant aux autres publications, nous croyons qu'il suffit de les avoir signalées aux mathématiciens et aux éditeurs et qu'elles dépendent maintenant de l'initiative privée.

A côté de ces séances, d'un caractère forcément très austère, le comité d'organisation avait prévu comme délassement des réunions intimes, telles que la réunion préliminaire à la veille du Congrès, le

[1] Voir dans l'*Enseignement math.*; 1re année, p. 22, l'article de M. Laisant sur *les questions de terminologie*.

lunch à l'Ecole normale supérieure, le banquet final, puis les réceptions chez M. le président de la République et chez M. le prince Roland Bonaparte, membre de la Société mathématique de France. C'est dans ces réunions que beaucoup de savants, ne se connaissant encore que par leurs œuvres, ont pu nouer entre eux des relations amicales. Aussi sommes-nous persuadés, ainsi que nous le disions déjà au début de cet article, que le Congrès de Paris vient de contribuer d'une façon très heureuse à resserrer les liens entre les mathématiciens des divers pays. H. F.

L'Association internationale des Académies.

Nos lecteurs connaissent le *Projet d'union académique* que nous leur avons fait connaître au mois de mars de l'année dernière (Voir t. I, p. 136). Après une série de pourparlers entre les délégués des principales académies, le projet a été adopté par 18 académies et l'*Association internationale des Académies* est ainsi définitivement fondée. Ont adhéré aux statuts les Académies d'Amsterdam, de Berlin, de Bruxelles, de Budapest, Christiana, de Göttingue (Société royale des Sciences), de Copenhague, de Leipzig (Société royale des Sciences de Saxe), de Londres (Société royale), de Munich, de Paris (Académie des Sciences, Académie des Sciences morales et politiques, Académie des Inscriptions et Belles-Lettres), de Saint-Pétersbourg, de Rome, de Stockholm, de Washington et de Vienne.

L'Association comprend une *section des Sciences* et une *section des Lettres*; elle a pour organes : 1° l'*Assemblée générale* qui se réunit tous les trois ans et qui est composée des délégués, en nombre illimité, des diverses Académies, mais chaque académie n'ayant droit qu'à une seule voix; 2° le *Comité* comprenant un ou deux délégués de chaque Académie suivant qu'elle participe aux deux sections ou à une seule d'entre elles. La présidence du Comité appartient à l'Académie *principale*, c'est-à-dire à celle du lieu choisi pour l'Assemblée générale. Actuellement c'est Paris qui a le siège de la présidence et la première assemblée générale a été tenue à l'occasion de l'Exposition universelle.

Il est hors de doute que cette union entre les grandes Académies du monde entier ne donne une forte impulsion aux travaux scientifiques d'un intérêt général. Pour ce qui concerne en particulier les mathématiques il y a une série de questions qui ne manqueront pas d'être examinées par l'Association. Au premier plan viennent se placer les questions de terminologie et de bibliographie au sujet desquelles l'entente entre les Académies est indispensable.

Une belle carrière.

E. G. Oltramare, professeur à l'Université de Genève, vient de donner sa démission après avoir occupé pendant cinquante-deux ans la

chaire de mathématiques supérieures à la Faculté des sciences. Cet éminent savant fut non seulement un professeur de premier ordre, mais encore un administrateur actif et dévoué qui contribua pour une large part au développement de la Faculté des Sciences.

A l'occasion de la dernière heure de cours, un grand nombre de professeurs et d'anciens élèves étaient venus prendre congé de leur vénéré collègue et maître. Le Gouvernement était représenté par M. G. Favon qui, au nom du Conseil d'Etat, a remercié M. le professeur Oltramare pour son dévouement à la cause de l'enseignement. L'*Enseignement mathématique* s'associe du fond du cœur aux sentiments d'admiration et de reconnaissance qui ont été exprimés dans cette touchante cérémonie, car nous n'oublions pas que le savant professeur a été l'un des premiers à faire partie de notre comité de patronage. M. Oltramare se retire à l'âge de 84 ans. Nous souhaitons vivement qu'il puisse jouir longtemps encore de l'amitié et de l'estime dont il est l'objet dans le monde scientifique et dans le public genevois.

Prix proposés par l'Académie Royale de Belgique.

Questions de sciences mathématiques mises au concours pour 1901.

1. Trouver la forme des termes principaux introduits, par l'élasticité de l'écorce terrestre, dans les formules de la nutation en obliquité et en longitude. (Valeur du prix : 800 francs.)

2. On demande une contribution importante à l'étude des formes mixtes à un nombre quelconque de séries de variables, et d'en appliquer les résultats à la géométrie des espaces quelconques. (Valeur du prix : 600 francs.)

Les mémoires devront être écrits lisiblement et pourront être rédigés en français ou en flamand. Ils devront être adressés, franco de port, à M. le secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, à Bruxelles, avant le 1er août 1901.

L'Académie exige la plus grande exactitude dans les citations ; les auteurs auront soin par conséquent d'indiquer les éditions et les pages des ouvrages cités.

Les auteurs ne mettront point leur nom à leur ouvrage ; ils y inscriront seulement une devise qu'ils reproduiront sur un pli cacheté renfermant leur nom et leur adresse (il est défendu de faire usage d'un pseudonyme) ; faute de satisfaire à ces formalités, le prix ne pourra être accordé.

Les mémoires remis après le terme prescrit et ceux dont les auteurs se feront connaître, de quelque manière que ce soit, seront exclus du concours.

L'Académie croit devoir rappeler aux concurrents que les mémoires soumis à son jugement sont et restent déposés aux Archives. Toutefois, les auteurs peuvent en faire prendre copie, à leurs frais, en s'adressant à cet effet, au secrétaire perpétuel.

Etats-Unis.

Université de Chicago. — M. le Dr L.-E. Dickson, jusqu'ici professeur-associé à l'Université du Texas, vient d'être nommé professeur-adjoint à l'Université de Chicago. — M. le Dr H.-E. Slaught a été promu aux fonctions de professeur-adjoint au collège mathématique de cette même institution.

Brooklyn. — M. le Dr J.-B. Chittenden quitte l'Université de Columbia pour aller prendre les fonctions de professeur de mathématiques au « Brooklyn Polytechnic Institute ».

J. Hopkins University. — M. le professeur F. Morley, du Haverfood College, a été nommé chef du département mathématique de la Johns Hopkins University.

Princeton University. — M. A.-H. Wilson, après avoir passé un an à l'Université de Göttingue, reprend ses fonctions de professeur. — M. le Dr E.-O. Lovett a été nommé à la chaire de mathématique.

Décès. — On annonce la mort de M. William M. Thrasher, qui, pendant de nombreuses années, a été professeur à l'Université Butler à Irwington (Ind.).

Société mathématique de France.

Depuis le 1er mars 1900, les séances de la Société mathématique de France se tiennent dans une salle de la Faculté des sciences de Paris.

Provisoirement, le siège social reste fixé, comme par le passé, rue des Grands-Augustins, n° 7, et c'est à cette adresse que doivent continuer à être envoyées toutes les correspondances, jusqu'à nouvel avis.

Rappelons à nos lecteurs que le président est, cette année, M. H. Poincaré, et que les secrétaires sont MM. Blutel et Borel.

Les Smith's Prizes.

Les « Smith's Prizes » pour 1900 sont accordés à MM. J. F. Cameron, « Des molécules comme oscillateurs électriques », et R. W. H. T. Hudson, « Des équations différentielles du second ordre et leurs solutions singulières ». (Les deux noms sont donnés par ordre alphabétique). M. Hudson était le « Senior Wrangler » et M. Cameron le « Second Wrangler » de 1898.

Association britannique pour l'avancement des sciences.

Le président de la Section « Sciences Mathématiques et Physiques » de l'Association Britannique pour l'avancement des sciences est M. J. Larmor D. Sc. F. R. S.

CORRESPONDANCE

SUR LE POSTULATUM D'EUCLIDE

25 juin 1900.

De même qu'il fut difficile jadis à Lobatschewsky de se faire comprendre, lorsqu'il voulut exposer la Géométrie nouvelle qu'il venait d'inventer en rejetant le postulatum d'Euclide, de même il est difficile aujourd'hui de se faire entendre de ceux pour qui la question de ce postulatum n'est pas encore épuisée par toutes les recherches sur la Géométrie non-euclidienne, quoique ces recherches forment déjà une littérature considérable, et qui continuent encore à penser que ce postulatum est démontrable. Cet état de choses est regrettable, car, sinon la science elle-même, l'enseignement pour sûr gagnerait beaucoup à l'échange des différentes opinions sur ces questions difficiles ; on parviendrait enfin de cette manière à écarter tous les doutes qui peuvent encore subsister. Vous faites donc très bien d'ouvrir les colonnes de votre excellent journal l'*Enseignement Mathématique* aux partisans des deux opinions opposés sur le postulatum d'Euclide, comme je l'ai appris par le numéro que vous avez eu la bonté de m'envoyer à cause des renseignements qu'il contient sur le congrès international des mathématiciens qui aura lieu à Paris cet été. En vous remerciant de cet aimable envoi, je vous demande la permission de profiter de votre décision pour vous envoyer les réflexions suivantes sur le postulatum d'Euclide.

La possibilité d'existence des autres Géométries que celle d'Euclide, notamment celles de Lobatschewsky d'une part et de Riemann de l'autre, prouve-t-elle vraiment que le postulatum est indémontrable ?

Pour moi, non. La droite d'Euclide possède une propriété caractéristique qui manque aux droites de Lobatschewsky et de Riemann, celle d'engendrer par son mouvement de rotation autour de deux de ses points maintenus fixes une surface de révolution renfermant un volume égal à zéro ; cette droite existe dans la nature, d'après la très juste remarque de M. Andrade, comme l'axe de rotation d'un corps rigide autour de deux points fixes. En rejetant le postulatum d'Euclide, on fait perdre à la ligne droite cette propriété caractéristique ; donc l'existence des Géométries non euclidiennes démontre seulement qu'il existe un lien intime entre le postulatum d'Euclide et cette propriété de la droite ; de sorte que si l'on définit la droite complètement, sans que la propriété mentionnée lui manque, le postulatum doit s'ensuivre.

Il est arrivé au postulatum d'Euclide la même chose qu'au théorème fondamental de l'Algèbre (chaque équation a une racine de la forme $a + b\sqrt{-1}$); tant qu'on restait sur le terrain propre de l'Algèbre, considérant les valeurs particulières du polynôme, on ne pouvait pas le démontrer; mais dès qu'on a passé sur le domaine de la théorie des fonctions, en considérant le polynôme comme variable, on en a obtenu plusieurs démonstrations. De même, comme je vais le montrer, on aura une démonstration du postulatum d'Euclide, si l'on passe du domaine de la Géométrie, qui traite les figures fixes, par conséquent invariables, sur celui de la Cinématique, qui les considère comme en mouvement et par conséquent variables.

D'abord je fais la remarque suivante : si l'on mène par le milieu D de la base AB d'un triangle isocèle ACB une sécante FDE, sa partie extérieure FD sera plus grande que la partie intérieure DF : en effet si l'on plie la figure suivant la base AB du triangle, le point F tombera en F en dehors du triangle, l'angle FBD étant obtus tandis que l'angle CBD est aigu ; on aura donc $FD > ED$; mais $ED = ED$, comme cela résulte de l'égalité des triangles BDE' et ADE, dans lesquels on a : $BD = DA$, $\widehat{E'BD} = \widehat{DAE}$; $\widehat{BDE'} = \widehat{ADE}$; donc on a $FD > DE$, c. q. f. d.

Si l'on abaisse une perpendiculaire CG du point C sur la ligne FDE,

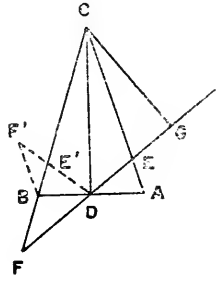


Fig. 1.

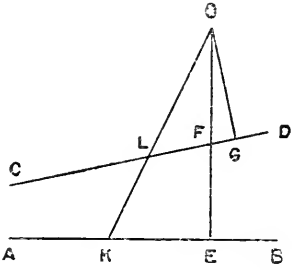


Fig. 2.

on voit par ce qui précède que pour deux angles égaux, ayant le même sommet en C, comme FCD et DCE, celui qui intercepte entre ses côtés le plus grand segment de la droite FG perpendiculairement à CG, sera celui dont les côtés sont plus déviés de cette perpendiculaire CG, ou, autrement dit, plus inclinés sur la droite FG ; car l'angle CDG est moindre que CEG, comme on le démontre par la théorie des triangles égaux.

La différence des deux côtés d'un angle DCE étant plus grande que la projection de DE sur le côté CE, le moins dévié de la perpendiculaire CG, et cette projection augmentant lorsque l'angle DCE prendra la position FCD parce que : 1° FD est $>$ DE, 2° l'angle CDE est moindre que l'angle CEG, la différence mentionnée augmentera elle-

même lorsque l'angle DCE prendra la position FCD. On en conclut que l'accroissement d'une droite inclinée CE à FG, répondant à un même angle, dont on augmente la déviation de la perpendiculaire CG, sera d'autant plus grand, qu'elle est plus déviée de cette perpendiculaire.

L'angle DCE pouvant être aussi petit qu'on le voudra, il s'ensuit, que si l'on fait tourner uniformément la droite CE, inclinée sur FG autour du point C, sa longueur CE, comprise entre le point C et cette droite FG, s'accroîtra de plus en plus rapidement pour devenir égale à l'infini lorsque la déviation de la perpendiculaire CG atteindra une certaine limite, soit α, α étant égal à l'angle droit pour Euclide et moindre que cet angle pour Lobatschewsky. Autrement : le point E, où la droite CE rencontre la droite FG pendant sa rotation uniforme autour du point C, s'éloignera du point C d'un mouvement de plus en plus accéléré jusqu'à ce que sa distance CE devienne infinie, au moment où l'angle ECG atteindra une certaine limite α.

Cela posé, considérons deux droites AB et CD, dont la première AB est perpendiculaire à une troisième EF, l'autre, CD, inclinée sur EF.

Sur le prolongement de EF, au delà de CD, prenons un point O suffisamment éloigné des deux droites pour que la différence des perpendiculaires OE sur AB, et OG sur CD, soit assez petite par rapport à leurs longueurs. Menons par le point O une droite OK qui couperait la droite CD en un point L, situé du côté de la droite OE, opposé à celui où se trouve le point G. Si l'on fait tourner uniformément la droite OK autour du point O, de manière que K s'éloigne du point E, L s'éloignera aussi du point G, et les deux points, K et L s'éloigneront l'un et l'autre du point immobile O, mais le second L plus rapidement que le premier K, la droite OL étant plus déviée de la perpendiculaire OG à CD que ne l'est la droite OK (qui est la même droite) de la perpendiculaire OE à AB ; lorsque l'angle LOG atteindra la valeur limite α, OL deviendra infinie, tandis que OK, n'étant déviée de la perpendiculaire OE que de l'angle $\alpha - EOG$, aura une valeur finie. Donc le point L, qui était en deçà du point K sur la droite OK, passant au delà pendant que cette droite tourne de l'angle $\alpha - LOG$ dans le mouvement de rotation uniforme autour du point O, doit nécessairement passer par K à un certain instant précédent ; mais alors on aura OL = OK, et par conséquent les deux droites AB et CD se rencontreront. Le postulatum est donc démontré. Quelques doutes pourraient se soulever dans l'esprit de ceux qui s'attachent à la Géométrie de Lobatschewsky, lorsque l'angle EOG serait d'une petitesse suffisante pour faire sentir l'influence de la différence des longueurs des perpendiculaires OE et OG sur l'angle α ; ces doutes peuvent être écartés de la manière suivante. En pliant la figure autour de la ligne AB on obtiendrait une ligne CD' symétrique de CD ; l'angle entre les perpendi-

culaires abaissées d'un point O sur CD et C'D' serait plus grand que celui entre les perpendiculaires à CD et AB ; mais si les lignes AB et CD ne se rencontrent pas, les lignes CD et C'D' ne se rencontreront pas non plus, se trouvant de côtés différents de la droite AB ; d'autre part, si les droites CD et C'D' se rencontrent en un point P, la droite AB passera nécessairement par le même point, à cause de la symétrie.

On pourrait augmenter davantage l'angle entre les perpendiculaires aux deux droites, en considérant, au lieu des droites données les droites A'B' symétrique de AB par rapport à CD, et A''B'', symétrique de AB par rapport à C'D'.

Remarquons encore que la méthode de démonstration des propositions, en pliant la figure suivant une droite, est exclusivement propre à la Géométrie d'Euclide, parce qu'elle suppose la propriété caractéristique de la droide d'Euclide, indiquée plus haut.

Agréez, etc.

M. Tikhomandritzky (Kharkow).

BIBLIOGRAPHIE

Clark University (1889-1899) : *Decennial Celebration ;* lectures on mathematics, par M. E. Picard ; Worcester, Mass. : imprimerie de l'Université, 1899 — Édition française, un vol. in-8° de 91 pages : prix : 2 fr. Arm. Colin et Cie. Paris, 1900.

Les titres des trois conférences réunies dans la brochure dont il s'agit, et qui ont été faites en 1899 par l'éminent professeur, sont les suivants :

I. — Sur l'extension de quelques notions mathématiques et en particulier de l'idée des fonctions depuis un siècle.

II. — Quelques vues générales sur la théorie des équations différentielles.

III. — Sur la théorie des fonctions analytiques et sur quelques fonctions spéciales.

Nous ne pouvons songer à analyser ici ces instructions d'une lecture aussi attachante qu'instructive. M. Picard fait profiter ses auditeurs (et ses lecteurs) d'une science et d'une érudition dont tout le monde connaît la profondeur.

Il y ajoute des aperçus philosophiques originaux sur une question qu'il possède entre toutes. Enfin, nous ne saurions mieux faire que de citer les dernières lignes de sa troisième conférence, pour donner une idée de l'excellence de ses vues en matière d'enseignement :

« En terminant, dit-il, je me permettrai de donner un conseil aux étudiants mathématiciens qui m'ont fait l'honneur de m'écouter : je leur recommanderai de ne pas se cantonner trop tôt dans des recherches spéciales. Il leur faut acquérir d'abord des vues générales sur les diverses parties de notre science, sans lesquelles leurs efforts risqueraient de rester stériles, et qui leur coûteraient plus tard un bien plus grand effort. »

Encyklopadie der mathematischen Wissenschaften. mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben von Dr. Heinr. Burkhardt, o. Prof. der Mathematik an der Universität Zürich, und Dr. W. Franz Meyer, o. Prof. der Mathematik an der Universität Königsberg i. Pr.; 7 Bände in mehreren Heften, gr. 8. Teubner, Leipzig.

Nos lecteurs connaissent le plan général de cet important ouvrage, ainsi que les divisions adoptées pour les deux premiers volumes (voir l'*Enseignement Mathématique*, t. I, p. 141 et p. 370). Divers fascicules ont déjà paru

depuis notre dernière analyse, et tout fait croire que cette utile entreprise sera rapidement menée à bonne fin.

Voici le sommaire des derniers fascicules parus :

T. I. — *Arithmétique et Algèbre.*

Fasc. 3. — Fonctions rationnelles d'une variable : fonctions rationnelles de plusieurs variables, par E. Netto (Giessen). — Formes algébriques; théorie arithmétique des quantités algébriques, par G. Landsberg (Heidelberg). — Théorie des invariants, par Fr. Meyer (Königsberg).

Fasc. 4. — Théorie des invariants (suite et fin), par Fr. Meyer. — Théorie des équations : (*a*) Séparation et approximation des racines, par C. Runge (Hanovre) : (*b*) Fonctions rationnelles des racines, K. Th. Vahlen (Königsberg) : (*c*) Théorie de Galois et applications, par O. Hölder (Leipzig).

Fasc. 5. — Théorie des équations (suite) : théorie de Galois et applications (suite et fin), par O. Hölder : (*d*) Systèmes d'équations, par E. Netto (Giessen) et K. Th. Vahlen (Königsberg) ; (*e*) Groupes finis de substitutions linéaires, par A. Wiman (Lund). — Théorie des nombres : (1) les éléments de la théorie, par Paul Bachmann (Weimar) ; (2) Théorie arithmétique des formes, par K. Th. Vahlen (Königsberg) ; (3) Théorie analytique des nombres, par Paul Bachmann (Weimar) ; (4) Systèmes de nombres algébriques (Zahlkörper, Kreiskörper), par D. Hilbert (Göttingue) ; (5) Théorie arithmétique des quantités algébriques, par G. Landsberg (Heidelberg) ; (6) Multiplication complexe, par H. Weber (Strasbourg).

Le dernier fascicule du premier volume doit paraître incessamment.

T. II. — *Analyse.*

Fasc. 2 et 3. — Intégrales définies (suite et fin), par G. Brunel (Bordeaux). — Equations différentielles ordinaires : existence des solutions, par P. Painlevé (Paris). — Equations différentielles ordinaires : méthodes élémentaires de leur intégration, par E. Vessiot (Lyon). — Equations aux dérivées partielles, par Ed. V. Weber (Munich).

Fasc. 4. — Groupes continus de transformations, par L. Maurer (Tubingue) et H. Burkhardt (Zurich). — Détermination d'une fonction au moyen des valeurs qu'elle prend sur la frontière d'un domaine : *a*) équations différentielles ordinaires, par M. Bôcher (Cambridge M.) ; *b*) équations aux dérivées partielles relatives à la théorie du potentiel, par H. Burkhardt (Zurich) et M. Fr. Meyer (Königsburg) ; *c*) autres équations aux dérivées partielles, par A. Sommerfeld (Aix-la-Chapelle).

Nous saisissons cette occasion pour annoncer à nos lecteurs la publication d'une *édition française de l'encyclopédie*. La traduction sera publiée par la maison Gauthier-Villars, à Paris, sous la direction de M. J. Molk, professeur à la Faculté de Nancy. Les premiers fascicules des tomes I et II paraîtront au printemps de 1901.

Nous sommes certains que cette heureuse nouvelle sera favorablement accueillie chez tous les mathématiciens de langue française et que l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées* ne tardera pas à trouver de nombreux souscripteurs. H. F.

F. Bohnert. — **Ebene und sphärische Trigonometrie,** un vol. in-8° de 160 p.; prix : 2 fr. 50 ; t. III de la « Collection Schubert ». G.-J. Goeschen, Leipzig, 1900.

Dans ce petit traité de *Trigonométrie plane et sphérique*, M. Bohnert s'est borné aux propriétés fondamentales indispensables à une première étude, en laissant de côté tout développement inutile. Ces propriétés sont présentées avec beaucoup de précision et de clarté : elles sont toujours accompagnées d'exercices et de problèmes empruntés à la pratique, afin que le lecteur ne perde jamais de vue le but essentiel de la Trigonométrie. Cet ouvrage rentre donc bien dans le cadre que l'on s'est tracé pour les divers volumes que doit comprendre la « Collection Schubert ».

Toutefois nous aurions voulu y trouver un paragraphe consacré aux divers systèmes en usage pour la mesure des arcs : M. Bohnert se borne exclusivement à l'emploi des degrés. En outre, un paragraphe ayant pour objet les tables trigonométriques et quelques notions sur leur construction et sur leur usage eût également pu trouver place dans cet ouvrage.

Envisagé au point de vue de la méthode suivie, ce traité peut être classé dans la catégorie de ceux auxquels nous avons fait allusion dans une note [1] *sur l'enseignement des éléments de Trigonométrie*. C'est dire que l'auteur, avant d'aborder l'étude des fonctions trigonométriques d'un angle quelconque, établit d'abord la notion du rapport trigonométrique d'un angle aigu : cette notion le conduit immédiatement à la résolution des triangles rectangles qui se trouve ensuite appliquée aux triangles isocèles, aux polygones réguliers et à divers problèmes pratiques.

Puis vient l'extension au cas d'un angle supérieur à 90°. L'auteur définit les fonctions trigonométriques d'un angle quelconque ; il étudie leur variation dont il donne la représentation graphique. La résolution des triangles quelconques est présentée d'une manière très simple : elle donne lieu à une série de problèmes empruntés les uns à la Géométrie du triangle, les autres aux questions d'arpentage.

La première partie se termine par l'étude des formules trigonométriques les plus importantes : fonctions de la somme ou de la différence de deux angles ; somme ou différence de deux sinus ou de deux cosinus ; application à divers problèmes.

La seconde partie est consacrée à la *Trigonométrie sphérique*. Après avoir rappelé les propriétés des trièdres et des triangles sphériques, l'auteur établit les formules fondamentales dont il a besoin pour la résolution des triangles sphériques. Les applications, choisies surtout dans le domaine de la Géographie mathématique, donnent lieu à d'intéressants problèmes ayant pour but de familiariser l'élève avec les principaux systèmes de coordonnées sphériques adoptés en Géographie et en Astronomie. H. Fehr.

O. Pund. — **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie ;** un vol. in-8° de 345 p. : prix : 5 fr. 50 ; t. VI de la « Collection Schubert », G.-J. Goeschen, Leipzig, 1899.

Ce livre fait partie d'une collection publiée sous le nom de M. Schubert

(1) *L'Enseignement mathématique*, 1re année, p. 55-59.

et qui se propose de présenter, avec uniformité dans la méthode, l'ensemble des théories mathématiques qu'on enseigne dans nos facultés et qui doivent servir de fondement à toute bonne culture scientifique.

La Collection est tout d'abord dédiée à l'enseignement et l'auteur fait observer que ce volume pourra servir d'intermédiaire entre les manuels élémentaires d'Arithmétique et d'Algèbre et les traités d'Algèbre supérieure, tels que l'ouvrage classique de Serret et les traités plus récents de Weber et de Netto.

Toutefois l'auteur suppose bien connue la théorie des limites et toutes les questions qui se rattachent au concept de nombre et des opérations fondamentales sur les nombres, dans le sens le plus étendu que ce concept possède en Analyse.

Il a soigneusement évité toute considération d'ordre infinitésimal et il s'est efforcé d'établir les théories algébriques sur des fondements purement arithmétiques.

La logique parfaite et la méthode la plus soigneuse sont ce que l'on trouve surtout à louer dans ce livre. Les idées fondamentales sont réduites au plus petit nombre possible : on peut même dire que les concepts de groupe et de système de modules (suivant Kronecker) sont les seuls fondements de toutes les théories, soit arithmétiques, soit algébriques, qui s'y trouvent développées. La méthode suivant laquelle sont traitées les différentes questions est toujours la même : c'est un outil qui sert aussi bien pour les plus simples questions sur les nombres entiers, que pour les plus hautes questions de l'Algèbre moderne.

Dans l'ordre des matières on trouve quelques déplacements qui, au premier coup d'œil, paraîtraient peu justifiés et pourraient surprendre le lecteur. Mais ces déplacements sont la conséquence de cette stricte rigueur dans la méthode que l'auteur s'est imposée. On trouvera, par exemple dans la théorie des équations, la résolution numérique placée avant l'algébrique ; et ce sont des théorèmes sur la séparation des racines réelles, qui par une extension élégante et d'une façon purement arithmétique, conduisent au théorème de Cauchy sur le nombre des racines imaginaires contenues dans un contour fermé, et, de là, au théorème fondamental de l'Algèbre.

Le but que M. Pund s'était proposé, c'est-à-dire l'introduction méthodique des théories modernes dès le commencement de l'étude de l'Algèbre est pleinement atteint dans son livre. Il faut pourtant remarquer que l'excès de concision et l'usage continuel des symboles rendent souvent pénible et difficile la lecture de cet ouvrage. L'uniformité des méthodes retarde le développement de la matière, en sorte que si on l'introduisait dans nos écoles, on ne pourrait exiger des étudiants la possession assurée des faits mathématiques qui font partie du cours d'Algèbre et de la théorie des nombres, à moins d'appuyer la lecture par de nombreux exercices et en ayant à sa disposition un temps tout au moins double de celui que demandent les méthodes ordinaires et dont on peut ordinairement disposer.

On peut bien dire que c'est une excellente introduction à l'étude de l'Algèbre moderne : mais je pense qu'il ne serait pas prudent de fonder uniquement sur ce livre l'étude de l'Algèbre, même pour ceux qui ont en vue les nouvelles théories. Car, si les différentes questions y sont toujours traitées par la même méthode, et si cette méthode est toute puissante pour un certain genre de recherches où les autres ont échoué, on a pour chaque ques-

tion, considérée en elle-même, des moyens infiniment plus simples et naturels, que les jeunes étudiants ne peuvent se dispenser de connaître.

Il est bon enfin de noter qu'en considérant le volume comme faisant partie d'une collection qui doit embrasser tous les domaines des mathématiques, il répond bien au but de donner à ceux qui cultivent certaines branches assez éloignées de l'Arithmétique une idée bien arrêtée des méthodes nouvelles.

Pourtant il ne faut pas oublier que ce livre est coulé tout d'un bloc; on ne pourrait le partager en parties isolées; il faut l'étudier tout entier, et nos jeunes gens qui, dans les cours, ont appris l'Algèbre avec les méthodes classiques, feront très bien de l'approfondir. Pour cette même raison il ne serait peut-être pas prudent de conseiller aux praticiens, aux techniciens, aux naturalistes, à ceux enfin qui ne vivent pas dans les mathématiques, la lecture, dans ce livre, des chapitres qui pourraient les intéresser, et, à ce sujet, le livre ne paraît pas répondre parfaitement à un des desiderata de la collection Schubert.

Je donne pour terminer le titre des douze chapitres que comprend l'ouvrage afin que l'on ait une idée de l'ordre adopté et de l'ensemble des matières traitées.

I. Fonctions rationnelles. — II. Propriétés arithmétiques des fonctions rationnelles. — III. Divisibilité des nombres entiers. — IV. Congruences linéaires à une inconnue. — V. Groupes de permutations. — VI. Déterminants. — VII. Divisibilité des fonctions entières. — VIII. Congruences de degré quelconque : restes quadratiques. — IX. Résultants, discriminants, élimination. — X. Racines des équations algébriques. — XI. Méthodes d'approximation. — XII. Résolution algébrique des équations.

E. Bortolotti (Modène).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences : t. CXXX, Paris, Gauthier-Villars, 1900.

N° 23 (5 juin). — E. Picard : Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnant au dehors. — Vallier : Sur le tracé des rayons dans les bouches à feu. — Andoyer : Sur la théorie de la Lune. — C. Guichard : Sur les congruences de cercles et de sphères qui sont plusieurs fois cycliques. — Le Roy : Sur les séries divergentes. — Ed. Maillet : Sur la décomposition des groupes finis continus de transformations de Lie. — J.-W. Lindeberg : Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = f(u)$.

N° 24 (11 juin). — J. Boussinesq : Réduction de certains problèmes d'échauffement ou de refroidissement par rayonnement au cas plus simple de l'échauffement ou du refroidissement des mêmes corps par contact ; échauf-

fement d'un mur d'épaisseur indéfinie. — W. Steckloff : Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — Ed. Maillet : Sur la classe des groupes finis continus primitifs de transformations de Lie. — C. Störner : Sur les logarithmes des nombres algébriques. — H. Le Chatelier : Sur les points anguleux des courbes de stabilité.

N° 25 (18 juin). — J. Boussinesq : Problèmes de refroidissement de la croûte terrestre, traité au même point de vue que l'a fait Fourier, mais par une méthode d'intégration beaucoup plus simple. — P. Painlevé : Sur les intégrales uniformes du problème des *n* corps. — A. Demoulin : Sur la théorie générale des congruences rectilignes.

N° 26 (25 juin). — J. Boussinesq : Problème du refroidissement d'un mur par rayonnement, ramené au cas plus simple où le refrodissement aurait lieu par contact. — F. Amodeo : Courbes normales trigonales du plan. — G. Floquet : Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. — E. Mathias : Sur deux groupes remarquables de lieux géométriques.

Nouvelles Annales de mathématiques, journal des candidats aux écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, dirigé par C.-A. Laisant et X. Antomari ; 3e série, t. XVIII, 1900. Prix d'abonnement annuel : Paris, 15 fr. ; départements et union postale, 17 fr. ; autres pays, 20 fr. Gauthier-Villars.

Juin. — G. Candido : Pour la Géométrie récente. — E.-M. Lémeray : Exposition géométrique de quelques propriétés fondamentales des fonctions elliptiques de première espèce.

Mathesis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg ; 2e série, t. X, 1900. Prix d'abonnement annuel : Belgique, 7 fr. 50 ; Etranger, 9 fr. ; Gand, A. Hoste ; Paris, Gauthier-Villars.

Juillet. — J.-A. Third : Sur les triangles trihomologiques.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par MM. E. Humbert et G. Papelier ; 10e année, 1899-1900. Prix d'abonnement annuel : France, 8 fr. ; étranger, 9 fr. ; Paris, Nony.

N° 10 (juillet). — C. Grolleau : Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. — G. Fauvernier : Sur les équations du faisceau des axes d'une section centrale d'un quadrique.

N° 11 (août). — R. Gilbert : Sur les réseaux de coniques. — C. Grolleau : Note sur l'involution. — C. Grolleau : Note de Géométrie.

Bulletin de la Société mathématique de France : t. XXVIII, 1900 ; Paris, Gauthier-Villars.

Fasc. 2. — M. Hadamard : Sur l'intégrale résiduelle. — L. Autonne : Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés. — J. Beudon : Sur les changements de variable. — M. Demont : Sur les surfaces cubiques ayant un axe de symétrie ternaire et sur les surfaces cubiques possédant des points à indicatrice du troisième ordre.

Journal für reine und angewandte Mathematik, gegründet von A.-L. Crelle, herausgegeben von L. Fuchs; Reimer, Berlin.

T. CXXI. 1899. fasc. 4. — Hamburger : Ueber die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. — Fr. Kötter : Ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — P. Appell : Sur une forme générale des équations de la dynamique. — L. Koenigsberger : Ueber die Entwickelungsform algebraischer Functionen und die Irreductibilität algebraischer Gleichungen.

T. CXXII. 1900. fasc. 1. — L.-W. Thomé : Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. — E. Müller : Ein Satz ueber Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene. — Alf. Guldberg : Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen. — L. Heffter : Ueber reductible lineare Differentialgleichungen. — E. Grünfeld : Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n-ter ordnung adjungirten Differentialgleichungen. — A. Loewy : Ueber Scharen reeller quadratischer und *Hermitischer* Formen. — J. Horn : Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. — P. Muth : Ueber die Elementartheiler componirter Systeme. — E. Grünfeld : Bemerckung.

Fasc. 2. — P. Muth : Ueber alternirende Formen. — F. Gomes Teixeira : Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée. — O. Hermes : Die Formen der Vielfache. — G. Wallenberg : Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. — W. Heymann : Ueber Differential und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von *Gauss* integrirt werden können. — H.-E. Timerding : Ueber die Reduction einer quadratischen Funktion.

Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann : 31e année, 1900, Teubner, Leipzig.

F° 4 (juin). — Dr Richter : Die Entwickelung des mathematischen Unterrichts auf den preussischen Gymnasien während des neunzehnten Jahrhunderts. — *Kleinere Mitteilungen.* — J.-C.-V. Hoffmann : Ein anschaulicher Beweis des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. — H. Krüger : Ein algebraischer Satz als Folgerung aus einem stereometrischen. — Dr Forster : Ueber das geordnete Aussprechen unserer Zahlen.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, begründet durch O. Schlömilch, gegenwärtig herausgegeben von Dr R. Mehmke und Dr M. Cantor; t. 45, 1900 ; Teubner, Leipzig.

Nos 2 et 3. — H. Lorenz : Dynamik der Kurbelgetriebe (Fortsetzung). — C. Runge : Ueber die Vergleichung empirischer Formeln. — G. Huber : Ueber den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche. — O. Blumenthal : Die Bewegung der Jonen beim Zeemannschen Phänomen. — F. Fitting : Ueber eine Veralgemeinerung der Bosselsprungaufgabe. — F. Kosch : Normale und Krummungsmittelpunkt der polytropischen Kurven. — *Kleinere Mitteilungen.* K. Dohlemann : Ein Satz uber hyperboloidisch gelegene Tetraedre. — W.-Fr. Meyer : Ueber eine Eigenschaft

der Hyperbel. — J. Adamczik : Zur Konstruktion der konjugierten Durchmesser ebener Kegelschnitte.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, im Verein mit andern Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Felix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe ; t. XXIX, année 1898 (en trois fascicules) ; 1er fascicule, un vol. in 8° de IV-416 p., 1900, Georg Reimer, Berlin.

I. Geschichte und Philosophie. — II. Algebra. — III. Niedere und höhere Arithmetik. — IV. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. — V. Reihen. — VI. Differential-und Integralrechnung. — VII. Funktionentheorie.

Zeitschr. f. d. Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Brenthel und Mor. Gloser, 25e année, 1900, Alf. Hölder, Vienne.

N° 8. — Ant. Pleskot : Ueber die Rationalität der goniometrischen Funktionen.

F. Biraben. — **Pedagogia matematica**, (Extrait des « Anales de la sociedad cientifica Argentina », t. XLVIII ; Buenos-Aires, 1899.)

C'est un travail bibliographique et critique dans lequel l'auteur se propose d'attirer l'attention des géomètres de son pays sur les questions de pédagogie mathématique. L'*Enseignement mathématique* trouve une place importante dans cette étude. Nous nous empressons de remercier M. Biraben d'avoir contribué à faire connaître notre journal dans son pays.

P.-J. Möbius. — **Ueber die Anlage zur Mathematik** ; un vol. in-8°, 332 p., 51 portraits ; prix : 7 mark ; Verlag von Joh. Ambrosius Barth, Leipzig, 1900.

H. Andoyer. — **Leçons sur la Théorie des Formes** et la Géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences ; t. I, un vol. gr. in-8°, VI-508 p. ; prix : 15 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

R. Guimaraes. — **Les mathématiques en Portugal au XIXe siècle** ; aperçu historique et bibliographique ; un vol. in-4°, 167 p., Coïmbre, imprimerie de l'Université, 1900.

Paedagogisches Archiv., herausgegeben von Prof. C. Danx : 42e année, n° 7, 1900. Dürr, Leipzig.

Le Gérant : C. NAUD.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

LES MATHÉMATIQUES
AU CONGRÈS DE PHILOSOPHIE

On sait que le premier *Congrès international de Philosophie*, organisé par la *Revue de Métaphysique et de Morale*, s'est tenu à Paris du 1er au 5 août. Les promoteurs de ce *Congrès* s'étaient proposé d'affirmer l'unité de la Philosophie, et de contribuer à en restaurer l'idée véritable et traditionnelle. Pour cela, ils se sont efforcés, d'une part, de la distinguer de certaines sciences spéciales, la Psychologie et la Sociologie, avec lesquelles on la confond encore, parce que, constituées les dernières, elles se sont détachées plus tardivement que les autres « du vieux tronc philosophique » ; et d'autre part, de la rapprocher des sciences positives, surtout de celles qui, par leur certitude, leur précision et leur systématisation plus grandes, fournissent une matière plus ample et plus sûre à la réflexion critique, et permettent d'entrevoir ou de rechercher les lois générales de la nature et de l'esprit.

En conséquence, ils avaient consacré une des quatre sections du *Congrès* à la Logique et à l'Histoire des Sciences, et ils avaient convié les savants à prendre part à leurs travaux. Leur appel a été entendu, tant à l'étranger qu'en France ; de nombreux savants, et des plus illustres, ont bien voulu leur accorder leur patronage (1), et, qui plus est, leur apporter le fruit de leurs réflexions. Quelques-uns ont fait défaut au dernier moment, par

(1) Qu'il nous soit permis de citer ici avec reconnaissance les noms de MM. Berthelot, Lechalas, Olivier, Painlevé, Perrier, H. Poincaré, Ch. Richet, Jules Tannery, Paul Tannery (France) ; Georg Cantor, Moritz Cantor, Dedekind, Frege, Heckel, Klein, Ostwald, Schröder, Van't Hoff, Wiesmann (Allemagne) ; Boltzmann, Mach, Stolz (Autriche) ; Mansion (Belgique) ; Korteweg, Van der Waals (Hollande) ; Peano, Vailati (Italie) ; Vassiliet (Russie) ; Mittag-Leffler (Suède).

suite d'empêchements imprévus ; parmi ces abstentions forcées, on a particulièrement regretté celles de M. Georg Cantor (de Halle) qui avait annoncé un mémoire sur les *Nombres transfinis et la Théorie des ensembles*, et de M. Ernst Heckel (d'Iéna) qui devait exposer les *Principes de sa philosophie zoologique*.

Malgré ces absences, la section III fut celle qui compta le plus de mémoires et d'assistants (1).

Nous n'avons pas l'intention de rendre compte ici de tous les travaux de la section : les procès-verbaux officiels et complets des séances du *Congrès* ont paru déjà dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (n° de septembre) et le lecteur peut s'y reporter pour plus amples renseignements, en attendant la publication intégrale des mémoires dans le tome III de la *Bibliothèque du Congrès* (qui paraîtra cet hiver). Nous voulons seulement analyser les mémoires et résumer les discussions les plus propres à intéresser les mathématiciens et les professeurs de Mathématiques.

L'*Histoire des Sciences* (que le *Congrès* n'avait inscrite à son programme que dans la mesure où elle intéresse l'Histoire de la philosophie et en est inséparable) ne fut représentée que par trois mémoires, mais tous trois d'un grand intérêt et d'une profonde érudition. La question des *Origines du Calcul infinitésimal* a été traitée à la fois par M. Moritz Cantor (de Heidelberg), le savant historien des mathématiques, et par M. Milhaud (de Montpellier), dans un esprit tout différent, ce qui fait que les deux mémoires, loin de se répéter, se complètent à merveille l'un l'autre : M. Cantor insistant surtout sur les origines scientifiques du Calcul infinitésimal et sur la filiation historique des théories et des découvertes ; M. Milhaud s'attachant plutôt à découvrir les racines philosophiques de l'Analyse et cherchant jusque chez les philosophes et géomètres anciens la source des « idées » infinitésimales.

M. Günther, de Munich, avait envoyé un mémoire extrêmement nourri et documenté sur l'*Histoire des origines de la gravi-*

(1) Elle avait pour présidents français MM. Henri Poincaré et Jules Tannery, et pour présidents étrangers MM. Moritz Cantor, Peano et Vassilief. La présidence effective des séances fut exercée par M. J. Tannery avec son tact et sa bonne grâce coutumière.

tation, où l'on suit également les progrès parallèles et conjoints de la philosophie et de la science, et où l'on voit les savants de la Renaissance dégager peu à peu les principes de la Mécanique céleste, en luttant contre l'influence néfaste d'Aristote et contre la tradition tyrannique de la physique péripatéticienne. L'auteur rappelle en terminant que pour beaucoup de bons esprits (comme Leibniz) l'hypothèse de l'attraction était un retour aux qualités occultes de la scolastique, et constate qu'en tout cas le succès de la théorie newtonienne a fait triompher pendant plus d'un siècle les actions à distance, et a éclipsé les théories cinétiques et élastiques ébauchées par Gassend, Hobbes, Huygens, et remises en honneur de nos jours par Faraday et Maxwell.

La Logique algorithmique était fort bien représentée au *Congrès* par les mémoires de MM. Mac Coll, Johnson et Poretsky, sans compter ceux de MM. Peano et Schröder, qui, sans traiter expressément de la Logique formelle, procèdent des recherches de leurs auteurs dans ce domaine [1]. Le mémoire de M. Mac Coll (de Boulogne-sur-Mer) est un exposé sommaire de l'ensemble de son système logique, avec ses deux applications principales, qui sont, d'une part, le *Calcul des probabilités*, et, d'autre part, le *Calcul des limites des intégrales multiples* quand on y change l'ordre des intégrations. Cette dernière application recommande particulièrement le système à l'attention des mathématiciens ; c'est elle d'ailleurs qui en a été l'origine et l'occasion.

M. Johnson (de Cambridge), bien connu par ses travaux sur l'Algèbre de la Logique [2], a proposé une généralisation des *constituants* de Boole. M. Poretsky (de Gorodnia, Russie) a exposé son calcul logique, qui procède de celui de M. Schröder, mais qui se distingue par une méthode originale et un choix tout différent des formules fondamentales. Tandis que le calcul de M. Schröder est orienté tout entier (comme l'Algèbre ordinaire) vers la résolution des équations logiques, celui de

---

[1] Cf. Peano, *Formulaire de Mathématiques* et *Revue de Mathématiques*, passim. Schröder, *Algebra der Logik*, 3 vol. (Le dernier est consacré à l'*Algèbre des relations*.) Leipzig, Teubner, 1890-1895.

[2] Voir les articles de M. Johnson sur *The Logical Calculus*, ap. *Mind* 1892. Cf. Whitehead, *Universal Algebra*, Livre II.

M. Poretsky a pour but primordial la recherche de toutes les *formes* d'une égalité logique, c'est-à-dire de toutes les égalités équivalentes (sous une forme différente) ; puis celle de toutes les *conséquences* et de toutes les *causes* d'une égalité donnée. La méthode consiste dans l'énumération complète des classes du discours, et dans la détermination de celles qui sont équivalentes en vertu de l'égalité proposée. Elle aboutit à la construction d'un tableau qui comprend toutes les classes du discours rangées dans un ordre tel qu'on y lit à la fois toutes les formes, toutes les conséquences et toutes les causes de l'égalité donnée.

M. Schröder (de Karlsruhe), après avoir rappelé les propriétés caractéristiques de la notion d'ordre simple (ou linéaire) que l'Algèbre des Relations lui a permis de formuler avec cinq lettres et deux copules, expose *Une extension de l'idée d'ordre*, qu'il appelle *gradation* (*Rangstufenfolge*) et qui consiste à admettre plusieurs éléments *de même rang*. Au lieu d'une seule relation, on a à en considérer deux : la relation « de rang inférieur » (ou la relation converse « de rang supérieur ») et la relation « de même rang ». Pour montrer l'importance de ces recherches logico-mathématiques, et en même temps leur difficulté, M. Schröder fait remarquer qu'on ne sait pas encore si l'on peut affirmer que « tout ensemble donné est susceptible d'être rangé dans un ordre simple ». On sait quel est l'intérêt capital de cette question pour la théorie générale des ensembles. M. Schröder espère que l'Algèbre des relations permettra de la résoudre un jour. Ainsi cette science nouvelle forme le lien entre la Logique pure (formelle) et les Mathématiques ; elle englobe déjà en partie la théorie des ensembles (au point de vue de leur contenance et de leur exclusion) et toute la théorie des substitutions (1).

Les précédents auteurs ont apporté de précieuses contributions à ce qu'on pourrait appeler la Mathématique de la Logique ;

---

(1) Le calcul des substitutions n'est, en effet, qu'une branche de l'algèbre des relations ; ce qu'on appelle le *produit* de deux substitutions n'est autre chose que leur *produit relatif* (non commutatif) ; l'*inverse* d'une substitution (s^{-1}) est la relation *converse* de s ; enfin la substitution *identique* (qu'on désigne par 1) est la relation d'identité 1', module de la multiplication relative. (V. Schröder, *Algebra der Logik*, t. III.)

l'école italienne a donné de remarquables échantillons de ses travaux sur la Logique des Mathématiques. Quoi qu'on pense, en effet, de l'utilité ou de la commodité du symbolisme logique employé par M. Peano et ses collaborateurs à la *Revue de Mathématiques* et au *Formulaire de Mathématiques*, il faut reconnaître qu'ils ont fait faire de grands progrès à l'analyse des concepts et des principes fondamentaux des Mathématiques, et que, grâce à ce symbolisme (et surtout à la pénétration des savants qui le manient), ils sont parvenus à des résultats merveilleux de rigueur et de subtilité.

Les quatre mémoires présentés au *Congrès* par les mathématiciens italiens offrent un tableau sommaire, mais assez complet, de leurs travaux sur les principales branches des Mathématiques, et rien ne fait plus honneur à l'école italienne et à son chef, M. Peano, que cette entente spontanée de ses collaborateurs, qui ne diminue en rien leur indépendance et leur originalité individuelles.

M. Peano a exposé sa théorie des *définitions mathématiques*. Après avoir analysé, à titre d'exemple, les premières définitions de la *Géométrie* de Legendre, il remarque que toute définition suppose un ensemble de termes non définis ou antérieurement définis ; de sorte que la question de savoir si telle notion est définissable ou indéfinissable, absolument, n'a pas de sens : il faut spécifier par rapport à quel ensemble de notions considérées comme antérieures, de sorte qu'une même idée peut être définissable ou indéfinissable, suivant le rang qu'on lui assigne dans l'ordre des notions.

M. Peano formule ensuite les règles de la définition. Une définition doit être, d'abord, une égalité logique (équivalence) entre le terme (nom ou signe) à définir et une formule composée de termes définis ou admis sans définition. Une définition doit être complète, c'est-à-dire que la formule doit être intelligible par elle-même, sans aucune addition ni explication verbale. Enfin elle doit être homogène, c'est-à-dire que les deux membres doivent contenir les mêmes lettres variables. Par exemple, l'égalité :

$$a = a - a$$

n'est pas une définition complète, parce qu'il faut dire ce qu'est a. La proposition complète :

« $0 = a - a$, a étant un nombre quelconque »

n'est pas une définition homogène, car il entre au second membre la lettre variable a qui ne figure pas dans le premier. Il faut dire :

« $0 =$ la valeur constante de l'expression $(a - a)$, quel que soit le nombre a. »

Dans cette proposition, la lettre a est une variable apparente, car le second membre en est en réalité indépendant.

Pour montrer la nécessité de l'homogénéité des définitions, M. Peano critique la manière dont on définit d'ordinaire les opérations sur les fractions. Quand on définit la somme de deux fractions par la formule suivante :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

on viole la règle de l'homogénéité, attendu que le premier membre est une fonction des deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, tandis que le second est une fonction de leurs termes a, b, c, d.

La méconnaissance de cette règle peut conduire à des absurdités ; en effet, supposons que l'addition des fractions soit définie par la formule suivante (analogue à la formule de multiplication) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

et appliquons-la à deux *valeurs* différentes de la même fraction ; on trouvera d'une part :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{6}{8}$$

et d'autre part :

$$\frac{4}{6} + \frac{4}{5} = \frac{8}{11}$$

résultats différents, donc contradictoires, étant donnée l'égalité des premiers membres.

Dans son mémoire *Sur les différentes méthodes logiques pour définir le nombre entier*, M. Burali-Forti expose une théorie

générale des définitions mathématiques, qu'il divise en trois classes : 1° les *définitions nominales* (celles que M. Peano a définies ci-dessus) qui consistent à égaler un symbole nouveau à une expression composée de symboles déjà connus ; 2° les *définitions par postulats*, qui consistent à caractériser un groupe d'idées par les relations fondamentales qui les unissent ; 3° les *définitions par abstraction*, qui consistent à définir une fonction f (dans un certain domaine) en indiquant dans quels cas on a :

$$fx = fy.$$

Cette dernière forme de définition est fréquemment employée, à savoir toutes les fois qu'on ne définit pas une grandeur en elle-même, mais seulement l'égalité de deux grandeurs de même espèce (ex. : la masse, la température). C'est à cette classe qu'appartient la définition du nombre entier, ou plutôt de l'égalité de deux nombres entiers, par l'*équivalence* (*Gleichzahligkeit*) de deux ensembles [1]. On peut définir par postulats le nombre entier en posant comme axiomes les cinq propriétés caractéristiques de l'ensemble des nombres entiers, comprenant le principe d'induction complète [2]. M. Burali-Forti préfère la *définition nominale* du nombre entier, qu'il obtient en partant de la notion de *grandeur homogène* (par rapport à l'addition) et d'où il déduit les cinq propriétés fondamentales qui constituent la définition par postulats [3].

M. Padoa a présenté un *Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers*, précédé d'une *Introduction logique à une théorie déductive quelconque*, qui résume d'une manière lumineuse la logique de l'école italienne. Une théorie déductive est un enchaînement de propositions formelles portant sur un système de symboles non définis et reposant sur un système de principes non démontrés, de sorte que la valeur logique d'une telle théorie est

---

(1) Définition qui nous paraît d'ailleurs former un cercle vicieux. Cf. *De l'infini mathématique*, 2e partie, livre I, ch. III, et *Sur une définition logique du nombre*, ap. *Revue de Métaphysique et de Morale* de janvier 1900.

(2) Voir *Formulaire de Mathématiques* de M. Peano, t. II, n° 3, § 20, 1899.

(3) Voir Burali-Forti, *Les propriétés formales des opérations algébriques*, ch. II, § 1, ap. *Revue de Mathématiques*, t. VI. (Turin, Bocca, 1899).

absolument indépendante du sens de ces symboles et de la vérité de ces principes, en un mot de l'*interprétation* concrète qu'on peut donner de la théorie. Voici les conditions de la perfection logique d'une théorie déductive. Le système des principes non démontrés sera *irréductible*, s'il n'est pas possible de déduire l'un d'eux de l'ensemble des autres. On reconnaîtra cette irréductibilité en imaginant, pour chacun de ces principes, une interprétation qui ne le vérifie pas tout en vérifiant tous les autres. D'autre part, le système des symboles non définis sera *irréductible* par rapport au système des principes, lorsque de celui-ci il est impossible de déduire la définition de l'un quelconque de ces symboles au moyen des autres. On prouvera cette irréductibilité en inventant, pour chacun des symboles non définis, deux interprétations différentes qui, jointes à une même interprétation de tous les autres symboles, vérifient également le système des principes. La théorie algébrique (c'est-à-dire formaliste et symboliste) des nombres entiers qualifiés (1) repose tout entière sur un système de trois symboles non définis qui peuvent s'énoncer : *entier*, *successif de*, *symétrique de*, et sur un système de sept principes, qui comprennent le principe d'induction complète ; les deux systèmes étant *irréductibles* au sens qui vient d'être défini.

M. Pieri a appliqué ces principes et cet esprit à l'étude de *la Géométrie envisagée comme un système purement logique*. Pour lui, l'idéal de la géométrie est de se vider de tout contenu empirique et intuitif, et de devenir un système *hypothético-déductif* du type défini par M. Padoa. M. Peano a déjà réduit le système des idées fondamentales (ou plutôt des symboles non définis) à trois : le *point*, le *segment* et le *mouvement*. M. Pieri entreprend de les ramener à deux : le *point* et le *mouvement*, en définissant le segment par le mouvement ; et il s'efforce de restreindre au mini-

(1) Nous prenons la liberté d'employer et de proposer l'épithète de *qualifié* pour désigner brièvement l'ensemble des nombres positifs, négatifs et nul. La locution de *nombre algebrique*, qu'on emploie quelquefois en ce sens dans l'enseignement élémentaire, est vicieuse pour plusieurs raisons : d'abord parce qu'elle correspond à une conception tout à fait fausse de l'algèbre (les nombres négatifs ne sont nullement propres à l'algèbre); ensuite parce qu'elle engendre une confusion intolérable avec ce qu'on appelle proprement les *nombres algebriques* (racines d'équations entières à coefficients entiers).

mum la part du mouvement en le réduisant à une relation entre quatre points (congruence des deux couples AB, CD) et même entre trois (congruence des deux couples AB, AC). Les trois idées fondamentales se trouvent définies par les vingt postulats que M. Pieri énumère et qui constituent les principes logiques de la géométrie.

A ces importantes contributions de l'école italienne, il convient de joindre le mémoire de M. Vailati (de Syracuse) sur *les difficultés qui s'opposent à une classification rationnelle des sciences*. Nous ne pouvons que signaler ici ceux de M. Vassilief (de Kasan) sur *les principes du calcul des probabilités* ; de M. Mac Farlane (de l'Université de Pensylvanie), sur *les idées et principes du calcul géométrique* (quaternions et analyse des vecteurs) ; de M. Lechalas (de Rouen), sur la *comparabilité des divers espaces* (euclidien et non-euclidiens), et de M. Russell (de Cambridge) sur *l'idée d'ordre et la position absolue* (où l'auteur soutient la thèse paradoxale de l'espace et du temps *absolus*). Mentionnons également les ingénieuses remarques de M. Hadamard sur l'*induction en mathématiques* (« non seulement il n'y a pas de raison pour que la généralisation réussisse, mais il y a souvent des raisons pour qu'elle ne réussisse pas ») et les mémoires de M. Kozlowski (de Craeovie) sur *la combinaison chimique* ; de M. Wald (de Kladno, Bohême), *Etude critique sur les principaux concepts fondamentaux de la Chimie* ; enfin de M. Houssay sur *les théories atomiques en biologie*, et arrivons au mémoire de M. Henri Poincaré, sur *les principes de la Mécanique*, et à l'intéressante discussion à laquelle il a donné lieu.

Nos lecteurs connaissent déjà les théories philosophiques de M. Poincaré ; il nous suffira donc d'indiquer brièvement les idées essentielles de son mémoire. Analysant tour à tour le *principe d'inertie*, la *loi de l'accélération*, le *principe de la réaction* (égale à l'action), le *principe du mouvement relatif* et le *principe de la conservation de l'énergie* [1], M. Poincaré conclut que tous ces principes constituent, soit des définitions du temps, de la force,

[1] M. Poincaré n'admet pas le *principe de l'indépendance des effets des forces*, comme il a eu l'occasion de le déclarer en discutant avec M. Hadamard. Soit un morceau de fer en présence d'un aimant et d'un autre morceau de fer : l'action qu'il éprouve n'est pas la somme géométrique des actions qu'exerceraient séparément sur lui l'aimant, d'une part, et le morceau de fer, d'autre part.

de la masse, soit des axiomes ou postulats : ces postulats ne sont pas des vérités *a priori*, parce qu'ils ne lui paraissent pas s'imposer d'une manière nécessaire ; et ils ne sont pas non plus des vérités empiriques, car ils sont invérifiables à la rigueur ; ils sont *à peu près* vrais pour des systèmes mécaniques *à peu près* isolés, mais on ne peut affirmer qu'ils soient absolument vrais pour des systèmes absolument isolés, non seulement parce que de tels systèmes sont irréalisables, mais parce que les postulats n'ont plus de sens pour de tels systèmes. On ne peut donc même pas dire qu'ils soient vérifiés approximativement (comme la plupart des lois physiques). En somme, ce sont des conventions, non pas arbitraires, mais commodes, c'est-à-dire appropriées et adaptées à l'expérience. Mais le jour où quelque fait viendrait les contredire, on pourrait toujours le concilier avec les principes au moyen d'hypothèses complémentaires. Ainsi l'expérience a pu suggérer ces principes, mais elle ne pourra jamais les démentir et les ruiner.

M. Painlevé a fait alors ressortir le caractère artificiel et arbitraire que prennent dans cette théorie les principes de la Mécanique. Sans doute, en cas de désaccord entre les principes et les faits, on peut toujours combler l'écart par des hypothèses complémentaires : mais il est fort remarquable que les faits nouveaux qu'on découvre ou qu'on invente ainsi (faits électriques, magnétiques, etc.) se prêtent à leur tour à une théorie scientifique, se soumettent au principe de causalité et à des lois générales et simples, en un mot apparaissent comme des phénomènes *vrais* et non comme des fictions. On pourrait dire aussi que la loi de Newton est une convention et la remplacer par une autre loi d'attraction (par exemple proportionnelle à la distance), quitte à corriger la divergence par des hypothèses auxiliaires ; mais on s'engagerait par là dans des complications inextricables, d'où l'on ne pourrait dégager aucune loi simple. Cela prouve que si la loi de Newton est une convention, c'est une convention de choix, qui cadre mieux que toute autre avec les faits. En somme, toute la physique est une méthode d'approximations successives : la *convergence* de cette méthode n'est nullement nécessaire *a priori ;* l'accord croissant de nos hypothèses avec les faits prouve (ou constitue) leur vérité ; la *divergence* et la complication croissante des hypothèses sont un signe de fausseté. Les principes de la

Mécanique sont donc vrais, en ce sens qu'ils sont les lois les plus générales du monde physique, imposées et sans cesse vérifiées par l'expérience.

M. Hadamard objecte d'autre part que si l'expérience ne peut pas vérifier séparément tel ou tel principe, parce que sa vérité dépend des autres principes admis à titre d'hypothèses, elle vérifie néanmoins l'ensemble des principes, conçu comme une hypothèse unique et totale.

M. Poincaré reconnaît la justesse de cette remarque pour ce qui est des lois physiques : chaque expérience (ou série d'expériences) fournit en quelque sorte *une* équation entre plusieurs inconnues, de sorte qu'il faut un système d'équations pour déterminer le système des inconnues. Mais il en va autrement pour les principes de la Mécanique et de la Géométrie. Non seulement l'expérience ne nous donne pas assez d'équations pour les déterminer, mais il est absurde de supposer qu'elle puisse jamais nous les donner, et cela parce que les « inconnues » entrent pour ainsi dire dans les problèmes expérimentaux à titre de variables auxiliaires et surérogatoires. Par suite, les hypothèses qu'on peut faire à leur sujet ne sont ni vraies ni fausses.

La même question a été traitée, à un point de vue plutôt didactique que critique, par M. Bloxdlot de Nancy, dans son *Exposé des principes de la Mécanique*, inspiré des idées de Kirchhoff et de Mach, dont l'idée maîtresse est la distinction de la Mécanique « rationnelle », construction idéale, et de la Mécanique empirique et positive, à laquelle la première est destinée à s'appliquer moyennant le choix d'un système de repères et d'une horloge convenables.

C'est encore un problème analogue qu'a traité M. Le Verrier de Paris, en exposant *la genèse et la portée des principes de la thermo-dynamique*. D'une part, il considère ces principes comme des définitions des unités thermiques (quantité de chaleur, température absolue), par rapport aux unités mécaniques, définitions qui deviendraient inutiles le jour où l'on connaîtrait les relations réelles entre les phénomènes thermiques et mécaniques, car ce jour-là les unités thermiques se réduiraient aux unités mécaniques. D'autre part, ces principes apparaissent comme des lois expérimentales approximativement vérifiées ; en réalité, ce sont

des lois idéales et *a priori*, qui reposent sur des abstractions irréalisables, mais qui n'en ont pas moins une valeur objective dans la mesure où les faits se rapprochent de ces abstractions (gaz parfaits, phénomènes réversibles, transformations adiabatiques).

On le voit : c'est une question essentiellement philosophique qu'ont agitée les savants que nous venons de nommer ; c'est même la question capitale de la philosophie des sciences et de la théorie de la connaissance : il s'agit toujours de savoir quel est le rapport des mathématiques et de la physique, ou des mathématiques pures et des mathématiques appliquées, de la raison et de l'expérience, de l'idée et du fait ; en un mot, il s'agit de la valeur objective de la science rationnelle. Le fait que des savants de profession ont posé et discuté cette question en vrais philosophes a justifié l'initiative des organisateurs du *Congrès* et réalisé toutes leurs espérances.

Le succès du *Congrès* en général et de la section III en particulier a fait prendre la résolution de le renouveler dans quelques années. Dans la séance de clôture, M. Vassilief a exprimé avec l'approbation unanime le vœu qu'on mît à l'ordre du jour du prochain *Congrès* un petit nombre de questions (par exemple la philosophie de la géométrie) sur lesquelles se concentreraient les travaux et les discussions ; on devrait faire de chacune de ces questions une revue générale qui en exposerait l'état présent et en dresser une bibliographie complète. La commission permanente chargée d'organiser le prochain *Congrès* tiendra certainement compte de ces vœux. Nous espérons que, pour la section III en particulier, l'intérêt des communications que nous venons de résumer stimulera l'émulation des savants, et qu'ils viendront plus nombreux encore au prochain *Congrès de Philosophie*.

Louis Couturat (Paris).

P.-S. — Dans une autre section du *Congrès* a été soulevée une importante question qui intéresse également les mathématiciens et les philosophes : c'est celle de la création d'une langue internationale unique pour faciliter les relations entre les savants de tous les pays civilisés, la publication de leurs travaux et la diffu-

sion de leurs idées. Le *Congrès de Philosophie* a émis un vœu en faveur « de l'unité du langage philosophique » et a élu le signataire de ces lignes comme délégué en vue de l'adoption d'une langue universelle [1]. On sait qu'un vœu analogue, présenté par M. Leau et chaudement appuyé par M. Laisant et plusieurs autres membres, a eu moins de succès au *Congrès des mathématiciens*. Dans la discussion à laquelle il a donné lieu, nous avions invoqué en sa faveur l'autorité de Leibniz. On nous a répondu que la langue universelle rêvée par Leibniz ne faisait qu'un avec sa caractéristique ou son *Calculus ratiocinator*, et que par suite son projet se trouvait véritablement réalisé, soit par l'*Algèbre de la Logique* de M. Schröder, soit par le *Formulaire de Mathématiques* de M. Peano.

Nous pouvons affirmer, après avoir consulté à Hanovre les manuscrits inédits de Leibniz, que c'est là une erreur complète. On y trouve en effet, à côté de nombreux essais de calcul logique, des projets très développés et très détaillés de langue universelle et de grammaire rationnelle, absolument distincts du susdit calcul [2]. Il s'agit si bien d'une *langue* proprement dite, à la fois *parlée* et *écrite*, et non d'un symbolisme ou d'un algorithme, que Leibniz a rédigé des opuscules entiers sur l'usage des particules et des flexions, sur la construction des prépositions, des conjonctions, des pronoms, etc., etc. [3]. Nous en publierons bientôt quelques extraits dans nos *Fragments inédits de Leibniz relatifs à la Logique*. On y trouvera des idées intéressantes et curieuses sur la constitution d'une langue rationnelle [4] dont beaucoup sont déjà réalisées, soit dans l'*Esperanto*, soit dans la *Langue Bleue* de M. Léon Bollack (par exemple : les prépositions dispensent des cas, et les conjonctions dispensent des modes). Les projets de langue universelle peuvent donc se réclamer de l'autorité de Leibniz [comme de celle de Descartes] [5], aussi bien que

---

(1) Cf. Leau, *Une langue universelle est-elle possible?* 1 brochure, 13 p. Gauthier-Villars, 1900.

(2) Par exemple, on lit dans le *Linguæ philosophicæ specimen in geometria edendum*, daté de janvier 1680 : « Nihil autem calculi hic miscebo. »

(3) Voir Bodemann, *Die Leibniz-Handschriften*, Phil. VII, B, III, 76 feuilles.

(4) Cf. le fragment *Lingua rationalis*, ap. *Phil. Schr.*, éd. Gerhardt, t. VII, p. 38.

(5) *Lettre à Mersenne* du 20 novembre 1629. (Éd. Clerselier, t. I, n° 111, p. 198 ; éd. Adam-Tannery, t. I, p. 76.)

les systèmes de logique algorithmique ; les uns et les autres sont d'ailleurs parfaitement compatibles, attendu qu'ils sont radicalement différents en principe et ne sauraient en aucune manière se remplacer. L. C.

SUR LES POLYGONES DE PONCELET

La recherche des conditions que doivent remplir deux coniques pour qu'on puisse inscrire dans l'une un polygone circonscrit à l'autre, est une question bien connue : elle se résume dans le théorème suivant, énoncé par Poncelet : *s'il existe un polygone de* m *côtés inscrit dans une conique O et circonscrit à une autre* Γ, *il en existe une infinité d'autres du même nombre de côtés.* Beaucoup de problèmes qui se rattachent à cette proposition ont été résolus par des méthodes variées et il est par conséquent utile, et d'un incontestable intérêt, au point de vue de l'enseignement surtout, d'envisager la question dans son ensemble : c'est ce que je me suis proposé de faire, en suivant un beau chapitre d'Halphen sur le sujet (¹). Je diviserai cet exposé en deux parties : l'une, toute élémentaire qui ramène en somme le problème à ses éléments les plus simples, la seconde qui le rattache à la théorie des fonctions elliptiques, et qui suppose la connaisssnce des fondements de cette théorie.

I

Relation biquadratique symétrique entre deux variables. — Les deux sommets situés sur un côté d'un polygone inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre conique Γ sont deux points M et M′ de la conique C qui se correspondent sur cette ligne par la condition que la droite qui les joint soit tangente à Γ. On peut de cette manière faire correspondre à tout point M de C, deux

(¹) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, ch. x.

autres points M′ et M″ de cette conique situés sur les tangentes à Γ qui sont issues de M : d'ailleurs, au point M′ de C, correspondront de cette manière deux points de C dont l'un sera M. Supposons alors que les points de C, qui est unicursale, soient déterminés individuellement en fonction rationnelle d'un paramètre, de sorte que les coordonnées homogènes de chacun d'eux sont proportionnelles à des polynômes quadratiques par rapport à ce paramètre : les paramètres x et y de deux points correspondants M et M′ seront liés par une relation *biquadratique symétrique* qui pourra s'écrire :

$$(1)\qquad Ax^2y^2 + Bxy(x+y) + C(x^2+y^2) + Dxy + E(x+y) + F = 0$$

ou encore :

$$y^2(Ax^2 + Bx + C) + y(Bx^2 + Dx + E) + Cx^2 + Ex + F \equiv Py^2 + Qy + R = 0.$$

(Les coefficients des termes semblables des polynômes entiers en x, P, Q et R, forment un déterminant symétrique.)

Réciproquement, toute relation de la forme (1) peut être interprétée comme établissant entre deux points M et M′ de C, de paramètres x et y, une correspondance telle que la droite qui les joint soit tangente à une conique fixe Γ : car cette relation revient à une relation quadratique entre $x+y$ et xy, et par conséquent équivaut à une relation quadratique homogène entre les coordonnées homogènes u, v, w de la droite MM′, qui sont, comme on sait, proportionnelles à des fonctions linéaires de $x+y$ et xy. (La conique Γ peut, bien entendu, dégénérer en une variété tangentielle formée de deux points, distincts ou confondus.)

Observons d'ailleurs que cette correspondance entre M et M′ revient à la suivante : les deux points M et M′ sont conjugués par rapport à la conique C_1, telle que Γ soit la conique *covariante* de C et de C_1, enveloppe des cordes que ces deux coniques divisent harmoniquement : il est bien facile de déduire de la relation (1) l'équation de C_1. De là résulte la corrélation entre le problème des polygones de Poncelet et celui des polygones inscrits dans une conique C et *conjugués* par rapport à une autre C_1 : l'étude du premier problème équivaut à celle du second.

Remarquons enfin que la correspondance que nous établissons entre deux points M et M′ de C peut être remplacée par celle des

deux tangentes à Γ issues d'un même point de C : dans la suite nous emploierons seulement la première.

Généralisation. — Plus généralement, la relation fondamentale (I) établit entre deux points M et M′ d'une courbe *unicursale quelconque* U, définis individuellement, l'un par le paramètre x, l'autre par y, une correspondance telle qu'au point M en correspond deux autres M′ et M″, et qu'à M′ en correspondent deux *dont l'un est* M. Il s'en suit que la relation (I) peut être regardée comme définissant une famille de lignes polygonales inscrites dans U : car partons d'un point M_0 quelconque de U comme sommet initial de la ligne brisée ; le sommet suivant sera un des points que lui fait correspondre la relation (I), soit M_1 ; alors le troisième sommet sera déterminé sans ambiguïté : ce sera le correspondant de M, *autre que* M_0, et ainsi de suite. Nous allons maintenant adopter cette interprétation de la relation (I).

Correspondance entre les extrémités des lignes brisées de m *côtés.* — Au sommet initial M_0 choisi pour une ligne brisée inscrite de m côtés, correspondront sur U deux extrémités possibles E′ et E″ pour cette ligne, suivant le choix du second sommet. Réciproquement, à l'extrémité E′ correspondront les deux sommets initiaux possibles dont l'un sera M_0. Donc le paramètre x de M_0 et le paramètre z de l'extrémité doivent être liés par une relation de la forme (I), soit $F(x, z) = 0$, biquadratique et symétrique en x et z.

Il est clair qu'on pourrait former cette relation de proche en proche, car la relation (I) permet évidemment d'exprimer rationnellement par rapport aux paramètres x et y des deux premiers sommets, ceux de tous les sommets suivants.

Lignes brisées repliées. — La relation (I) fait correspondre à x deux valeurs y' et y'' de y, *généralement* distinctes de x et distinctes entre elles. Il y a exception pour les valeurs de x telles que $y' = y''$; elles sont les racines (finies ou infinies) de l'équation (du quatrième degré en général) : $Q^2 - 4PR = 0$. Il y a également exception pour les valeurs de x telles qu'une valeur correspondante y' de y soit égale à x ; ces valeurs de x sont les racines de l'équation du quatrième degré obtenue en faisant dans (I) $y = x$. Appelons S^i $(i = 1, 2, 3, 4)$ les quatre points

de U qui correspondent aux valeurs de x telles que $y = y''$ et T_i ceux qui correspondent aux paramètres x tels que $y' = x$. Si dans le tracé d'une ligne brisée inscrite, nous arrivons en un point S_i comme sommet, la ligne ne pourra se continuer au delà de ce point qu'en se *repliant* sur elle-même et le sommet qui suivra S_i se confondra avec le précédent. Si nous arrivons en un point, T_i, en supposant que le sommet précédent corresponde à la valeur de y qui diffère du paramètre x du point T_i, le sommet suivant sera confondu avec T_i et le côté correspondant sera la tangente à U au point T_i considéré ; puis la ligne ne pourra se continuer qu'en se *repliant* sur elle-même.

Polygones inscrits de m *côtés.* — La relation (1) peut-elle déterminer des lignes brisées *fermées* d'un nombre donné m de côtés, inscrites dans U ? Pour cela, il faut que le $(m+1)^{ème}$ sommet obtenu par la construction indiquée coïncide avec le premier. Or le paramètre x du premier sommet et celui z du $(m+1)^{ème}$ sont liés par une relation biquadratique symétrique $F(x, z) = 0$. Le paramètre x devra donc être une des quatre racines (finies ou non) de l'équation de *fermeture* : $F(x, x) = 0$: d'où *généralement quatre* solutions. Elles sont faciles à prévoir : supposons d'abord m pair, soit $m = 2n$; partons d'un point S_i comme sommet initial et construisons le $(n+1)^{ème}$ sommet P_i qui en résulte sans ambiguïté ; une des lignes brisées inscrites de sommet initial P_i sera formée d'abord de celle qu'on vient de construire pour obtenir P_i : S_i sera son $(n+1)^{ème}$ sommet et elle ne pourra se continuer au delà qu'en se repliant sur elle-même pour revenir à P_i comme $(m+1)^{ème}$ sommet : on aura alors construit une ligne brisée fermée répondant à la question. Soit au contraire m impair, égal à $2n+1$: partons d'un point T_i, prenons un premier côté non tangent à U et allons jusqu'au $n^{ème}$ sommet Q_i : une ligne brisée d'origine Q_i, formée d'abord de celle qu'on vient de parcourir, arrivée en T_i comme $n^{ème}$ sommet s'y repliera, en se continuant par la tangente en T_i et en revenant à Q_i comme $(m+1)^{ème}$ sommet.

Comme il y a quatre points S_i et quatre points T_i, on a donc ainsi les seules solutions de la question dans le cas général, et ce ne sont pas des polygones proprement dits.

Théorème de Poncelet. — Il résulte de là que *si la relation* (1) *détermine un polygone proprement dit de* m *côtés inscrit dans* V, *elle en détermine une infinité de ce même nombre de côtés, et l'on peut prendre un sommet de l'un d'entre eux en un point quelconque de la courbe.* En effet l'équation $F(x, x) = 0$ doit être vérifiée *identiquement.*

Application aux coniques. — Supposons que la courbe unicursale U soit une conique C : les lignes brisées correspondantes à (1) et inscrites dans C seront, comme on l'a vu, circonscrites à une conique fixe Γ. Les points S_i seront les points de C d'où les tangentes menées à Γ seront confondues : ce sont donc les *points communs* aux deux coniques C et Γ. Les points T_i seront les points de C d'où une des tangentes menées à Γ sera aussi tangente à C : ce seront donc les *points de contact avec* C *des tangentes communes à* C *et à* Γ. S'il existe *un* polygone de m côtés inscrit dans C, circonscrit à Γ, et *autre que les quatre solutions repliées du cas général*, il y en aura une *infinité*. Lorsque m ne dépasse pas 5, on peut toujours construire une conique Γ inscrite dans un polygone quelconque de m côtés inscrit dans C ; d'une manière générale, quel que soit m, pour que le théorème de Poncelet soit applicable aux coniques C et Γ, il faut et il suffit qu'on puisse inscrire dans C et circonscrire à Γ une ligne brisée fermée de m côtés commençant en un point de C *autre* que les points P_i ou Q_i trouvés ci-dessus, par exemple en l'un des points S_i ou T_i. *Exemple :* je joins deux points A et B de C et je mène la tangente BT à C au point B. Si je construis une conique Γ tangente à AB en A et à BT en un point arbitraire, il y aura une infinité de triangles inscrits dans C et circonscrits à Γ, à cause de l'existence du triangle particulier dont les côtés sont AB, BT, BA, suivis successivement en *partant de* A.

II

Équation d'Euler(1). — Les variables x et y liées par la relation (1) satisfont à l'équation différentielle obtenue de la façon suivante :

(1) Voir Lacour, *N. A. de Mathématiques*, 1899, p. 293.

On a en différentiant (I) et en désignant par P_1, Q_1, R_1 les polynômes obtenus en remplaçant x par y dans P, Q, R :

$$(2Py + Q)\,dy + (2P_1x + Q_1)dx = 0;$$

Mais en vertu de (I) on a :

$$2Py + Q = \pm\sqrt{Q^2 - 4PR} = \pm\sqrt{X}$$

en désignant par X le polynôme biquadratique $Q^2 - 4PR$ (qui peut s'abaisser à un degré moindre, une de ses racines au moins devenant infinie). Si j'appelle Y ce que devient X par la permutation de y et de x, je vois que x et y variant, ils demeurent liés par l'équation :

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \pm\frac{dy}{\sqrt{Y}}. \tag{II}$$

On appelle *équation différentielle d'Euler* toute équation de cette forme, dans laquelle X est le polynôme général du quatrième degré en x, et Y le même polynôme en Y, soit par exemple :

$$X = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4.$$

Réciproquement, toute équation d'Euler (II) *s'intègre à l'aide d'une relation algébrique* (I) *entre* x *et* y. — Il suffit de choisir les polynômes P, Q, R de la relation (I) de sorte que l'on ait identiquement : $Q^2 - 4PR = X$. Or, interprétons l'équation (I) comme une correspondance entre deux points d'une conique C situés sur la même tangente à une autre conique Γ :

Si je me donne C arbitrairement, je devrai choisir Γ de telle sorte que les quatre point S_i communs à Γ et C soient précisément ceux dont les paramètres x sont les racines de $X = 0$.

La question se réduit alors à construire une conique particulière D passant par ces quatre points, que le polynôme X détermine sur C.

Si je représente par $C = 0$ et $D = 0$ les équations des coniques C et D, la conique Γ sera une quelconque de celles du faisceau linéaire ponctuel :

$$D + \lambda C = 0$$

et l'arbitraire λ jouera le rôle de la constante d'intégration, dans

l'intégrale générale obtenue en écrivant la condition qui exprime que la corde MM′ joignant les points de paramètres x et y sur C, est tangente à Γ.

D'ailleurs il est facile d'avoir une conique particulière D du faisceau linéaire : car je puis rapporter la conique C à un triangle de référence $\alpha = 0$ $\beta = 0$ $\gamma = 0$ tel que son équation par rapport à ce triangle soit :

$$C \equiv \beta^2 - \alpha\gamma = 0.$$

Les coordonnées homogènes α, β, γ d'un point courant M de C seront alors définies en fonction du paramètre x par :

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{1}.$$

Par suite si l'on considère la conique d'équation :

$$D = a_0\alpha^2 + a_1\alpha\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta\gamma + a_4\gamma^2 = 0$$

il est évident que les paramètres x de ses points communs avec C seront les racines de $X = 0$: d'où immédiatement l'intégrale générale algébrique de l'équation d'Euler.

Représentation elliptique de la correspondance (1). — Dans l'équation (II), les variables étant séparées, on peut aussi intégrer directement par quadrature des deux membres. Pour cela on devra (dans le cas général), recourir aux *fonctions elliptiques :* on sait (1) construire une fonction elliptique bipolaire $F(u)$ d'une variable u vérifiant l'équation différentielle :

$$\left[\frac{dF(u)}{du}\right]^2 = a_0F^4 + a_1F^3 + a_2F^2 + a_3F + a_4$$

(en supprimant, pour simplifier l'écriture, l'argument u au second membre). Les périodes 2ω et $2\omega'$ de $F(u)$ seront déterminées en fonction des coefficients a du polynôme X. Si dans l'équation (II) on pose alors

$$x = F(u),\ y = F(v).$$

elle deviendra :

$$du \pm dv = 0 \quad \text{d'où} \quad u \pm v = \text{constante}.$$

(1) Voir par exemple Appell et Lacour, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques*, p. 251.

D'ailleurs on sait qu'en appelant s la somme des pôles de $F(u)$ on a, quel que soit v : $F(s-v)=F(v)$; par suite un seul signe suffit devant v dans l'intégrale générale, qu'on peut dès lors écrire :

$$v=u+\mathfrak{V}$$

$\mathfrak{V}$ désignant une constante arbitraire. Ainsi, en posant $x=F(u)$ dans toute relation (I) engendrant l'équation (II), les deux valeurs correspondantes de y seront de la forme $y'=F(u+\mathfrak{V}')$ et $y''=F(u+\mathfrak{V}'')$, $\mathfrak{V}'$ et $\mathfrak{V}''$ désignant deux quantités indépendantes de u et convenablement choisies ; d'ailleurs si l'on remplace u par $u+\mathfrak{V}'$, les valeurs correspndantes à y' seront par suite $F(u+2\mathfrak{V}')$ et $F(u+\mathfrak{V}'+\mathfrak{V}'')$; l'une d'elles doit être x : en général ce sera la seconde en sorte que l'on peut toujours supposer $\mathfrak{V}'+\mathfrak{V}''=0$.

Ainsi à toute relation (I) *correspondent une fonction elliptique* $F(u)$ *et une constante* $\mathfrak{V}$, *telles que si l'on y pose :* $x=F(u)$, *les deux valeurs correspondantes de* y *sont* $F(u+\mathfrak{V})$ *et* $F(u-\mathfrak{V})$.

Remarquons que ce théorème revient au *théorème d'addition* de la fonction elliptique $F(u)$.

Application aux lignes brisées inscrites dans une unicursale. — Si nous inscrivons dans une ligne unicursale U une ligne brisée déterminée par la relation (I), quand nous aurons construit la fonction $F(u)$ et calculé la constante $\mathfrak{V}$ correspondante, nous pourrons déterminer les paramètres x des sommets successifs par des arguments u en progression arithmétique de raison $\mathfrak{V}$, soit u, $u+\mathfrak{V}$, $u+2\mathfrak{V}\ldots u+m\mathfrak{V}\ldots$ Par suite, la corde qui ferme la ligne brisé inscrite de m côtés joindra les points d'argument u et $u+(m-1)\mathfrak{V}$: quand u varie, c'est-à-dire quand on change de ligne brisée, les extrémités seront liées par la relation biquadratique symétrique entre $F(u)$ et $F[u+(m-1)\mathfrak{V}]$, qui correspondra par conséquent à la même équation d'Euler obtenue par élimination de la constante $(m-1)\mathfrak{V}$ que la relation (I) : elle ne différera donc de cette relation (I) que par la constante d'intégration. D'où ce théorème particulier au cas où U est une conique C : *Si un polygone de* m *côtés est inscrit dans une conique* C *et si* m − 1 *de ses côtés restent tangents à une conique fixe* Γ, *le* $m^{ième}$

côté enveloppe une conique appartenant au même faisceau linéaire ponctuel que C *et* Γ.

Enfin la *condition de fermeture* de la ligne brisée inscrite de m côtés sera : $F(u+m\mathfrak{S}) = F(u)$, d'où, en appelant s la somme des pôles de $F(u)$:

$$u + m\mathfrak{S} \equiv u \quad \text{ou} \quad u + m\mathfrak{S} \equiv s - u \ (\text{mod. } 2\omega, 2\omega').$$

La première équation est vérifiée, *quel que soit* u, pourvu que $m\mathfrak{S} \equiv 0$: le théorème de Poncelet est alors applicable.

La seconde au contraire détermine le sommet d'argument u par la relation :

$$2u = s - m\mathfrak{S} + 2k\omega + 2k'\omega'.$$

K et K′ étant deux entiers arbitraires ; on peut dès lors réduire tout argument u qui y satisfait à l'une des quatre valeurs :

$$\frac{s - m\mathfrak{S}}{2}, \quad \frac{s - m\mathfrak{S}}{2} + \omega, \quad \frac{s - m\mathfrak{S}}{2} + \omega', \quad \frac{s - m\mathfrak{S}}{2} + \omega + \omega'.$$

Ce sont les arguments des sommets initiaux des quatre lignes brisées repliées qui sont, en général, les seules solutions de la question.

Ainsi la condition de fermeture de toute ligne brisée inscrite de m *côtés est :*

$$m\mathfrak{S} \equiv 0.$$

Réduction à une forme canonique. — Il est commode de ramener la relation (I) à une forme telle que le polygone X correspondant, dans l'équation d'Euler (II), ait une des formes canoniques de Weierstrass ou de Legendre. On sait que la réduction de X à une telle forme peut se faire par une substitution homographique, qu'on effectuera à la fois sur x et sur y. *Mais on peut y arriver plus simplement ainsi :*

Interprétons la relation (I) *comme une correspondance entre deux points d'une conique* C *situés sur une même tangente à une autre conique* Γ : il suffit, pour obtenir le résultat demandé, d'un choix convenable du triangle de référence auquel on rapporte C et Γ, et de la représentation paramétrique de C.

Choisissons en effet, comme ci-dessus, un triangle de référence

formé de deux tangentes à C : $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ et de leur corde de contact $\beta = 0$ en sorte que l'équation de C soit : $C \equiv \beta^2 - \alpha\gamma = 0$. Représentons de plus un point de C en fonction du paramètre x par les équations :

$$\frac{\alpha}{x^2} = \frac{\beta}{x} = \frac{\gamma}{1}.$$

Pour que le polynome X soit réduit par exemple à la forme de Weierstrass :

$$X = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

il faut d'abord que l'un des points communs aux deux coniques C et Γ, déterminés par $X = 0$, corresponde à x infini sur la conique C : on prendra donc un des quatre points communs à C et à Γ, soit S, pour sommet $\beta = \gamma = 0$ du triangle de référence, d'où le côté $\gamma = 0$ qui sera la tangente à C en ce point ; puis, un choix convenable de l'orientation du côté $\beta = 0$ permettra de faire que X soit privé de termes en x^2. L'équation de la conique Γ sera dès lors, d'après ce qu'on a vu, ramenée à la forme :

$$\Gamma \equiv 4\alpha\beta - g_2\beta\gamma - g_3\gamma^2 + 4k(\beta^2 - \alpha\gamma) = 0.$$

La fonction $F(u)$ sera maintenant réduite à $p(u, g_2, g_3)$ (que j'écrirai simplement : pu), et les paramètres des sommets successifs d'une ligne brisée considérée seront : $pu, p(u + \omega) \ldots p(u + m\omega) \ldots$ En particulier, au point S, x est infini : si l'on pose alors $x = pu$, on pourra prendre en ce point $u = 0$: donc $p\omega$ sera la valeur de x au sommet suivant, c'est-à-dire au point de rencontre de C avec la tangente à Γ en S. Comme cette tangente a pour équation : $\beta - k\gamma = 0$ on voit que l'on aura :

$$p\omega = k$$

ce qui fixe ω (au signe près). Il résulte aussi de là que les valeurs de k pour lesquelles Γ dégénère en deux droites doivent être celles des paramètres x des points communs à C et à Γ autres que S, c'est-à-dire les racines de l'équation $4k^3 - g_2 k - g_3 = 0$: d'où on déduit immédiatement l'équation en λ discriminante du faisceau linéaire (C, Γ), par rapport au triangle de référence de réduction ; prenons l'équation du faisceau sous la forme : $\Gamma + \lambda C = 0$: l'invariance des racines de l'équation en λ donnera

immédiatement les relations entre k (ou $\mathcal{C}$), g_2, g_3 et les invariants simultanés des deux coniques C et Γ rapportées à un triangle de référence quelconque. Si par rapport à un tel triangle, l'équation en λ du faisceau, $\Gamma + \lambda C = 0$ est :

$$\Delta\lambda^3 + \Theta\lambda^2 + \Theta_1\lambda + \Delta_1 = 0,$$

on trouve les formules suivantes, dans lesquelles ρ désigne un facteur arbitraire tenant à ce que le choix du triangle de référence ne suffit pas à fixer complètement les formules de la transformation de coordonnées :

$$\frac{4\rho^3}{\Delta} = \frac{12\rho^2 p\mathcal{C}}{\Theta} = \frac{2\rho p'\mathcal{C}}{\Theta_1} = \frac{p''\mathcal{C}}{\Delta_1}.$$

Conditions analytiques de fermeture. — Pour que la relation (I) définisse des polygones inscrits *fermés* de m côtés il faut et il suffit que la constante $\mathcal{C}$ correspondante satisfasse à : $m\mathcal{C} \equiv 0$ c'est-à-dire à : $pm\mathcal{C} = \infty$. D'où une première méthode évidente pour exprimer cette condition : chercher à exprimer $pm\mathcal{S}$ en fonction de $p\mathcal{C}, g_2, g_3$; on pourra ensuite revenir de là aux invariants simultanés Δ, Θ, Θ_1, Δ_1 ; on est ainsi conduit au problème de la *multiplication de l'argument*.

Multiplication de l'argument (1). — La fonction doublement périodique paire pmu doit être une fonction rationnelle de pu. Cherchons cette fonction rationnelle à l'aide de la formule :

$$pmu - pu = -\frac{\sigma(m+1)u\,\sigma(m-1)u}{\sigma^2 mu\,\sigma^2 u}. \tag{1}$$

On a d'autre part :

$$pmu - pu = -\frac{1}{m^2}\left[\frac{d^2}{du^2}\operatorname{L}\sigma mu - \frac{d^2}{du^2}\operatorname{L}(\sigma u)m^2\right]$$

c'est-à-dire :

$$pmu - pu = -\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{du^2}\operatorname{L}\frac{\sigma mu}{(\sigma u)m^2}.$$

Ceci conduit à considérer la fonction auxiliaire $\psi_m(u) = \dfrac{\sigma mu}{\sigma u^{m^2}}$: On voit immédiatement qu'elle est doublement périodique aux

(1) Voir Lévy, *Précis sur les fonctions elliptiques*, p. 191. — Greenhill, *Traité*, p. 454. La méthode suivie ici est plus simple que celles de ces deux ouvrages.

périodes 2ω et $2\omega'$, et n'a d'autres pôles que $u = 0$ à la multiplicité $m^2 - 1$; elle est donc une fonction entière de pu et $p'u$: d'ailleurs, sa parité est celle de m : si m est pair, elle sera donc une fonction entière de pu, et si m est impair, le produit de $p'u$ par une telle fonction. Le calcul de pmu se ramène alors facilement à celui des fonctions ψ, car la formule (1) donne immédiatement :

$$(1') \qquad pmu - pu = -\frac{\psi_{m+1}\,u\,\psi_{m-1}(u)}{\psi_m{}^2(u)} = -\frac{1}{m^2}\,\frac{d^2}{du^2}\,\mathrm{L}\psi_m(u$$

d'où la relation de récurrence (où je supprime l'écriture de l'argument u) :

$$(3) \qquad m^2\psi_{m+1}\,\psi_{m-1} = \psi_m\,\psi''_m - \psi'^2_m.$$

Il suffit donc de connaître ψ_1 et ψ_2 pour déduire de là les suivantes : or on a : $\psi_1 = 1$ et $\psi_2 = \frac{\sigma 2u}{\sigma(u)^4}$ d'ordre 3 ; d'où aussitôt : $\psi_2 = -p'u$. On en déduit facilement par la formule (3) :

$$\psi_3 = 3pp'^2 - \frac{1}{4}p''^2 \quad \psi_4 = p'(p'^3 - p''\psi_3), \text{ etc.}$$

On aura ensuite pmu par (1') :

$$pmu = \frac{p\psi_m^2 - \psi_{m+1}\psi_{m-1}}{\psi_m{}^2}.$$

D'ailleurs, une fois les deux termes exprimés en fonction rationnelle de pu, la fraction est *irréductible* : car ψ_m^2 sera un polynôme entier en pu de degré $m^2 - 1$, puisque $u = 0$ est pôle d'ordre $2(m^2 - 1)$ de la fonction ; or pmu doit précisément devenir infini par $m^2 - 1$ valeurs finies de pu, correspondantes à $mu = 0$, $u = 0$ étant excepté.

La condition de fermeture des lignes inscrites de m côtés sera donc : $\psi_m^2(\mathcal{C}) = \mathrm{E}(p\mathcal{C}) = 0$, E désignant un polynôme entier de degré $m^2 - 1$.

On revient facilement de là aux conditions invariantes relatives aux deux coniques C et Γ : il n'y a qu'à substituer aux quantités $p\mathcal{C}, g_2, g_3$, les invariants simultanés par les formules ci-dessus ;

pour $m = 3$ par exemple, on retrouve aussitôt la condition connue $4\Theta\Delta - \Theta^2 = 0$.

Théorème de Cayley. — Cayley est arrivé autrement à la condition de fermeture par la remarque suivante : *pour que* $m\widetilde{\omega} \equiv 0$ *il faut et il suffit qu'il existe une fonction doublement périodique* $\Phi(u)$, *entière par rapport à* pu *et* p'u, *qui n'ait d'autres racines que la racine multiple d'ordre* m : $u = \widetilde{\omega}$.

En effet, toute fonction entière de pu et $p'u$ ne peut avoir d'autres pôles que $u \equiv 0$; la somme de ses pôles dans un même parallélogramme de périodes sera donc $\equiv 0$; par suite, il en sera de même de la somme de ses racines, de sorte que si elles sont toutes égales à $\widetilde{\omega}$ et en nombre m, on devra avoir $m\widetilde{\omega} \equiv 0$; réciproquement, cela suffit pour qu'on puisse construire cette fonction par la formule de la décomposition en produit, sous la forme :

$$\Phi(u) = A\,\frac{[\sigma(u - \widetilde{\omega})]^m}{\sigma(u - m\widetilde{\omega})(\sigma u)^{m-1}} \quad (A, \text{ constante arbitraire}).$$

Pour appliquer ici ce théorème je remarque que je puis écrire $\Phi(u)$ sous la forme $F(pu) + p'u\,F_1(pu)$, en désignant par F et F_1 des polynômes entiers en pu ; on choisira aisément les degrés de F et de F_1 suivant la parité de m, de façon que $u = 0$ soit pôle multiple d'ordre m de la fonction : dans tous les cas, on trouve que le nombre total des coefficients de F et F_1 est m. Prenons pour variable $v = pu$; il faut et il suffit qu'on puisse choisir les coefficients de F et de F_1, de sorte que la fonction $F(v) + F_1(v)\sqrt{4v^3 - g_2 v - g_3}$ admette la racine $v = p\widetilde{\omega}$ à l'ordre de multiplicité m. Je fais alors la substitution linéaire : $v = p\widetilde{\omega} + \frac{\lambda}{i}$, λ étant la nouvelle variable.

La fonction deviendra :

$$E(\lambda) + E_1(\lambda)\sqrt{4\left(p\widetilde{\omega} + \frac{\lambda}{i}\right)^3 - g_2\left(p\widetilde{\omega} + \frac{\lambda}{i}\right) - g_3}$$

E et E_1 étant entiers en λ et respectivement des degrés de F et F_1. On reconnaît alors sous le radical précisément le premier membre de l'équation discriminante du faisceau $\Gamma + \lambda C = 0$, pris sous la

forme réduite : on peut le remplacer par le premier membre $\Delta(\lambda) = \Delta_1 + \Theta_1\lambda + \Theta\lambda^2 + \Delta\lambda^3$. On développera alors $\sqrt{\Delta(\lambda)}$ suivant les puissances entières croissantes de λ ; et on égalera à 0 les m premiers coefficients du développement de $E(\lambda) + E_1(\lambda)\sqrt{\Delta(\lambda)}$ qui en résulte, ce qui donnera m relations linéaires et homogènes entre les coefficients des polynômes E et E_1 : l'annulation de leur déterminant donnera la condition cherchée sous la forme indiquée par Salmon (sections coniques, p. 584).

M. Lelieuvre (Caen).

DÉFINITION ET DÉTERMINATION ANALYTIQUE

DES FOYERS D'UNE CONIQUE

PRÉLIMINAIRES

Pour plus de clarté nous avons divisé cet article en deux parties. Dans la première, nous étudions au point de vue de l'enseignement les diverses définitions qui ont été employées pour désigner les foyers d'une conique. A ces définitions, nous en avons ajouté une nouvelle, qui nous semble destinée à être utilisée dans l'enseignement.

Dans la deuxième partie nous montrons comment cette nouvelle définition conduit *naturellement* à un procédé de détermination des foyers d'une conique, procédé bien plus élégant et plus commode que les procédés connus. Nous y avons présenté nos résultats sous une forme condensée en laissant de côté tous les calculs que le lecteur peut facilement effectuer lui-même. Afin de ne pas trop étendre notre travail, nous n'avons indiqué ce procédé de détermination que dans le cas où la conique est rapportée à des axes coordonnés rectangulaires : la méthode est d'ailleurs la même dans le cas d'axes obliques.

Ce procédé possède un certain intérêt au point des résultats :

mais il a surtout un intérêt pédagogique, de même que l'étude des définitions dont il n'est en réalité qu'un complément.

Dans l'exposé de notre travail nous avons utilisé les déterminants ; nous avons trouvé avantage à agir ainsi : car, ceux-ci sont d'un emploi fréquent dans l'enseignement supérieur et il existe une tendance très prononcée à les faire entrer dans le premier enseignement de l'Algèbre et de la Géométrie analytique (1). D'ailleurs, pour obtenir les résultats indiqués sans utiliser la théorie des déterminants, il suffit d'apporter à notre exposé quelques légères modifications que le lecteur fera facilement.

I. — Sur la manière de définir les foyers

1. Dans un premier enseignement de la Géométrie analytique le professeur s'attache uniquement à l'étude des points et des droites réelles, tant qu'il n'aborde pas la théorie des sections coniques. Mais une fois qu'il expose cette théorie, il se laisse conduire, en vue d'exprimer des théorèmes absolument généraux, à la considération des points et des droites imaginaires et il applique à ces systèmes imaginaires les propriétés fondamentales bien établies des systèmes réels. De là résultent des inconvénients très graves : car, d'une part l'élève ne se fait pas facilement à la conception de ces êtres géométriques nouveaux qu'il ne peut pas concevoir d'une manière concrète ; d'autre part la difficulté déjà grande de compréhension se trouve devenir insurmontable par l'intervention d'une nouvelle cause : celle de l'extension *rigoureuse et d'une manière élémentaire* de certaines notions, et en particulier de celles qui, comme la notion d'angle et de direction d'une droite, se basent sur la connaissance des fonctions circulaires, au cas où les points et les droites deviennent imaginaires.

Il faut en conclure qu'il convient que dans un *premier* enseignement le professeur s'attache exclusivement à la considération de points et de droites réelles.

Tel n'a pourtant pas été l'opinion générale de ceux qui ont

(1) Plusieurs traités d'Algèbre élémentaire renferment les principes de la théorie des déterminants.

fait des traités de Géométrie analytique destinés à être mis entre les mains des commençants.

Ils ont préféré prendre un terme moyen ; ils ont écarté la considération des droites imaginaires et s'en sont tenus à celle des points imaginaires qui permettaient de donner aux théorèmes relatifs aux coniques réelles une exposition tout à fait générale, moyennant l'exclusion des droites imaginaires, — cela du moins en ce qui concerne certaines propriétés de la conique.

Mais cette manière de faire a eu un effet déplorable : car, non seulement il a nui à l'unité qui existait lors de la considération exclusive des systèmes réels ; mais en outre, si elle a diminué en une certaine mesure les défauts signalés plus haut, il en est de ceux-ci qui existent encore. D'ailleurs, cette manière de faire est parfaitement inutile : car elle n'atteint pas son but qui ne peut être qu'un exposé général de la théorie des coniques réelles ; ainsi elle ne donne pas de solution au problème de la détermination des tangentes menées par un point intérieur à la conique, étant donné qu'on écarte la considération des droites imaginaires.

Concluons donc qu'il est désirable que ceux qui commencent l'étude de la Géométrie analytique n'aient à ne s'occuper que d'êtres géométriques qui, bien qu'abstraits, puissent être facilement conçus grâce à la considération des êtres matériels qui sont à notre portée.

Voilà donc ce qui constituerait un premier enseignement de la Géométrie.

Ce premier enseignement doit être assez développé pour que l'élève ait acquis des connaissances suffisantes, et pour qu'il se soit familiarisé avec le langage analytique, afin de pouvoir aborder avec fruit les théories générales de la Géométrie, où entre la considération des systèmes imaginaires.

Ce premier enseignement n'est qu'une introduction.

Nous n'allons pas montrer pourquoi les mathématiciens ont trouvé avantageux d'introduire les imaginaires en Géométrie. Cela nous entraînerait trop loin en dehors de notre sujet. Il nous suffit de constater le fait que, après un premier enseignement, en vient un second qui est définitif et qui nécessite la considération des systèmes imaginaires pour pouvoir donner à un grand

nombre de théorèmes le degré de généralité qu'ils comportent.

2. De là résulte que l'on peut se demander comment il convient de définir les foyers d'une conique soit dans le premier enseignement, soit dans l'enseignement supérieur.

Nous avons étudié la réponse qu'il convient de donner à chacune de ces deux questions, et nous donnons ici les résultats de cette étude.

3. Dans un premier enseignement on définit *un foyer d'une conique* en disant que *c'est un point tel que le rapport des distances d'un point quelconque de la courbe à ce point et à une droite fixe du plan est constant* : cette droite est appelée une *directrice* de la conique. Parfois le concept de foyer d'une conique se présente dans les traités élémentaires *comme étant un point tel que la distance d'un point de la conique à celui-ci est une fonction linéaire invariable des coordonnées du point de la courbe*.

Ces définitions qui sont les seules utilisées dans l'enseignement élémentaire sont bien imparfaites tant au point de vue pédagogique qu'au point de vue de la méthode. Et cela se conçoit : aux notions de diamètre, de centre, de tangente en un point, d'asymptote et de polaire d'un point par rapport à une conique s'ajoutent deux nouvelles notions : celles de foyer et de directrices ; aucun lien ne rattache ces deux nouveaux concepts à l'une des notions fondamentales de la théorie des coniques. Ce fait ne serait pas regrettable si ces deux notions s'introduisaient naturellement dans la théorie. Mais il n'en est pas ainsi : la discussion de l'équation du second degré ne conduit nullement à la connaissance des foyers ni des directrices, et l'existence de ces points et de ces droites n'est seulement bien mise en évidence qu'après avoir établi *rigoureusement* que l'équation générale peut, sauf le cas où elle représente deux droites, se mettre sous une forme spéciale que nous ne rappelons pas.

C'est là un défaut très grave au point de vue pédagogique, et considérable au point de vue de la méthode.

A ce défaut s'en ajoute un autre : celui de ne pas mettre clairement en évidence l'existence des êtres géométriques ainsi

conçus, ni par la définition elle-même, ni par des calculs ou des déductions découlant immédiatement de celle-ci. On sait, en effet, que pour montrer l'existence des foyers il faut mettre l'équation de la courbe sous une forme spéciale. Cette opération est très embrouillée ; on ne l'achève d'ailleurs qu'après avoir réduit l'équation de la courbe à sa forme simplifiée, de telle sorte que c'est alors seulement que l'existence des foyers et des directrices apparaît avec clarté. A notre avis, c'est là un défaut des plus grands, parce que, nous semble-t-il, il est presque nécessaire, du moins lorsqu'on s'adresse à des commençants, de montrer l'existence des êtres géométriques immédiatement après qu'on les a définis.

Enfin, remarquons encore que l'emploi des définitions signalées renferme également l'inconvénient que voici : les notions de foyers et de directrices ainsi conçues ne s'étendent pas aux courbes planes algébriques d'un ordre ou d'une classe quelconque ; elles ne s'adaptent qu'à la considération d'une conique.

Les défauts que nous venons de signaler ne sont pas assez graves pour qu'il faille écarter ces définitions et se résoudre à ne parler dans un premier enseignement ni des foyers ni des directrices. Mais ces défauts devaient faire tendre les efforts des mathématiciens à rechercher une définition, la plus parfaite possible, et dont la compréhension puisse se faire par des commençants, afin qu'elle puisse remplacer dans l'enseignement les définitions imparfaites qui y ont été conservées faute de mieux.

Ces efforts ont été tentés par les mathématiciens, mais jusqu'ici, n'ont pas été couronnés de succès. Plücker parvint bien, il est vrai, à trouver une notion de foyer qui pouvait s'étendre à une courbe plane quelconque. Pour lui, les foyers d'une courbe sont les points pour lesquels deux tangentes menées en ce point à la courbe ont $+ i$ et $- i$ pour coefficients angulaires, les axes des coordonnées cartésiennes étant rectangulaires. Mais, étant donné que dans un premier enseignement il fallait écarter la considération des droites imaginaires, on ne put penser à utiliser cette définition.

4. J'ai de mon côté étudié la question, et grâce à la méthode

que j'ai employée, je suis parvenu à pouvoir proposer, pour les foyers, une nouvelle définition qui me semble entièrement satisfaisante.

Voici comment on est logiquement conduit à cette nouvelle définition.

La notion de polaire d'un point par rapport à une conique conduit immédiatement à celle de deux droites conjuguées par rapport à cette conique. On appelle ainsi deux droites telles que le pôle de l'une se trouve sur l'autre ; si elles se coupent en un point tel que de ce point on puisse mener deux tangentes à la conique, le système des deux tangentes et des deux droites conjuguées constitue un faisceau harmonique.

Parmi ces faisceaux le plus intéressant à considérer est celui où deux des droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles ; car on sait que dans ce cas elles sont les bissectrices des deux angles formés par les deux autres droites du faisceau.

On sait aussi que la réciproque a lieu.

On voit donc que si l'on considère le point de rencontre de deux tangentes quelconques à une conique et les deux bissectrices des deux tangentes, ces bissectrices seront deux droites conjuguées rectangulaires ; et il n'existe qu'un système de droites pareilles se rencontrant en ce point.

On peut se demander s'il n'existe pas des droites conjuguées perpendiculaires se coupant en un point, duquel on ne pourrait pas mener des tangentes à la conique. On est ainsi conduit à l'étude du problème de la détermination d'un système (ou des systèmes) de deux droites conjuguées rectangulaires passant par un point quelconque donné.

La solution de ce problème est facile.

Plaçons-nous dans le cas où la conique est définie par une équation en coordonnées cartésiennes, les axes coordonnées étant rectangulaires. Soient α et β les coordonnées du point donné, et

$$y - \lambda x - (\beta - \alpha\lambda) = 0, \qquad x + \lambda y - (\alpha + \beta\lambda) = 0,$$

les équations de deux droites rectangulaires qui s'y coupent.

La condition nécessaire et suffisante pour que ces droites soient

conjuguées par rapport à la conique $f(x, y, z) = 0$ est que λ satisfasse à la relation

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 1 \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & \lambda \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} & -(\alpha+\beta\lambda) \\ \lambda & -1 & \beta-\alpha\lambda & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, et en posant,

$$Q = \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$$2P = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{yy} & f''_{yz} \end{vmatrix} + (\alpha^2 - \beta^2) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix},$$

$$Q(1-\lambda^2) + 2P\lambda = 0.$$

Comme cette équation admet toujours deux racines réelles, on peut en déduire qu'étant donné un point (α, β) il existe toujours un système unique de deux droites conjuguées passant par ce point, sauf toutefois si le point est tel que l'on ait simultanément

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

Alors tout système de deux droites rectangulaires passant par ce point constitue un système de deux droites conjuguées. Nous appellerons ces points des FOYERS de la conique; de sorte que, pour nous, *un foyer d'une conique est un point tel que tout système de deux droites rectangulaires qui s'y rencontrent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique* [1].

L'existence des foyers d'une conique résulte donc de la détermination des solutions réelles communes aux deux équations

$$P = 0 \qquad Q = 0.$$

Cette détermination peut se faire d'une manière très commode et très élégante; elle est indiquée dans la deuxième partie de cet article. On peut ainsi établir immédiatement l'existence des points que nous venons de définir.

(1) Cette propriété des foyers d'une conique est très connue, mais on n'a jamais songé à l'utiliser comme définition du foyer.

D'après les détails qui précèdent nous avons pu constater que la définition que nous proposons aux géomètres pour indiquer la notion de foyer d'une conique s'introduit tout naturellement dans la théorie des sections coniques.

Cette notion ainsi présentée est d'ailleurs susceptible d'être facilement comprise par ceux qui commencent l'étude de la Géométrie analytique ; en plus elle est susceptible de s'étendre à une courbe algébrique plane quelconque.

Le seul défaut pédagogique qu'elle pourrait renfermer consisterait dans la difficulté d'établir d'une manière facile, en partant de la nouvelle notion de foyer, les principales propriétés métriques dont jouissent les foyers d'une conique et qu'il convient de signaler, même dans une première étude de ces courbes. Mais ce défaut n'existe pas ; car nous allons montrer que la nouvelle définition conduit immédiatement à deux théorèmes, sur lesquels on peut faire reposer toute l'étude des propriétés métriques des foyers d'une conique.

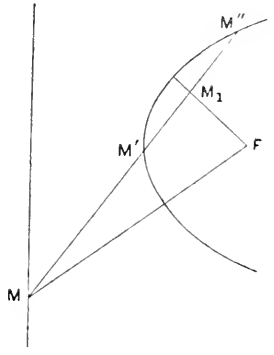


Fig. 1.

A cet effet, notons que les foyers étant des points particuliers du plan, les polaires de ces points seront des droites particulières auxquelles il convient de donner une dénomination : nous les appellerons des *directrices*.

Cette nouvelle notion permet d'exprimer le théorème que voici, grâce à la restriction que, ni le foyer, ni la directrice correspondante ne sont situés à l'infini dans le plan :

Si une sécante M′ M″ *coupe en* M *la directrice correspondant à un foyer* F, *la droite* MF *est une bissectrice de l'angle* M′FM″.

En effet, si l'on mène par F une perpendiculaire FM_1 à FM, on a un système de deux droites conjuguées. Les quatre droites MF, M_1 F, M′ F et M″ F constituent donc un faisceau harmonique dont deux droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles. Ces dernières droites sont donc les bissectrices de l'angle M′FM″ formées par deux autres droites du faisceau et en particulier MF est une des bissectrices de cet angle.

De cette propriété découle immédiatement le théorème suivant :

Le rapport des distances d'un point d'une conique ou foyer et à la directrice correspondante est constant.

Car MF étant une bissectrice de l'angle M' F M'', il vient, d'après un théorème connu de la Géométrie élémentaire

$$\frac{M'F}{M''F} = \frac{M'M}{M''M}.$$

Si des points M' et M'' on abaisse des perpendiculaires sur la directrice, et si on appelle m' et m'' les pieds de ces perpendiculaires, la considération des deux triangles semblables $MM'm'$ et $MM''m''$ donne

$$\frac{M'M}{M''M} = \frac{M'm'}{M''M''}.$$

La comparaison des deux dernières relations donne ensuite

$$\frac{FM'}{FM''} = \frac{m'M'}{m''M''} \quad \text{ou} \quad \frac{FM'}{m'M''} = \frac{FM''}{m''M''}.$$

Cette dernière égalité conduit immédiatement à la propriété énoncée. Cette propriété conduit elle-même à toutes les autres propriétés métriques fondamentales du foyer.

Je crois donc avoir établi d'une manière évidente qu'il convient dans un premier enseignement de la Géométrie analytique de définir le foyer d'une conique par la notion de deux droites conjuguées.

5. Il s'agit maintenant d'aborder la même question lorsqu'on se place au point de vue de l'enseignement supérieur.

Dans cet enseignement l'élève est censé être familiarisé avec la considération des points, des droites et des courbes imaginaires. La définition proposée par Plücker peut donc être utilisée dans un tel enseignement, à la condition qu'elle s'introduise naturellement dans la théorie. Les géomètres se sont peu préoccupés de cette question, qui a pourtant une importance capitale au point de vue des méthodes. Il convenait en effet de montrer comment on en est arrivé, en suivant un ordre logique, à s'atta-

cher spécialement à l'étude des points que l'on obtient par l'intersection de tangentes spéciales à une conique : les tangentes de direction $+ i$ et $- i$ quand elles sont rapportées à des axes coordonnés rectangulaires.

Pour introduire naturellement la notion de foyer dans la théorie des coniques, on peut procéder d'une manière identique à celle que nous avons proposé de suivre dans un premier enseignement.

On part de la considération de deux droites conjuguées par rapport à une conique. Elles forment toujours avec les tangentes, menées de leur point d'intersection à la courbe, un faisceau de quatre droites en situation harmonique.

Parmi ces systèmes, le plus simple est celui où deux des droites conjuguées sont perpendiculaires entre elles. On sait que dans ce cas elles sont les bissectrices des deux angles formés par les deux autres droites du faisceau, *sauf si ces dernières droites ont pour coefficients angulaires* $+ i$ *et* $- i$, *lorsqu'elles sont rapportées à des axes rectangulaires* [1]. Dans ce dernier cas, tout système de deux droites perpendiculaires forme avec les deux droites de direction $+ i$ et $- i$ un faisceau harmonique, et cette propriété ne peut avoir lieu que dans ces conditions.

Deux propriétés apparaissent en même temps par la simple application de ce qui précède à la considération d'une conique. On les énonce en disant que :

1° *Les intersections des tangentes de direction* $+ i$ *et* $- i$ *sont des points tels que deux droites rectangulaires quelconques passant par ces points forment un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique ;*

2° *Les points tels que tout système de deux droites perpendiculaires qui s'y coupent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la conique sont aussi tels que les deux tangentes menées par ce point sont de direction* $+ i$ *et* $- i$.

Pour l'étude de ces points, on leur donnera un nom spécial : *foyer*.

On voit ainsi qu'en suivant un ordre logique on est conduit à

---

[1] Ces droites sont appelées *droites isotropes :* les deux points situés à l'infini sur celles-ci s'appellent *points circulaires ou cycliques.*

définir les foyers, soit en utilisant la définition de Plücker, soit en utilisant la nouvelle définition que nous avons déjà proposée pour le premier enseignement de la Géométrie.

Chacune de ces deux notions s'introduit naturellement dans la théorie des sections coniques : c'est l'unique condition à laquelle on puisse les astreindre au point de vue méthodologique ; néanmoins, même au point de vue de la méthode, il est avantageux de ne pas être obligé à changer de notion quand on veut définir les foyers d'une courbe quelconque. C'est ce qui arrive ici, car chacune de ces deux notions s'étend à une courbe quelconque : mais, si la définition de Plücker n'est susceptible que d'une seule généralisation, la nôtre peut s'étendre aux courbes planes algébriques de deux manières différentes. Ces deux généralisations sont basées sur l'extension à une courbe de la notion de deux droites conjuguées par rapport à celle-ci ; nous avons trouvé des résultats dans cette voie, mais le sujet que nous traitons actuellement ne nous permet pas de les indiquer dans ce travail.

Les deux définitions précédentes semblent à première vue ne pas pouvoir conduire facilement aux propriétés *métriques* des foyers d'une conique. Pourtant, ces propriétés s'en déduisent aisément.

Nous avons déjà montré plus haut qu'il en est ainsi pour la définition que nous proposons.

Quant à la définition de Plücker, elle conduit aussi d'une manière facile à ces propriétés métriques. Dans son beau travail *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires* [2], M. G. Darboux, grâce à la notion des points associés et à l'étude de leurs propriétés essentielles, parvient à déduire facilement de la définition de Plücker et d'un théorème de Chasles établissant que le rapport anharmonique de quatre points où une tangente mobile rencontre quatre tangentes fixes est constant, parvient à en déduire des propriétés métriques des foyers, desquelles se déduisent les autres propriétés métriques de ces points.

En opérant ainsi, le savant géomètre français a eu pour but de rattacher d'une manière directe aux propositions générales de

[2] Pages 61-65.

la théorie des coniques la démonstration des propriétés métriques des foyers. Sans les rattacher à ces théorèmes généraux, et sans l'emploi des points associés, on peut établir très simplement ces propriétés métriques en notant que l'équation des tangentes menées d'un point (α, β, γ), où $\gamma = 1$, à une conique $f(x, y, z) = o$ est

$$(xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - 4f(\alpha\beta\gamma)\, f(xyz) = 0.$$

Si le point (α, β, γ) est un foyer, les tangentes passant par ce point ont pour coefficients angulaires $+ i$ et $- i$, les axes coordonnés étant rectangulaires. On voit donc qu'on doit avoir

$$4f(\alpha, \beta, \gamma)\, f(x, y, z) = (xf'_\alpha + yf'_\beta + zf'_\gamma)^2 - c\,[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2],$$

c étant une constante.

Cette équation montre que *le rapport des distances d'un point de la conique au foyer et à la directrice correspondante est constant*, pourvu que le foyer n'appartienne pas à la courbe. Ce dernier cas ne se présente que lorsque la conique dégénère en un système de deux droites. Le théorème énoncé permet d'établir les autres propriétés métriques focales.

On voit donc combien la définition des foyers proposée par Plücker et la nôtre sont parfaites au point de vue de la méthode : c'est l'une de celles-ci qui, nous semble-t-il, doit être utilisée dans l'enseignement supérieur.

II. — Détermination analytique des foyers

6. Partant de la définition : (ou si l'on veut de la propriété) un foyer d'une conique est un point tel que deux droites perpendiculaires quelconques qui s'y rencontrent constitue un système de deux droites conjuguées par rapport à la courbe, nous allons indiquer un procédé de détermination *sans changement d'axes coordonnés* des foyers, d'une conique dans les cas où celle-ci est définie par une équation soit en coordonnées cartésiennes ordinaires, soit en coordonnées cartésiennes tangentielles.

7. *Coordonnées cartésiennes ordinaires.* — Considérons une

conique représentée par une équation homogène du second degré

$$f(x, y, z) = 0,$$

x et y étant les coordonnées courantes d'un point par rapport à des axes rectangulaires, et z étant égal à l'unité.

Soient α et β les coordonnées d'un point F, et

$$y - \lambda x - (\beta - \alpha\lambda) = 0,$$
$$x + \lambda y - (\alpha - \beta\lambda) = 0,$$

les équations des deux droites perpendiculaires qui s'y rencontrent.

Ce système de deux droites varie en même temps que λ. La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit constamment constitué de deux droites conjuguées par rapport à la conique est que l'expression

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 1 \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & \lambda \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} & -(\alpha+\beta\lambda) \\ \lambda & -1 & \beta-\alpha\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

s'annule, quelle que soit la valeur de λ. Cette condition est aussi celle pour que le point F soit au foyer de la conique.

Le développement de ce déterminant peut s'écrire, en posant

$$Q = \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yz} \end{vmatrix} - \alpha\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix},$$

$$2P = \begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz} \\ f''_{xz} & f''_{zz} \end{vmatrix} - 2\alpha \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{yy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} - 2\beta \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xz} & f''_{yz} \end{vmatrix} + (\alpha^2 - \beta^2) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}.$$

$$Q(1 - \lambda^2) + 2P\lambda.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que le point F soit un foyer est que ses coordonnées satisfassent simultanément aux deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0. \tag{1}$$

La détermination des foyers et la solution de ce système sont donc deux problèmes identiques.

8. Pour simplifier l'écriture, nous poserons :

$$a=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{xy} & f''_{yy}\end{vmatrix} \qquad b=\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz}\\ f''_{xy} & f''_{yz}\end{vmatrix} \qquad c=\begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{xy}\\ f''_{yz} & f''_{xz}\end{vmatrix}$$
$$d=\begin{vmatrix} f''_{yz} & f''_{xy}\\ f''_{zz} & f''_{xz}\end{vmatrix} \qquad f=\begin{vmatrix} f''_{yy} & f''_{yz}\\ f''_{yz} & f''_{zz}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xz}\\ f''_{xz} & f''_{zz}\end{vmatrix} \qquad (\omega_2).$$

Représentant les coordonnées α et β par x et y et utilisant les relations précédentes, le système des équations (1) prend la forme

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Q = axy + bx + cy + d = 0,\\ 2P = a(x^2 - y^2) + 2cx - 2by + f = 0. \end{cases}$$

Les racines de ces deux équations satisfont à l'équation

$$2P + 2\mu Q = a(x^2 - y^2 + 2\mu xy) + 2x(c + b\mu) - 2y(b - c\mu) + f + 2\mu d = 0,$$

μ étant une constante arbitraire.

Donnons à cette constante une valeur telle que le premier membre de l'équation précédente se décompose en deux facteurs linéaires. Il convient à cet effet de donner à μ une valeur racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} a & \mu a & c + b\mu\\ \mu a & -a & -(b - c\mu)\\ c + b\mu & -(b - c\mu) & f + 2d\mu\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du troisième degré ; mais ses racines se calculent très facilement : cette équation peut s'écrire, en développant le déterminant précédent et en laissant de côté les déterminants qui sont identiquement nuls :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 2d\end{vmatrix}\mu^3 + \begin{vmatrix} 0 & a & c\\ a & 0 & -b\\ b & c & f\end{vmatrix}\mu^2 + \begin{vmatrix} a & 0 & b\\ 0 & -a & c\\ c & -b & 2d\end{vmatrix}\mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c\\ 0 & -a & -b\\ c & -b & f\end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\left[\begin{vmatrix} 0 & a & b\\ a & 0 & c\\ b & c & 2d\end{vmatrix}\mu + \begin{vmatrix} a & 0 & c\\ 0 & -a & -b\\ c & -b & f\end{vmatrix}\right][1 + \mu^2] = 0. \quad \text{(II)}$$

9. Cette équation mise sous cette forme est très remarquable. Elle permet d'abord de mettre facilement en évidence une pro-

priété que nous avons déjà établie très simplement dans la première partie. Cette propriété s'énonce en disant que *les foyers sont les intersections des tangentes menées à la conique par les deux points singuliers (ou circulaires) situés à l'infini dans le plan.*

Pour montrer la vérité de cette proposition, il suffit évidemment de montrer que les équations

$$(2)\quad \begin{cases} 2P + 2iQ = a(x + yi)^2 + 2(c + bi)(x + yi) + f + 2di = 0 \\ 2P - 2iQ = a(x - yi)^2 + 2(c - bi)(x - yi) + f - 2di = 0 \end{cases}$$

représentent chacune deux tangentes de direction $+i$ et $-i$. Voici comment on peut établir facilement ces dernières propriétés :

Considérons, par exemple, un point M situé sur l'une des deux droites $P + iQ = 0$ ou $P = -iQ$. En supposant que ce point M ne soit pas un foyer (ce qui revient à dire que la valeur correspondante de $P(x, y)$ est différente de zéro), on sait que les bissectrices de l'angle formé par les deux tangentes menées par ce point à la conique (le point étant supposé ne pas se trouver sur la conique) ont des coefficients angulaires racines de l'équation

$$Q(1 + \lambda^2) + 2P\lambda = 0$$

Cela a lieu en vertu de ce qui est dit au n° 4.

Dans le cas qui nous occupe, cette équation prend la forme

$$P(1 + \lambda^2 - 2\lambda i) = 0,$$

ou

$$P(1 - \lambda i)^2 = 0.$$

D'ailleurs, P étant différent de zéro, on a une racine double $\lambda = +i$.

Les deux bissectrices de l'angle en question se confondent donc et ont pour direction commune $\lambda = +i$

On doit en conclure que la droite passant par M et faisant partie du système $P + iQ = 0$ est une tangente à la courbe.

10. Il est utile de faire remarquer que les deux équations (2) précédentes ramènent la détermination des foyers à la résolution de deux équations du second degré, qui malheureusement sont compliquées de coefficients imaginaires. Aussi, dans le cas où l'équa-

tion $f(x, y, z) = 0$ de la conique ne renferme pas de coefficients imaginaires, il est préférable, nous semble-t-il, de procéder autrement.

11. On considérera la troisième racine de l'équation (II). Elle est donnée par la relation

$$\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} a & o & c \\ o & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{(III)}$$

équation que l'on transformera en ayant égard aux relations (ω_2).

Il vient ainsi

$$\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & 2d \end{vmatrix} = -2a(ad - bc) = +2f''_{xy} \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a & o & c \\ o & -a & -b \\ c & -b & f \end{vmatrix} = a(c^2 - b^2 - af) \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = 0,$$

la courbe est une parabole ; elle n'a qu'un foyer qui se détermine par la solution du système (1) constitué alors de deux équations linéaires.

Si

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix} = 0;$$

la courbe se compose de deux droites, de même que toutes les coniques $P + \mu Q = 0$. Mais ces coniques ont toutes le même centre que la courbe $f(x, y, z) = 0$.

On en déduit que les droites $P + \mu_1 Q = 0$ sur lesquelles sont situés les foyers ne peuvent rencontrer les droites $P + \mu_2 Q = 0$, auxquelles appartiennent également les foyers qu'en un point : le point d'intersection des deux droites $f(x, y, z) = 0$.

Par suite, une conique se réduisant à deux droites n'a qu'un

foyer ; sont point double unique. Si les droites sont parallèles, le foyer est à l'infini.

Enfin, si aucun de ces cas ne se présente, la relation (III) prend la forme

$$\mu = -\frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{f''_{xy}}.$$

Pour cette valeur de μ, l'équation

$$P + \mu Q = 0$$

représente deux droites passant par le centre de la conique $f = 0$ et parallèles aux deux droites

$$x^2 - y^2 - \frac{f''_{xx} - f''_{yy}}{2f''_{xy}} xy = 0.$$

Ces deux droites sont donc les axes de la conique.

Donc, *les foyers d'une conique sont situés sur ses axes.*

Pour déterminer les foyers d'une conique, on commencera donc par voir si la courbe ne se réduit pas a une parabole ou à deux droites. S'il en est ainsi, on procède comme il a été dit plus haut concernant ces cas spéciaux. S'il n'en est pas ainsi, la courbe admet deux axes dont on déterminera chacune des équations. On combinera ensuite chacune de celles-ci avec l'une des équations (1).

La détermination se fait ainsi par la résolution de deux systèmes de deux équations dont l'une est du premier degré et l'autre du second par rapport aux inconnues.

On emploie cette méthode sans aucune modification dans le cas général ; mais dans certains cas particuliers, on peut pour la rapidité des calculs utiliser les relations (1) mises sous la forme (1)

$$Q = f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0$$
$$2P = f'^2_x - f'^2_y - 2f'_x f''_{xx} - f'_{yy} = 0.$$

---

(1) Pour vérifier ces résultats il suffit de remplacer dans ces équations $2f$, f'_x et f'_y respectivement pour chacune des expressions

$$x^2 f''_{xx} + y^2 f''_{yy} + z^2 f''_{zz} + 2xy f''_{xy} + 2xz f''_{xz} + 2yz f''_{yz},$$
$$x f''_{xx} + y f''_{yy} + z f''_{zx},$$
$$x f''_{xy} + y f''_{yy} + z f''_{zy}$$

d'effectuer les opérations indiquées et de réduire à leur forme la plus simple les expressions ainsi obtenues de $f'_x f'_y - 2f f''_{xy}$ et de $f'^2_x - f'^2_y - 2f'_x f''_{xx} - f_{yy}$).

D'après ces équations, on voit que si $f''_{xy} = 0$ et si $f''_{xx} = f''_{yy}$, il n'existe qu'un foyer qui est le centre du cercle représenté par $f(x, y, 5) = 0$.

Si $f''_{xy} = 0$, on obtient les foyers par la solution de chacun des deux systèmes

$$f'_x = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_y = 0$$
$$f'^2_y - 2f(f''_{yy} - f''_{xx}) = 0 \qquad f'^2_x - 2f(f''_{xx} - f''_{yy}) = 0.$$

Si $f''_{xx} = f''_{yy}$; les coordonnées des foyers sont les racines des deux systèmes.

$$f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_x f'_y - 2ff''_{xy} = 0$$
$$f'_x + f'_y = 0 \qquad\qquad f'_x - f'_y = 0.$$

12. *Coordonnées cartésiennes tangentielles.* — Afin de résoudre le même problème en coordonnées tangentielles, considérons deux droites perpendiculaires $d_1\ (u_1, v_1)$ et $d_2\ (u_2, v_2)$, se rencontrant en un point fixe F représenté par l'équation

$$au + bv + 1 = 0.$$

On a donc, les axes coordonnés étant supposés rectangulaires,

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0.$$
$$au_2 + bv_2 + 1 = 0,$$
$$au_1 + bv_1 + 1 = 0.$$

Les deux premières équations donnent

$$\frac{u_2}{-v_1} = \frac{v_2}{u_1} = \frac{1}{av_1 - bu_1}.$$

Cherchons la condition pour que les droites d_1 et d_2 soient deux droites conjuguées. Le pôle de d_2 est

$$u_2 f'_u + v_2 f'_v + f'_w = 0.$$

ou

$$-v_1 f'_u + u_1 f'_v + (av_1 - bu_1) f'_w = 0.$$

Ce pôle se trouvant sur d_1, on doit avoir

$$-v_1 f'_{u_1} + u_1 f'_{v_1} + (av_1 - bu_1) f'_{w_1} = 0,$$

ou, en tenant compte des relations,

$$f'_{u_1} = u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv} + f''_{uw},$$
$$f'_{v_1} = u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vw} + f''_{vw},$$
$$f'_{w_1} = u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw} + f''_{ww},$$

et

$$au_1 + bv_1 = -1,$$
$$-v_1 (u_1 f''_{uu} + v_1 f''_{uv}) + u_1 (u_1 f''_{uv} + v_1 f''_{vv}) + (av_1 + bu_1)(u_1 f''_{uw} + v_1 f''_{vw})$$
$$-[-v_1 f''_{uw} + u_1 f''_{vw} + (av_1 - bu_1) f''_{ww}](au_1 + bv_1) = 0.$$

Les diverses propriétés énoncées devant avoir lieu, quelle que soit la position de la droite d_1, pourvu que cette droite passe constamment par F, il faut et il suffit que la relation précédente ait lieu quelles que soient les valeurs de u_1 et de v_1.

On trouve ainsi, en égalant à zéro les coefficients de u_1^2, $u_1 v_1$ et v_1^2, les trois équations de condition

$$f''_{uv} - bf''_{uw} - af''_{vw} + abf''_{ww} = 0,$$
$$-f''_{uu} + f''_{vv} + af''_{uw} - bf''_{vw} + af''_{uw} - bf''_{vw} - a^2 f''_{ww} + b^2 f''_{ww} = 0,$$
$$-f''_{uv} + af''_{vw} + bf''_{uw} - abf''_{ww} = 0.$$

Les coordonnées (a, b) des foyers de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont donc les racines du système

$$(1') \quad \begin{cases} abf''_{ww} - af''_{vw} - bf''_{uw} + f''_{uv} = 0, \\ (a^2 - b^2) f''_{ww} - 2af''_{uw} + 2bf''_{vw} + f''_{uu} - f''_{vv} = 0 \ (^1). \end{cases}$$

On voit d'abord que si $f''_{ww} = 0$, il n'y a qu'un foyer qui s'obtient par la solution de deux équations (1') qui sont linéaires ; on sait que la courbe se réduit alors à une parabole.

Si la courbe n'est pas une parabole, on procédera, pour résoudre (1'), de la même façon que dans le cas de coordonnées cartésiennes ordinaires.

A cet effet, on notera que les équations (1') sont de la forme (I).

Si donc on représente par Q et par $2P'$ respectivement les premiers membres des équations (1'), les équations

$$P + iQ = 0 \qquad \text{et} \qquad P - iQ = 0$$

(1) Les relations (1) et (1') peuvent aussi se déduire immédiatement les unes des autres d'après une transformation connue.

se décomposent chacune en deux facteurs linéaires. Cela a lieu, ainsi que ce que nous avons encore à dire en vertu de ce qui a été établi au n° 10.

Au moyen de ces deux dernières équations, la détermination de a et celle de b se font par la résolution séparée de deux équations du second degré, dont les coefficients sont malheureusement compliqués d'imaginaires.

Aussi, si les coefficients des variables dans l'équation de la conique $f(u, v, w) = 0$ sont tous réels, il est préférable de considérer la valeur du μ, racine de l'équation linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & f''_{uw} & -f''_{vw} \\ f''_{uw} & 0 & -f''_{uv} \\ -f''_{vw} & -f''_{uv} & 2f''_{uv} \end{vmatrix} \mu + \begin{vmatrix} f''_{uu} & 0 & -f'_{uw} \\ 0 & -f''_{uw} & f'_{vw} \\ -f''_{uv} & f''_{vw} & f''_{uu} - f''_{vv} \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en divisant le premier membre par f''_{uw}.

$$2 \begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uw} & f''_{ww} \end{vmatrix} \mu - [f''^2_{uw} - f''^2_{vw} - (f''_{uu} - f''_{vv}) f''_{uw}] = 0.$$

Pour cette valeur de μ l'équation $P + \mu Q = 0$ se décompose en deux facteurs linéaires.

Pour obtenir les coordonnées (a, b) des points foyers, on combinera chacun de ces facteurs égalés à zéro avec l'une des équations (1'). La solution du problème se fait ainsi au moyen de deux systèmes d'équations, dont l'une est du premier, l'autre du second degré par rapport aux inconnues.

Notons encore que, d'après l'équation linéaire qui donne la valeur de μ et d'après ce qui est dit au n° 11, la condition nécessaire et suffisante pour que la conique $f(u, v, w) = 0$ rapportée à des axes coordonnés rectangulaires se réduise à un cercle est que l'on ait simultanément

$$\begin{vmatrix} f''_{uv} & f''_{vw} \\ f''_{uw} & f''_{uu} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{et} \quad f''^2_{uw} - f''^2_{vw} - (f''_{uu} f''_{vv}) f''_{uw} = 0.$$

L. Van Emelen (Louvain).

LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

DANS L'ENSEIGNEMENT MOYEN

Comme appendice à la leçon sur les propriétés de la fonction e^x, bien des professeurs proposent en exercice à leurs élèves de démontrer les principales formules relatives aux transcendantes

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

appelées communément *sinus*, *cosinus*, et *tangente hyperboliques* de l'argument réel x ; ils signalent les analogies et différences que ces fonctions présentent avec les fonctions circulaires du même nom, et expliquent leur qualificatif d'hyperboliques en remarquant que $X = \operatorname{ch} x$, $Y = \operatorname{sh} x$ sont les coordonnées d'un point de l'hyperbole équilatère

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Mais là se bornent la plupart du temps les indications qu'ils donnent, et dans aucune partie du cours, les élèves ne sont appelés à en tirer profit. Nous croyons que c'est là une regrettable lacune, et nous sommes persuadé que si les étudiants de nos cours de mathématiques spéciales et de facultés étaient familiarisés avec le maniement des sinus et cosinus hyperboliques comme ils le sont avec celui des sinus et cosinus circulaires, ils sauraient apporter à bien des calculs de notables simplifications ; il est aisé de le prouver par des exemples simples empruntés à des questions élémentaires.

I. — Théorie de l'hyperbole

On peut écrire ainsi les coordonnées d'un point M de l'hyperbole :

$$x = a \operatorname{ch} \varphi, \quad y = b \operatorname{ch} \varphi.$$

et les propriétés de la courbe donnent lieu à des développements identiques à ceux qui servent pour l'ellipse ;

$$x' = a \operatorname{sh} \varphi, \quad y' = b \operatorname{ch} \varphi$$

représentent l'extrémité M′ du rayon $o\mathrm{M}'$ conjugué à $o\mathrm{M}$.

II. — Calcul d'une dérivée

Soit la fonction $y = \mathrm{L}\,(x + \sqrt{1 + x^2})$. En posant $x = \operatorname{sh}\varphi$, on a immédiatement

$$x + \sqrt{1 + x^2} = \operatorname{sh}\varphi + \operatorname{ch}\varphi = e^{\varphi}$$

donc $y = \varphi$, ou $x = \operatorname{sh} y$; par suite

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

III. — Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Quand les racines sont réelles et de même signe, on définit un argument circulaire φ par l'égalité

$$\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 \varphi$$

et les formules

$$x' = -\frac{b}{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = -\frac{b}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

font connaître les deux racines ; on peut suivre une marche en tout semblable si le produit ac est négatif, à condition de définir cette fois un argument hyperbolique φ par l'égalité

$$-\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{sh}^2 \varphi$$

les racines, réelles et de signes contraires, sont

$$x' = -\frac{b}{a} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}, \quad x'' = \frac{b}{a} \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2}.$$

IV. — Résolution de l'équation $x^3 + px + q = o$.

Quand l'équation n'a qu'une seule racine réelle, la formule de Cardan qui la fait connaître par une somme de deux radicaux cubiques, est très désavantageuse dans la pratique ; or, si l'emploi des fonctions circulaires est tout indiqué quand les trois racines sont réelles, nous allons voir que celui des fonctions hyperboliques est aussi absolument naturel dans le cas contraire. Qu'on nous permette d'entrer à cet égard dans quelques détails : nous résoudrons d'abord la question que voici : *Étant donné* sh$a$ *ou* ch$a$, *calculer* $\mathrm{sh}\frac{a}{3}$ *ou* $\mathrm{ch}\frac{a}{3}$. Les formules de multiplication sont

$$\mathrm{sh}\,3x = 3\,\mathrm{sh}x + 4\,\mathrm{sh}^3x$$
$$\mathrm{ch}\,3x = 4\,\mathrm{ch}^3x - 3\,\mathrm{ch}x$$

donc, étant donné sh$a$, $\mathrm{sh}\frac{a}{3} = z$ est racine de l'équation

$$z^3 + \frac{3}{4}z - \frac{\mathrm{sh}a}{4} = o \tag{1}$$

qui a pour résolvante

$$U^2 - \frac{\mathrm{sh}a}{4}U - \frac{1}{64} = o\,. \tag{1'}$$

On tire de cette dernière

$$U_1 = \frac{1}{8}e^a\,,\quad U_2 = -\frac{1}{8}e^{-a}$$

dans les trois racines de (1) sont

$$z_1 = \mathrm{sh}\,\frac{a}{3}$$
$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}\,\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{sh}\,\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{3}\right]$$

De même, ch$a$ étant donné, les trois racines de l'équation

$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{\mathrm{ch}a}{4} = o \tag{2}$$

sont

$$z_1 = \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$z_3 = -\frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Ceci posé, dans l'équation du troisième degré générale, admettons que $4p^3 + 27q^2$ soit positif; deux cas se présentent suivant le signe de p.

1° p positif. En déterminant un coefficient λ et un argument hyperbolique a par les relations

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad \operatorname{sh} a = -\frac{3q}{p\lambda},$$

si on fait $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (1); donc les trois racines demandées sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{sh}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{a}{3}\right]$$

2° p négatif. Cette fois on fait

$$\lambda = \pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \operatorname{ch} t = -\frac{3q}{p\lambda},$$

en choisissant pour λ le signe contraire à celui de q, en sorte que $\operatorname{ch} a$ soit positif; par $x = \lambda z$, on est ramené à l'équation (2), et les racines en x sont

$$x_1 = \lambda \operatorname{ch}\frac{a}{3}$$

$$x_2 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} + i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

$$x_3 = -\frac{\lambda}{2}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{3} - i\sqrt{3}\operatorname{sh}\frac{a}{3}\right]$$

Pour appliquer la méthode à un calcul numérique, il suffit

d'avoir à sa disposition une table de logarithmes des fonctions hyperboliques suffisamment étendue, et d'un maniement commode ; le calcul ci-dessous est fait à l'aide d'une table à 5 décimales, de disposition très pratique, mais qui n'est point encore publiée.

Résoudre l'équation $x^3 + 7x + 7 = 0$.

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\,,\quad \log\lambda = 0,38502$$

$$\operatorname{sh}a = -\frac{3}{\lambda}\,,\quad \log(-\operatorname{sh}a) = \overline{1},99210,\quad a = -0,86857$$

$$\frac{a}{3} = -0,28952\,,\quad \log\operatorname{sh}\left(-\frac{a}{3}\right) = \overline{1},36772\,,\quad \log\operatorname{ch}\left(-\frac{a}{3}\right) = 0,01795$$

$$\log(-x_1) = \overline{1},95271$$

$$\log\frac{x_3 - x_2}{i} = \log\lambda + \log\sqrt{3} - \log\operatorname{ch}\left(\frac{-a}{3}\right) = 0,74153$$

$$-x_1 = 0,8969$$

$$x_2 + x_3 = 0,8969$$

$$\frac{x_3 - x_2}{i} = 5,5148$$

$$x_1 = -0,8969$$

$$x_2 = 0,4484 - 2,7574\,i$$

$$x_3 = 0,4484 + 2,7574\,i.$$

P. Barbarin Bordeaux.

DÉMONSTRATION SIMPLIFIÉE

DE LA FORMULE DE TAYLOR

1. Parmi les différentes démonstrations de cette formule qui s'appuient sur le théorème de Rolle, la suivante est peut-être la plus facile, puisqu'elle n'exige que des différentiations extrêmement simples. Elle n'est pas, à ce que nous croyons, connue jusqu'à présent.

2. Considérons d'abord la différence

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \varepsilon\sigma'(x) \equiv \Gamma$$

entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle. Si, dans l'expression

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \varepsilon\sigma'(x) - \Gamma,$$

nous remplaçons ε par une variable ω et que nous multipliions Γ par $\left(\frac{\omega}{\varepsilon}\right)^2$, nous aurons la fonction suivante de ω

$$\sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \omega\sigma'(x) - \Gamma\frac{\omega^2}{\varepsilon^2},$$

qui, par la manière même dont elle a été construite, s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega = \varepsilon$; sa dérivée

$$\sigma'(x+\omega) - \sigma'(x) - 2\Gamma\frac{\omega}{\varepsilon^2}$$

s'annule donc pour une valeur ε_1 de ω $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$; mais, comme elle s'annule aussi pour $\omega = 0$, sa dérivée

$$\sigma''(x+\omega) - 2\Gamma\frac{1}{\varepsilon^2}$$

s'annulera, elle aussi, pour une valeur ε_2 de ω $(0 < \varepsilon^2 < \varepsilon_1)$, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Gamma = \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2).$$

d'où

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) = \frac{\varepsilon}{1}\sigma'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}\sigma''(x+\varepsilon_2).$$

3. Considérons maintenant, en général, la différence

$$\sigma(x+\varepsilon) - \sigma(x) - \frac{\varepsilon}{1!}\sigma'(x) - \frac{\varepsilon^2}{2!}\sigma''(x) - \frac{\varepsilon^3}{3!}\sigma'''(x) - \ldots$$

$$\ldots - \frac{\varepsilon^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) \equiv \Gamma.$$

Nous pouvons, de la même manière qu'auparavant, former la fonction suivante de ω

$$(1) \quad \sigma(x+\omega) - \sigma(x) - \frac{\omega}{1!}\sigma'(x) - \frac{\omega^2}{2!}\sigma''(x) - \ldots - \frac{\omega^r}{r!}\sigma^{(r)}(x) - \Gamma\frac{\omega^{r+1}}{\varepsilon^{r+1}},$$

dont les dérivées successives jusqu'à l'ordre $r+1$ sont les suivantes

$$\varphi'(x+\omega)-\varphi'(x)-\frac{\omega}{1!}\varphi''(x)-\frac{\omega^2}{2!}\varphi'''(x)-\ldots-(r+1)\omega^r\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\varphi''(x+\omega)-\varphi''(x)-\frac{\omega}{1}\varphi'''(x)-\ldots-(r+1)r\omega^{r-1}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\varphi'''(x+\omega)-\varphi'''(x)-\frac{\omega}{1}\varphi''''(x)-\ldots-(r+1)r(r-1)\omega^{r-2}\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi^{(r)}(x+\omega)-\varphi^{(r)}(x)-2.3\ldots r(r+1)\omega\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}},$$

$$\varphi^{(r+1)}(x+\omega)-\varphi^{(r+1)}(x)-1.2\ldots r(r+1)\frac{\Gamma}{\varepsilon^{r+1}}.$$

Ces dérivées s'annulent toutes (excepté la dernière pour $\omega=0$ et, comme la fonction Γ s'annule pour les deux valeurs de ω : $\omega=0$, $\omega=\varepsilon$, sa dérivée première s'annulera pour $\omega=\varepsilon_1$ $(0<\varepsilon_1<\varepsilon)$; mais elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée seconde de Γ, s'annulera pour $\omega=\varepsilon_2$ $(0<\varepsilon_2<\varepsilon_1)$; or, elle s'annule aussi pour $\omega=0$, donc sa dérivée ou bien la dérivée troisième de Γ doit s'annuler pour $\omega=\varepsilon_3$ $(0<\varepsilon_3<\varepsilon_2)$, et ainsi de suite ; la dernière dérivée (celle de l'ordre $r+1$) s'annulera pour $\omega=\varepsilon_{r+1}$ $(0<\varepsilon_{r+1}<\varepsilon_r<\ldots\ldots<\varepsilon)$. On a donc :

$$\varphi(x+\varepsilon)-\varphi(x)=\frac{\varepsilon}{1!}\varphi'(x)+\frac{\varepsilon^2}{2!}\varphi''(x)+\frac{\varepsilon^3}{3!}\varphi'''(x)+\ldots+\frac{\varepsilon^r}{r!}\varphi^{(r)}(x)+$$
$$+\frac{\varepsilon^{r+1}}{(r+1)!}\varphi^{(r+1)}(x+\rho\varepsilon)\quad(0<\rho<1).$$

e. q. f. d.

J. N. Hatzidakis (Athènes).

Traduit en français par N.-J. Hatzidakis (Berlin).

NOTE SUR LES LOGARITHMES

J'ai montré dans un article précédent [1] comment on pouvait définir nettement l'égalité, l'addition, la quantité et le nombre. Je voudrais, pour bien mettre en lumière l'utilité de ces définitions qui ne sont autre chose que la traduction en langage précis de l'idée que l'on se fait tout naturellement de ces notions, faire une application à la théorie des logarithmes.

Les nombres sont des quantités puisque l'on peut définir leur égalité et leur addition, mais l'addition elle-même peut être définie de bien des manières et pour éviter toute confusion appelons la multiplication des nombres une pseudo-addition, ou soit que le produit de plusieurs nombres soit leur pseudo-somme. Le produit de plusieurs nombres étant indépendant de leur ordre, on peut évidemment le considérer comme un produit, l'objet nul est alors *l'unité* ordinaire.

Parmi les objets que nous appelons nombres prenons-en un b arbitrairement que nous appellerons l'unité ou pour éviter toute confusion, la *base*, les nombres, b^2, b^3, b^4, obtenus en ajoutant (au nouveau sens du mot) la base b avec elle-même, puis b avec le résultat, etc... seront les entiers (2), (3), (4)... et b^{-1}, b^{-2}, seront les entiers (-1), (-2), (-3)... que nous enveloppons de parenthèses, pour ne pas les confondre avec les entiers ordinaires.

Pour trouver le représentant d'un nombre N non entier, c'est-à-dire, non compris dans la suite b, b^2, b^3, nous partagerons la base b en 1, 2, 3... n portions égales et nous verrons si le nombre N contient un nombre entier de ses parties or, $\sqrt[n]{b}$ est le nombre qui ajouté n fois à lui-même donne b (au nouveau sens de l'addition), le nombre formé des $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sera donc de la forme

[1] *L'Enseignement mathématique*, 1re année, p. 385-419.

$\sqrt[n]{b^m}$ et sera représenté par $\left(\frac{m}{n}\right)$. Enfin si le nombre N ne peut pas s'obtenir en ajoutant des parties aliquotes de l'unité, il sera compris entre $\sqrt[n]{b^m}$ et $\sqrt[n]{b^{m+1}}$ et sera représenté par la limite commune aux nombres $\left(\frac{m}{n}\right)$ et $\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

Le représentant (p) d'un nombre N est ce que l'on appelle son logarithme dans la base b.

Voilà donc l'existence des logarithmes démontrée et basée sur leur propriété fondamentale $\log a + \log b = \log ab$.

H. Laurent (Paris).

SUR LE THÉORÈME DES FONCTIONS COMPOSÉES

---

1. Il peut y avoir intérêt à exposer sur une figure la démonstration du théorème des fonctions composées pour le cas de deux fonctions u et v, cas important à cause de la fonction implicite. Soit $y = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de x continues et admettant une dérivée; soit $Y = f(U, V)$, U et V étant deux variables indépendantes, et supposons que cette dernière fonction admette des dérivées partielles du premier ordre, fonctions continues des deux variables U et V. Prenons trois axes de coordonnées, Ou, Ov, Oy, ou OU, OV, OY; considérons la surface $Y = f(U, V)$, et la courbe $y = f(u, v)$ tracée sur cette surface. Soit M un point de la courbe, M' un point voisin; on peut aller de M en M' par le chemin MAM' tracé sur la surface, l'élément de courbe MA étant dans le plan $V = v$, l'élément de courbe AM' étant dans le plan $U = u + \Delta u$. Les ordonnées étant $m\mathrm{M}$, $a\mathrm{A}$, $m'\mathrm{M}'$, menons $\mathrm{M}\alpha$ parallèle et égale à ma, menons $\alpha\mu$ et $\mathrm{A}\mu'$ parallèles et égales à aa'; nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta y = \overline{\mu'\mathrm{M}'} &= \overline{\mu'\mu} + \overline{\mu\mathrm{M}'} = \overline{\alpha\mathrm{A}} + \overline{\mu'\mathrm{M}'} \\ &= \frac{\overline{\alpha\mathrm{A}}}{\Delta u} \times \Delta u + \frac{\overline{\mu'\mathrm{M}'}}{\Delta v} \times \Delta v \\ &= (\mathrm{Y}'_u + \varepsilon)\,\Delta u + (\mathrm{Y}'_v + \varepsilon')\,\Delta v,\end{aligned}$$

$\overline{Y}$ étant l'ordonnée sur la courbe AM', ou, en considérant la section MB de la surface par le plan $U = u$ au lieu de la section AM' par le plan $U = u + \Delta u$,

$$\Delta y = (Y'_U + \varepsilon) \times \Delta u + (Y'_V + \varepsilon'') \times \Delta v.$$

Donc...

2. A tout prendre, il résulte des hypothèses faites que la surface $Y = f(U, V)$ a un plan tangent en M, lequel est déterminé par les tangentes en M aux deux sections MA et MB : ce plan a pour équation

$$Y = AU + BV + C,$$

A et B étant Y'_U et Y'_V ; comme la tangente en M à la courbe $y = f(u, v)$ est dans ce plan tangent, on a immédiatement

$$y' = Au' + Bv'.$$

De telles démonstrations sont repoussées par l'enseignement, peut-être à tort ; on écarte trop l'*intuition*, qui est le procédé des inventeurs, et l'on décourage les élèves qui se sentent incapables de faire des choses aussi bien *arrangées* que celles qu'on leur *apporte* en classe. On leur apprend à démontrer bien plus qu'à trouver. Moins de synthèse et plus d'analyse pourrait être un bien, et c'est ainsi que, en Géométrie, on devrait souvent *poser la question et la résoudre, après avoir montré qu'elle est bien posée*, au lieu d'énoncer le théorème au début ; je citerai comme exemple le théorème relatif au côté d'un triangle opposé à un angle aigu ou obtus, en observant que la position de la question conduit à l'emploi des segments (ou vecteurs mesurés) : on peut observer à priori que, si l'on donnait la hauteur du triangle au lieu de la projection du côté (un sinus au lieu d'un cosinus), on aurait un radical, et le vérifier.

G. Fontené (Paris).

CHRONIQUE

Congrès des mathématiciens allemands; Aix-la-Chapelle. Septembre 1900.

La réunion annuelle des mathématiciens allemands a eu lieu en commun avec le congrès des naturalistes et médecins de l'Empire à Aix-la-Chapelle du 16 au 22 septembre 1900. Les travaux annoncés ont donné lieu à d'intéressantes séances, au nombre de cinq et d'une durée de plusieurs heures chacune.

Voici la liste des communications présentées :

Première séance, présidée par M. le professeur E. Jürgens.

Mittag-Leffler (Stockholm) : Représentation analytique des fonctions monogènes à plusieurs variables indépendantes.

A. Kneser (Dorpat) : Sur le développement et l'état actuel du calcul des variations.

Ce dernier travail fait partie de la catégorie des *Rapports* que la Deutsche mathematiker Vereinigung a coutume de proposer chaque année.

Deuxième séance, présidée par M. le professeur Hilbert.

A. Wangerin (Halle) : 1) Démonstration d'un théorème sur les lignes de courbure ; 2) Détermination des surfaces à courbure constante.

P. Staeckel (Kiel) : Contribution à la théorie des lignes géodésiques.

Minkowski (Zürich) : Les notions de longueur, de surface et de volume.

Troisième séance, présidée par M. le professeur Wangerin.

H. Fricke (Braunschweig) : Sur la théorie des séries de Poincaré.

Fr. Meyer (Königsberg) : Théorèmes géométriques analogues à ceux de Pascal et de Desargues.

E. Steinitz (Charlottenburg) : Sur la théorie des groupes abéliens.

A. Schoute (Gröningue) : Sur le nombre des points, des droites, et des plans dans l'espace à n dimensions.

Quatrième et cinquième séances, présidées par M. le professeur von Mangoldt.

E. Jurgens (Aachen) : Calcul de déterminants.

E. Kötter (Aachen) : Construction de la surface du second ordre contenant neuf points donnés.

F. Meyer (Königsberg) : Sur les formes bilinéaires singulières et les relations entre déterminants mineurs.

Von Mangoldt (Aachen) : Un problème de l'Arithmétique.

F. Klein (Göttingen) : La Mécanique et la Physique dans l'Encyclopédie des sciences mathématiques.

Cette dernière communication a été présentée dans une séance commune aux sections 1 (mathématiques), 3 (physique), 5 (mathématiques appliquées) et 17 (enseignement des sciences mathématiques et naturelles). Elle a donné lieu à une intéressante discussion à laquelle ont pris part à la fois les mathématiciens, les physiciens et les ingénieurs.

Nous ne dirons rien des travaux présentés à la section 17 (enseignement des sciences mathématiques et naturelles) ; ils se rattachent les uns à l'enseignement des sciences naturelles, les autres à celui de la géographie.

Souscription pour la publication des œuvres complètes d'Eugène Beltrami.

A la mort du savant géomètre Eugène Beltrami la Faculté des Sciences de l'Université de Rome résolut de se faire l'instigatrice d'une œuvre destinée à perpétuer le souvenir de l'un de ses plus éminents professeurs. Elle réalise aujourd'hui ce projet en ouvrant une souscription dont le produit sera affecté à la publication des œuvres complètes de Beltrami et à la fondation d'un prix rappelant à la jeune génération l'illustre nom du maître. Il a semblé en effet à la Faculté que cette fondation serait le monument le plus durable et le plus digne de l'homme aussi savant que modeste dont elle déplore la perte.

Persuadée qu'ils voudront l'aider à réaliser ce projet, la Faculté s'adresse à tous les hommes de science, à tous les amis et admirateurs du grand mathématicien que fut Beltrami. On peut espérer que le nombre des adhérents sera d'autant plus grand que la Faculté leur offre le précieux avantage de pouvoir, par une somme relativement modeste, à la fois honorer un maître et acquérir ses œuvres. Les lecteurs de l'*Enseignement mathématique* [1] ont pu prendre connaissance de la liste des travaux de Beltrami. Ses œuvres ne fourniront pas moins de trois à quatre volumes comprenant un total d'environ 2 000 pages in-4°.

Les contributions sont recueillies par M. Isaia Sonzogno, segretario della Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, Piazza san Pietro in Vincoli, 5, Roma.

Le souscripteur qui enverra une contribution non inférieure à 50 francs en or aura droit à un exemplaire des œuvres complètes.

---

[1] *Eug. Beltrami, sa vie et ses œuvres*, par G. Fratini, n° 3, 2e année, p. 173-179.

Les périodiques mathématiques des États-Unis.

L'*American Journal of Mathematics* est assez connu pour qu'il suffise de rappeler qu'il a été fondé à Baltimore en 1878, par J.-J. Sylvester sous les auspices de la Johns Hopkins University et qu'il a été continué, depuis 1885, par les professeurs Simon Newcomb and Thomas Craig. Le volume actuellement en cours de publication (t. 22) est dirigé par Simon Newcomb avec la collaboration de A. Cohen, Frank Morley, Charlotte A. Scott, etc.

La société mathématique de New-York (*New-York mathematical Society*), fondée en 1891, publie dès sa première année, sous le titre de *Bulletin*, une revue historique et critique des sciences mathématiques ; cette publication paraît chaque mois, excepté en août et en septembre. En 1894 le nom de la société, et par conséquent celui du bulletin ont été changé en celui de *American mathematical Society*. Le bulletin a eu pour rédacteur en chef, jusqu'en 1899, M. Thomas S. Fiske, et depuis cette année il est dirigé par M. F.-N. Cole avec la collaboration de MM. A. Ziwet, F. Morley et O. Lovett.

L'an dernier la Société a décidé de publier, outre le *Bulletin*, une revue trimestrielle intitulée *The Transactions of the American mathematical Society* et consacrée uniquement aux recherches appartenant au domaine des mathématiques pures et appliquées. Le comité de rédaction est composé de MM. les professeurs E.-H. Moore (Chicago), E.-W. Brown (Haverford) et T.-S. Fiske (New-York). Les deux premiers numéros parus comprennent plus de 250 pages in-4°. Nos lecteurs en trouveront le sommaire dans le *Bulletin bibliographique* du présent numéro.

Une autre revue également consacrée aux mémoires originaux, mais d'un degré un peu moins élevé, a pour titre The Annals of Mathematics. De 1884 à 1899 douze volumes ont été publiés sous les auspices de l'Université de Virginia par M. le professeur Armand Stone avec la collaboration de plusieurs savants américains. Depuis un an ce journal est publié sous les auspices de la *Harvard University*. Dans cette nouvelle série une place importante sera faite au côté pédagogique. Elle est dirigée par MM. les professeurs O. Stone, W.-E. Byerly, H.-S. White, W.-F. Osgood, et M. Bôcher ; ces noms nous suffisent pour assurer à la revue des travaux de premier ordre.

Les *Annals of Mathematics* ne sont que la continuation d'un périodique publié de 1874 à 1883, par MM. J.-E. Hendricks (des moines, Jowa) sous le titre *The Analyst*.

Au milieu du dix-neuvième siecle plusieurs tentatives ont été faites pour fonder des journaux ayant principalement pour but de proposer et de résoudre des problèmes mathématiques. Mais aucun de ces journaux n'a eu une longue existence. Le meilleur était le *Mathematical Monthley* publié par J.-D. Runkle pendant les années 1859, 1860 et

1861. Actuellement il existe plusieurs périodiques poursuivant le même but et publiant la discussion de problèmes empruntés aux mathématiques élémentaires ; mais, les problèmes proposés sont souvent plus curieux qu'instructifs. Parmi les revues qui appartiennent à cette catégorie, celle qui a le plus de succès est certainement l'*American mathematical Monthley* ; elle a été fondée il y a sept ans et a pour directeurs MM. B.-F. Finkel (Sprinfield) et J.-M. Colaw (Monterey). Il y a lieu de signaler en outre le *Mathematical Visitor* publié depuis 1877 par M. Artemas Martin et consacré surtout à l'Algèbre élémentaire et au Calcul des probabilités, et le *Mathematical Magazine*, publication trimestrielle paraissant depuis 1882.

Œuvres complètes de Gauss.

La publication des œuvres de Gauss, interrompue pendant près de vingt ans par suite d'une série de circonstances défavorables, va pouvoir être menée à bonne fin, grâce à l'initiative de MM. F. Klein, Brendel, Fricke, Staeckel et d'autres, avec le bienveillant concours de la *Société royale des sciences* de Göttingue.

Aux six volumes parus de 1870 à 1880 viendront s'ajouter encore quatre volumes.

Le tome VII, actuellement sous presse, contiendra le célèbre mémoire intitulé *Theoria motus* et l'ensemble des recherches de Gauss sur le calcul des perturbations en astronomie.

Le tome VIII comprendra une série de notes non encore publiées et se rapportant à l'Arithmétique, à l'Analyse, au Calcul des probabilités et aux recherches sur les fondements de la Géométrie.

Dans le tome IX seront réunis les notes complémentaires relatives à la Physique mathématique et travaux concernant la Géodésie.

Enfin, le tome X sera consacré à la biographie et à la correspondance mathématique de Gauss.

CORRESPONDANCE

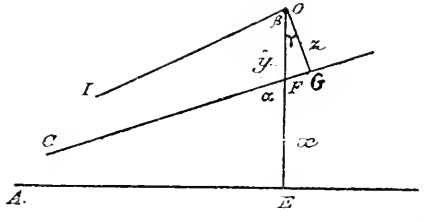
Gand, le 3 octobre 1900.

Cher Collègue,

La démonstration du postulatum d'Euclide insérée pages 385-388 du tome II de *L'Enseignement mathématique* et due à M. Tikhomandritzky ne me semble pas exacte. Posons, en effet,

$$x = \text{EF}, \quad y = \text{FO}, \quad z = \text{GO};$$

soient $\text{CFE} = \alpha$, $\text{IOG} = \beta + \gamma$, les angles d'asymptotisme (parallélisme lobatchefskien) de FC avec AE et de IO avec CG, OE étant perpendiculaire à AF et OG à CF ; γ étant l'angle FOG.



On aura

$$\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} y} = \sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \cos\gamma = \frac{\operatorname{Th} z}{\operatorname{Th} y},$$

$$\sin(\beta+\gamma) = \frac{1}{\operatorname{ch} z}, \qquad \cos(\beta+\gamma) = \operatorname{Th} z.$$

En éliminant entre ces équations z et γ, on trouve

$$\operatorname{ch} y = \sin\beta \operatorname{ch} x + \cos\beta \operatorname{sh} y,$$

d'où l'on tire β

$$\sin\beta = \frac{1}{\operatorname{ch}(x+y)}, \qquad \cos\beta = \operatorname{Th}(x+y).$$

Il résulte que OI est asymptote de FA, en même temps qu'asymptote de CG. Donc dans la figure de la page 386, quand OI devient infini, OK devient aussi infini, contrairement à ce que dit, page 387, ligne 33, le savant analyste de Kharkof.

Votre dévoué,

P. Mansion.

BIBLIOGRAPHIE

Les Mathématiques en Portugal au XIX^e^ siècle. *Aperçu historique et bibliographique*, par Rodolphe Guimarães, Lieutenant du Génie, Membre de l'Académie des Sciences de Lisbonne, 1 vol. in-4°. 168 pages ; Coïmbre, Imprimerie de l'Université, 1900.

M. R. Guimarães a été chargé par le Commissaire Royal du Portugal, à l'occasion de l'Exposition Universelle de 1900, de publier un *Aperçu historique et bibliographique des Mathématiques en Portugal au* XIX^e^ *siècle*. Ses nombreux, variés et appréciés Mémoires lui donnaient l'autorité nécessaire pour présenter les travaux de ses compatriotes. On peut dire qu'il s'est acquitté de cette délicate mission avec talent et impartialité, en analysant les Mémoires originaux d'une manière assez détaillée pour permettre au lecteur de se rendre compte de leur portée et en donnant les titres des Ouvrages destinés à tous les ordres d'enseignement. C'est avec intérêt qu'on parcourt son travail, parce que l'activité des mathématiciens portugais s'est portée sur les principales questions modernes et que l'on y rencontre des recherches dignes de fixer l'attention des savants.

Sans insister sur l'utilité des travaux analogues à celui de M. Guimarães, remarquons qu'il est bon qu'à certaines époques, des savants prennent la peine de présenter au public les analyses des travaux entrepris pendant leur siècle dans les diverses branches des Sciences, comme cela a été fait en France, il y a trente ans, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, car ces analyses sont utiles à ceux qui font des recherches, en leur montrant les résultats obtenus et ce qui reste encore à trouver.

M. R. Guimarães donne d'abord un aperçu succinct des découvertes mathématiques faites depuis un siècle et demi. Dans son travail on voit appréciées avec de très exactes expressions, bien que succinctes, les immortelles découvertes des Euler, Laplace, Gauss, Cauchy, Weierstrass, Hermite, Poincaré,... en Analyse, et des Monge, Carnot, Poncelet, Chasles, Steiner, Riemann,... en Géométrie. L'Auteur présente ensuite l'historique des progrès que les Mathématiques ont faits en Portugal à partir du XVI^e^ siècle, en montrant les efforts de Pedro Nunes, au XVI^e^ siècle, et de Azevedo Fortes, au XVIII^e^ siècle, pour organiser en Portugal l'Enseignement mathématique : en analysant les écrits sur l'Astronomie de J.-J. Soares de Ramos Vasconcellos et de Monteiro da Rocha, et ceux sur la Géométrie et sur la Mécanique de Anastacio de Cunha, au XVIII^e^ siècle. Il fait enfin tous ses efforts pour montrer l'importance des travaux mathématiques de ses compatriotes pendant le XIX^e^ siècle, en suivant le classement du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Quelques-uns des écrivains contemporains dont les travaux sont analysés, ont déployé une très grande activité. Ainsi, M. F. Gomes Teixeira, qui a

fondé le *Journal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, remarquable par la valeur des articles et contribuant puissamment à maintenir le goût des Mathématiques en Portugal, s'est en outre distingué par des Mémoires estimés sur les imaginaires, les dérivées, les intégrales, les séries, la mécanique analytique; M. A. Schiappa Monteiro, qui a dirigé ses efforts sur presque toutes les branches des Sciences mathématiques et qui a le don de réussir en envisageant les questions sous un aspect très général, a donné, à côté de Mémoires originaux sur des questions élevées, de remarquables solutions de problèmes pour l'Enseignement secondaire; M. J.-Pedro Teixeira s'est occupé avec utilité des fonctions elliptiques; M. J.-M. Rodrigues, qui a surtout porté ses efforts sur les questions de balistique, a écrit des Mémoires et des Ouvrages utiles et bien appréciés; M. Marroas Ferreira a cultivé notamment la mécanique appliqué et a obtenu des résultats vraiment intéressants; M. F. Oom a donné un exposé, qui est à consulter, des observations méridiennes de la planète Mars, faites par lui et par M. G.-A. Campos Rodrigues à l'Observatoire royal de Lisbonne, pendant l'opposition de 1892; M. R. Guimaraès, dont les travaux se distinguent par la précision et la clarté, a publié des Mémoires pleins d'intérêt sur divers sujets importants et notamment sur les coniques et les quadriques.

Il reste encore beaucoup d'autres Auteurs de recherches mathématiques importantes; je les prie de me pardonner de ne pas citer leurs noms dans ce compte rendu, qui déjà dépasse les limites qui m'ont été assignées.

En résumé, le beau travail de M. R. Guimaraès montre que le Portugal est digne d'occuper un rang honorable parmi les nations qui cherchent à étendre les limites de la Science.

ERNEST LEBON (Paris).

MARCEL BRILLOUIN. — **Mémoires originaux sur la Circulation générale de l'Atmosphère.** — 1 vol. in-8° de XX-165 pages. 1900. Georges Carré et C. Naud, Éditeurs. Prix : 6 francs.

Le titre du recueil que M. Marcel Brillouin présente aujourd'hui aux météorologistes quelque peu théoriciens, aux astronomes et, je le crois aussi, aux géomètres indique d'une façon fort claire le but poursuivi. Il s'agit de faire connaître l'état actuel d'une question aussi utile que difficile.

L'étude du mouvement des fluides recouvrant les planètes présente à un haut degré des difficultés comparables à celles qu'offrent les problèmes de la Mécanique Céleste proprement dite avec cette circonstance aggravante que les dispositions naturelles facilitant les approximations sont moins nombreuses encore.

Les mouvements marins et aériens que nous observons à la surface de notre globe étant dus à son mouvement de rotation, à l'inégale distribution de la chaleur solaire, à l'influence perturbatrice des masses du Soleil et de la Lune, il serait bien désirable que l'on puisse d'abord démeler les différents effets dus à ces différentes causes.

Ainsi envisagé le problème n'est pas encore résolu.

Les premières explications voyaient uniquement la cause des vents dans la répartition variable de la chaleur du Soleil à la surface de la Terre; d'autres, récentes celles-là, attribuent tout à la rotation de la Terre quoiqu'il semble probable que la vérité soit en un juste milieu.

Dans l'ouvrage de M. Marcel Brillouin, les mémoires de Halley, Hadley, Maury, Ferrel, Siemens, Moller, Oberbeck, Helmholtz défilent sous nos yeux.

Tout d'abord nous voyons l'astronome Halley expliquer les vents d'Est observés dans les Océans Atlantique, Ethiopique et Pacifique d'une façon assez bizarre. D'après lui l'air a une marche générale de l'Est à l'Ouest parce qu'il suit le point où sa densité est la plus faible, point qui conserve toujours le Soleil à son zénith et fait naturellement le tour de notre planète en un jour solaire vrai. Si Halley pense à la rotation de la Terre c'est plutôt pour en contester l'influence.

Cinquante ans plus tard, Hadley offre une explication plus rationnelle. L'air froid qui marche des pôles vers l'équateur s'éloigne de plus en plus de l'axe de rotation de la Terre si bien que sa vitesse dans le sens des parallèles diminue de plus en plus d'après le principe des aires, et qu'il reste en arrière des corps invariablement fixés au sol et entraînés de ce fait vers l'Est. Le résultat apparent est le vent d'Est qu'il s'agissait d'expliquer.

C'est plus d'un siècle après Hadley qu'arrivent les explications sinon très remarquables du moins très remarquées de Maury. Son successeur, Ferrel, le juge assez sévèrement et M. Marcel Brillouin en fait autant aujourd'hui.

Maury est ce que Laplace appelle « un partisan des causes finales ». Il admirerait volontiers la divine Providence qui a fait passer les cours d'eau au milieu des villes. Cet esprit religieux qui porte sans cesse à prendre les effets pour les causes et à voir dans l'harmonie universelle non pas des adaptations successives faisant dériver le compliqué du simple, mais tout d'abord des faits intangibles auxquels il faut subordonner tous les autres, Maury le possède à un très haut point, ou, ce qui est à mon avis une façon beaucoup plus exacte de parler, en est possédé.

Maury célèbre la sagesse du Créateur parce qu'il y a d'immenses océans pour alimenter les fleuves. Il ne lui vient pas à l'idée que si la Terre s'était trouvée à l'origine dans des conditions astronomiques différentes, telles, par exemple, que le volume de l'eau des océans fut réduit notablement, il y aurait eu un autre régime hydrographique et qu'à supposer que des êtres pensants aient pu s'adapter et se développer dans ces conditions, le fait même de leur adaptation aurait pu faire trouver à ceux d'entre eux n'en ayant pas conscience qu'ils ont été l'unique souci d'un Créateur qui a arrangé à leur usage tout le système du monde. Les idées religieuses de cette nature qui sont encore d'une ténacité si incompréhensible et tout à fait hors de proportion avec le peu de difficulté qu'il y a à les réfuter depuis l'avènement des théories évolutionnistes, abondent dans le travail de Maury, et M. Marcel Brillouin a grandement raison de dire que « ce qui lui appartient en propre est de pure fantaisie ».

Avec Ferrel nous tombons dans le positivisme analytique moderne. Dans son second mémoire surtout, il essaye de se tenir sur le terrain de la Mécanique rationnelle et arrive à des résultats de très grande valeur. Il part des équations générales de l'Hydrodynamique appliquées au mouvement relatif d'un fluide à la surface d'une planète sphérique et parfaitement polie, et arrive à ce résultat intéressant qu'une pareille planète posséderait des calottes polaires totalement dépourvues d'atmosphère.

En réalité la Terre n'est ni sphérique ni parfaitement polie ; de plus l'action perturbatrice de la chaleur solaire doit déranger beaucoup les

choses. Il n'en est pas moins vrai que ce mémoire de Ferrel constitue un monument analytique aussi intéressant que remarquable et que son auteur a eu le premier le grand honneur d'introduire le calcul dans la question, marchant ainsi devant Siemens, Moller, Oberbeck et Helmholtz.

Il est bien difficile de donner ici une idée des travaux de ces quatre derniers. Il faudrait reproduire de longs passages de leurs mémoires et beaucoup de formules. C'est maintenant la même idée qui domine, et attribue les mouvements de l'atmosphère à l'influence, sinon unique, du moins prépondérante de la rotation de la Terre. Ce difficile problème de mouvement relatif est traité avec une perfection de plus en plus grande, et c'est pourquoi je disais en commençant que le recueil de M. Marcel Brillouin était susceptible d'intéresser les géomètres.

Le mémoire de Helmholtz termine admirablement le livre. L'illustre savant traite la question extrêmement intéressante des couches atmosphériques annulaires supposées à des températures différentes et tient compte de l'influence de la viscosité.

Il y a là une partie peu connue de l'œuvre de Helmholtz. Puisse-t-elle, comme M. Marcel Brillouin en exprime l'espoir, sous l'influence des nouveaux progrès de la Mécanique des fluides, notamment de ceux dus à M. Boussinesq, devenir une théorie achevée, première approximation heureuse de la théorie générale relative à la Terre telle qu'elle est.

A. Buhl (Paris).

Alexis Bertrand. — **Les études dans la démocratie**: 1 vol. in-8° (Biblioth. de Philosophie contemporaine) 288 p.; prix 5 fr.; Paris, F. Alcan, 1900. »

Ce livre, fondé sur une longue expérience, construit avec une logique précise, vient combler une lacune en projetant une vive lumière sur des questions d'éducation et d'enseignement de la plus grande actualité.

On pourrait dire qu'il fut écrit en réponse à cette déclaration de M. Fouillée : « il est incroyable que le pays qui a vu naître Descartes et A. Comte, qui a reçu d'eux la plus haute des conceptions de la science et de l'enseignement scientifique, n'ait pas encore fait un effort sérieux pour transporter cette conception dans ses lycées et ses universités. Ce serait pourtant là une œuvre originale et vraiment nationale en même temps qu'humaine. »

Il semble qu'aujourd'hui même, après un siècle de travaux sans nombre, on n'en soit arrivé en fait de science universelle qu'à des encyclopédies, en fait d'enseignement qu'à des manuels, sortes de fossiles de la vie intellectuelle. Le savant cherche, trouve et invente ; c'est bien. Les sciences s'enrichissent de faits nouveaux, d'expériences précises, de lois condensatrices. Cependant, peu de gens s'occupent à tasser les connaissances acquises, à les résumer, à les coordonner ; extraire de celles-ci la substance fortifiante pour les jeunes intelligences semble une besogne indigne d'un grand cerveau. En un mot, on crée de la science, mais on néglige de créer des esprits.

Qui serait maître de l'éducation, disait Leibniz, changerait la face du monde. Il y a là de quoi tenter une noble ambition. Pourtant jusqu'ici la routine et l'opinion ignorante ou paresseuse ont disposé d'une force d'inertie suffisante pour empêcher l'orgueil humain dans sa marche sur cette voie.

Un mouvement se produit à l'heure actuelle qui tend à faire de la science éducatrice la première des recherches dont l'esprit humain puisse s'occuper. Il semblait, jusqu'ici que ce mouvement fût un indice timide d'une revendication à peine osée ou peu désireuse d'aboutir. Une triple opposition l'empêchait : celle des universitaires au nom des traditions, celle des congrégations au nom des intérêts et par peur de l'inconnu, celle de l'esprit public au nom de l'ignorance qui préfère mille fois la routine à des innovations qui forcent à réfléchir et à se déterminer. L'opposition sous ces trois formes subsiste encore, mais il s'est trouvé un universitaire assez hardi, pour se servir de sa situation éminente, à la fin de jeter avec succès les bases d'un enseignement qui pût convenir aux besoins de la génération nouvelle, à la vie « d'un français, né aux dernières heures du dix-neuvième siècle, citoyen d'une démocratie républicaine ».

M. A. Bertrand, dans son beau livre documenté, aux renseignements précis, aux vues originales et profondes, où les faits présentés se trouvent reliés par une dialectique d'une merveilleuse clarté, prend les sciences comme fondements de la cité scolaire future.

Le chapitre préliminaire des « Etudes dans la démocratie » est tout un programme de réformes résumées. Nous nous y arrêterons, avant de pénétrer à l'intérieur même du nouvel édifice, dont M. A. Bertrand nous donne le plan.

Tout d'abord, l'auteur prend une précaution indispensable en ce temps de réaction utilitariste : il ne vient pas proposer un modèle d'école-atelier, où l'on parodierait naïvement la vie ; il redoute les « bataillons scolaires de l'industrie et du commerce » ; il ne prône aucunement « un enseignement prématurément professionnel, technique et, comme on dit, anglo-saxon ».

Voilà qui est bien entendu. Cependant M. A. Bertrand reconnaît que « la science elle-même doit son origine et ses progrès beaucoup moins à la curiosité spéculative qu'à des mobiles très intéressés : l'Arithmétique est née des échanges commerciaux... Ce n'est pas la Physiologie qui a donné naissance à la Médecine, ni la Sociologie qui a créé la Politique : c'est le contraire qui est vrai. Partout la nécessité mère d'invention : partout l'intérêt, besoin profond, stimulation permanente, âme très matérielle des plus hautes recherches et des plus abstruses découvertes ».

Le premier métier qu'on doit apprendre à l'homme c'est le métier d'homme ; c'est pourquoi M. A. Bertrand considère comme urgent de vivifier les humanités qui étouffent sous une poussière plusieurs fois séculaire, empêchant l'air de notre temps d'y pénétrer. Il faut « organiser les humanités scientifiques, parce que les sociétés modernes vivent de science et non pas de beau langage grec ou latin ». Cette pensée est suivie d'une remarque d'une grande justesse, que souligneront tous ceux ayant eu charge d'examens ; c'est qu'à l'heure actuelle, « de toutes nos sciences, nous paraissons encore plus surchargés et accablés qu'enorgueillis. Nous ne savons pas leur faire produire toute la vertu éducatrice qu'elles recèlent ».

C'est là pour moi un des passages les plus frappants d'un livre qui ne les compte pas au lecteur ; originalité et acuité dans l'observation s'y rencontrent à la fois. Considérer les sciences comme susceptibles de faire un apport à l'éducation, leur donner une action sur l'homme dans les profondeurs de sa volonté, leur permettre peut-être de changer notre ligne de conduite dans la vie, c'était une audace.

M. A. Bertrand explique, tout au long, les raisons de son choix. Un avantage incontestable des humanités scientifiques, est tout d'abord, que « les éléments des sciences font partie intégrante de la science même ».

Celui qui les possède a, si j'ose dire, commencé sa fortune intellectuelle. Comparez avec l'étude des langues anciennes : ici les moyens sont distincts de la fin... Il reste que l'étude des grammaires est un moyen, non un but, mais un moyen dont il est impossible de se passer et qui exige de la part du jeune esprit une dépense, en grande partie improductive, de nerf et de moelle. Qui se livre à l'étude de l'Arithmétique en sait promptement sur les quatre règles autant que Descartes et Newton : le moyen se confond ici avec la fin.

Un bon éducateur doit agir comme un bon général ; si l'un ménage ses troupes, avant leur arrivée sur le champ de bataille, afin de leur permettre un effort utile à l'heure où il faudra le donner, l'autre devra considérer avec attention la longueur de la route à suivre par l'enfant ou par l'adolescent avant leur arrivée dans une carrière définitive ; les années de la jeunesse sont précieuses : il faut les ménager pour ne pas créer une génération d'hommes lassés et timorés, dépourvus d'initiative, apeurés devant les responsabilités possibles.

Les sciences ont ici un avantage marqué sur les langues anciennes et la Philosophie ; plus intimement unies à la vie que celles-ci, différence que les siècles accentueront encore, leur étude fait gagner du temps à l'élève. « Ce que la science recèle de beau et de bon, ce qu'elle contient d'esthétique et de moral, par ce seul fait que la science est souverainement vivante et agissante, possède une puissance irrésistible par la continuité même de son action. Cette puissance il faut la reconnaître et l'utiliser. »

Placer au centre des études celles qui sont baignées le plus par les réalités est une entreprise légitime. Copernic mit le soleil au centre du monde et les conséquences de ce déplacement mental furent immenses dans l'esprit de l'homme. Le « copernicisme pédagogique » de M. A. Bertrand sera « peut-être un trait de lumière » pour l'enseignement français ; nous le souhaitons vivement.

Après nous avoir fait visiter d'une manière rapide l'édifice tout entier du nouvel enseignement qu'il nous révèle, M. A. Bertrand trouve qu'il est bon d'examiner d'une façon particulièrement attentive, ses fondations et son sommet. La base : les mathématiques, est faite pour nous plaire, il va sans dire ; à cause de nos préférences mêmes, nous considérerons en détail les arguments contraires à ce choix : « n'y a-t-il pas, contradiction et impossibilité à commencer les études secondaires par les mathématiques, puisque les abstractions ne conviennent pas aux enfants et guère aux adolescents ? »

Abstraire, c'est modifier la vérité pour mettre en saillie, suivant une sélection voulue, quelques-unes de ses arêtes et quelques-uns de ses contours effacés, ce qui suppose une connaissance approfondie des faits tels que le monde les présente. L'abstraction suppose une observation précise et continuelle, alors que l'enfant porte vaguement ses regards à la surface des choses. Les mathématiques ne sont-elles pas au seuil des études secondaires « le sphinx redoutable qui semble en défendre d'abord et en interdire l'entrée » ?

Il faut bien le dire, arrivé à ce point de son œuvre, on se demande avec

un vif intérêt comment l'auteur va se retourner contre les arguments contraires qu'il semble avoir amassés comme à plaisir à la base de son édifice. Sa réplique est aisée : « qu'on veuille bien se rappeler que l'élève qui aborde les études secondaires n'est ni tout à fait un enfant ni tout à fait un ignorant. Il a douze ans et peut-être quatorze ans, il a fait de solides études primaires, complétées s'il est nécessaire par une année préparatoire d'enseignement primaire supérieur ».

Éveiller l'attention d'un jeune esprit devant le spectacle des faits, des choses et des êtres est le problème social qu'il importe peut-être le plus de bien résoudre ; c'est en quelque sorte donner la poussée initiale qui lancera l'homme confiant et fort sur les grands chemins lumineux pour atteindre un but lointain qu'il voit déjà, ou bien tout au contraire le dirigera vers la région des brumes, où le froid, l'obscurité, le doute, la désespérance l'accableront bientôt en anéantissant sa personnalité. M. A. Bertrand compte trop, si mes souvenirs de jeunesse sont exacts, sur l'enseignement primaire, comme œuvre d'initiation à la vie de l'esprit.

On apprend bien au jeune élève à faire « zéro faute » dans une dictée, à réciter très vite des vers qu'il ne comprend pas, à résoudre des problèmes par clichés ; mais son esprit ne s'y ouvre pas au grand air de la réflexion. Son cerveau gît dans une poussière d'observations qu'il est nécessaire plus tard de chasser des lieux où elle s'était introduite sans crier gare ; ses yeux obscurcis et fatigués, ayant pris l'habitude de se fermer au monde lumineux qui les entoure, devront tout d'abord être soignés pour être dirigés ensuite vers le monde intellectuel du raisonnement, des expériences et des observations personnelles, où l'esprit se développe parce que sans cesse on lui fait un appel et qu'on lui trouve un nouvel emploi.

Cette simple restriction apportée à l'éloge des idées de M. A. Bertrand, je reviens à son copernicisme. Il y a dans l'enseignement secondaire, remarque-t-il, deux études essentielles : les langues et les sciences ; j'ajouterai même que si les langues font vivre avec l'humanité, les sciences font vivre avec l'Univers. La science est véritablement une langue avec laquelle on pense et que l'on comprend dans le monde entier ; aussi très justement M. A. Bertrand donne le pas aux sciences sur les langues. « Or, il n'y a pas d'études scientifiques sans une initiation mathématique. » L'auteur suit alors dans le développement de ses idées, la voie tracée par M. Laisant, dans son beau livre « La Mathématique ; Philosophie ; Enseignement », non sans faire un habile appel à des philosophes d'Écoles et de temps bien différents, comme Maine de Biran et Malebranche. Il est curieux d'entendre ce dernier s'écrier : « Pauvres enfants ! on vous élève comme des citoyens de l'ancienne Rome ; vous en avez le langage et les mœurs. On ne pense point à faire de vous des hommes raisonnables. » Et l'on sent dans cet admirable chapitre qui a pour titre « La Base : les Mathématiques », que M. A. Bertrand veut faire des hommes raisonnables, en les intéressant dès leur enfance à des études rendues vivantes. Simplifier et animer l'enseignement voilà la première tâche de l'éducateur contemporain.

« Simplifier, c'est en mathématiques substituer à un mécanisme de théorèmes un organisme d'intuitions ; plus simplement présenter la science comme un organisme, c'est-à-dire comme un tout naturel, c'est faire appel au jugement plus qu'à la mémoire, et compter sur l'enchaînement des idées plutôt que sur leur emmagasinage. »

Il faut permettre à l'élève de s'orienter, c'est-à-dire de comprendre l'importance de chaque théorème, en se rendant compte « de la place précise qu'il occupe dans un tout harmonieux » ; et M. A. Bertrand conseille l'emploi des moyens proposés par M. Laisant : « le professeur de mathématiques fera un usage systématique des introductions et des résumés... Avant d'aborder chaque chapitre un peu important de la science que l'on étudie, on exposerait sous une forme résumée quel en est l'objet essentiel, pourquoi tel chapitre présente un intérêt, dans quelles circonstances on pourra avoir à en faire application et comment on se propose d'accomplir l'exploration que l'on a en vue. La route étant ainsi jalonnée d'avance, la compréhension des choses sera plus naturelle, l'esprit d'initiative et de recherche s'ouvrira plus facilement, tandis que souvent des esprits, même bien doués, ne peuvent surmonter certaines difficultés ni comprendre certains théorèmes, parce qu'ils marchent comme dans la nuit, sans fil conducteur, sans pouvoir deviner le lien qui existe entre les propositions successives qu'on fait passer sous leurs yeux. » M. A. Bertrand ajoute aux idées profondes de M. Laisant des remarques personnelles : « les leçons de révision ou de résumés seront l'utile complément des leçons d'introduction et représenteront la part d'initiative des élèves » : que ceux-ci « soient invités à retracer à grands traits le chemin parcouru, à montrer d'où l'on est parti, où l'on est arrivé, à rappeler dans leur enchaînement les propositions essentielles, en laissant les autres dans une ombre relative ». En un mot, le jeune homme doit être l'artisan de sa pensée et non pas le scribe qui met en place et en ordre les papiers et les mémoires qui lui sont confiés sans en connaître l'esprit.

Si l'auteur des « Études dans la démocratie », prend les mathématiques comme base de son édifice, il tient à revenir pourtant sur l'usage qu'il compte en faire ; il les considère plutôt comme « le ciment qui unit et qui maintient ». Je tiens à rapprocher l'idée de M. A. Bertrand des vues de M. Poincaré, tirées d'une magistrale étude sur les rapports de l'analyse et de la physique mathématique : « Toutes les lois sont donc tirées de l'expérience : mais pour les énoncer, il faut une langue spéciale ; le langage ordinaire est trop pauvre, il est, d'ailleurs, trop vague, pour exprimer des rapports si délicats, si riches et si précis. Voilà donc une première raison pour laquelle le physicien ne peut se passer des mathématiques : elles lui fournissent la seule langue qu'il puisse parler... Et ce n'est pas une chose indifférente qu'une langue bien faite. »

Les mathématiques fournissent une langue unique, claire, riche et précise à toutes les sciences ; à la faveur de cette communauté de langue, des rapports plus étroits s'établissent entre elles. L'élève verra se dérouler, à leur faveur, la chaîne de ces rapports qu'il pourra saisir pour se guider à travers la science.

On a trop abusé en France des études considérées comme des ornements de l'esprit, ou des décorations intellectuelles ménageant l'entrée des carrières libérales ; elles doivent jouer désormais un tout autre rôle : préparer la vie. M. A. Bertrand n'a pas manqué d'atteindre ce défaut de la cuirasse de notre enseignement actuel : « il faut qu'à quelque moment qu'un élève interrompe ses études, sa science puisse lui servir et le suivre dans la vie et pour obtenir ce résultat il n'est qu'un seul moyen ; combiner toujours les lois de l'abstrait avec les exigences du concret ».

Il est un reproche que l'on adresse bien souvent aux mathématiques et

qu'elles ne méritent certainement pas, c'est de faire disparaître la poésie des âmes; je crois avec M. A. Bertrand que la science ne chassera de l'art que l'ignorance, et j'ajouterai à ce sujet qu'il est bien regrettable de constater chez les artistes une sorte de mépris pour les sciences, alors que celles-ci, ayant étendu le pouvoir de l'homme sur la nature, faisant corps avec lui, en lui et non pas en dehors de lui dans un agrandissement de tout son être, prêteraient à l'Art leur documentation inestimable sur la vie. L'artiste saurait ainsi, au cours de ses déformations esthétiques, sur quel fond solide et précis repose la forme qui le séduit et l'attire.

Si suivant Maine de Biran, il n'est pas difficile de prouver que l'attention et la réflexion sont des qualités vraiment morales, « la science serait moralisatrice par elle-même, et le savant, comme tel, un professeur d'énergie ». M. A. Bertrand soutient cette thèse avec éloquence, à la fin de la dernière partie de son livre.

A l'appui de ses merveilleux arguments, ne pourrions-nous dire qu'au fond, la science, c'est l'humanité en possession de tout le savoir, qui l'agrandit. A la faveur de cet agrandissement, l'homme arrivera sans doute à concilier les moyens de se déterminer le mieux possible pour lui, avec les moyens de se bien conduire vis-à-vis des hommes.

DESAINT (Paris).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. XXXI : Paris, Gauthier-Villars, 1900.

N° 1 (2 juillet). — DARBOUX : Communication relative à l'Association internationale des académies. — J. BOUSSINESQ : Échauffement permanent, mais inégal, par rayonnement, d'un mur d'épaisseur indéfinie, ramené au cas d'un échauffement analogue par contact. — A. KORN : Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — G. FLOQUET : Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. — H. LE CHATELIER : Sur la propagation des ondes condensées dans les gaz chauds.

N° 2 (9 juillet). — J. BOUSSINESQ : Problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement, ramené au problème plus simple de l'échauffement de la même sphère par contact. — G. FLOQUET : Sur les équations du mouvement d'un fil en coordonnées quelconques. — C. GUICHARD : Sur certaines équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — LEVI-CIVITTA : Sur l'instabilité de certaines substitutions. — A. BERGET : Démonstration de la rotation de la Terre, par l'expérience de Foucault réalisée avec un pendule de 1 mètre.

N° 3 (16 juillet). — LEVI-CIVITA : Sur l'instabilité de certaines solutions

périodiques. — L. Kollros : Sur les formes bilinéaires ternaires d'Hermite.

N° 4 (23 juillet). — H. Poincaré : Rapport sur le projet de revision de l'arc méridien de Quito. — Levi-Civita : Sur le problème restreint des trois corps. — W. Ebert : Sur un système d'équations différentielles qui équivaut au problème de n corps, mais admet une intégrale de plus. — L. Lecornu : Sur le volant élastique.

N° 5 (30 juillet). — A. Demoulin : Sur deux surfaces qu'on peut associer à toute surface de Weingarten.

(Les numéros 6 à 9 ne contiennent pas de mémoires mathématiques.)

N° 10 (3 septembre). — Tzitzeica : Sur les équations de Laplace à solutions quadratiques. — P. Painlevé : Sur les singularités des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions définies par les équations différentielles.

N° 11 (10 septembre). — P. Painlevé : Sur les systèmes différentiels à intégrale générale uniforme.

N° 12 (17 septembre). — Maurice d'Ocagne : Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré.

Bulletin de la Société mathématique de France ; t. XXVIII. 1900. Gauthier-Villars.

Fasc. 3. — E. Picard : Sur un exemple d'approximations successives divergentes. — Caspary : Sur le centre de gravité d'un quadrilatère. — C. Stormer : Sur une propriété arithmétique des logarithmes des nombres algébriques. — M. d'Ocagne : Problème de partition. — Le Roux : Sur un invariant d'un système de deux triangles et la théorie des intégrales doubles. — Baire : Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues. — Demoulin : Sur la torsion d'une courbe définie par son plan oscultatène.

Journal de mathématiques pures et appliquées, fondé par J. Liouville ; 5e série, publiée par C. Jordan ; t. VI ; prix d'abonnement annuel : Paris, 30 fr., Départements et Union postale, 35 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

Fasc. 2. — Gordan : Les invariants des formes binaires. — L. Autonne : Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati. — P. Dubem : Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch. — Ed. Maillet : Sur les équations indéterminées à deux et trois variables qui n'ont qu'un nombre fini de solutions en nombres entiers.

American Journal of mathematics, edited by S. Newcomb ; vol. XXII ; prix d'abonnement annuel : 5 dollars ; Baltimore, Johns Hopkins press, 1900.

N° 3 (Juillet). — E.-J. Wilczynski : On continuous Binary Linearoid Groups, and the Corresponding Differential Equations and V Functions. — E.-O. Lovett : A Property of Lines in n-Dimensional Space. — L.-E. Dickson : Concerning the Cyclic Subgroups of the Simple Group G of all Linear Fractional Substitutions of Determinant Unity in Two Non-Homogeneous

Variables with Coefficients in an Arbitrary Galois Field. — V. Snyder : On Some Invariant Scrolls in Collineations which leave a Group of Five Points Invariant. — W. Gilfspie : On the Reduction of Hyperelliptic Integrals ($p = 3$) to Elliptic Integrals by Transformations of the Second and Third Degrees. — E.-H. Moore : The Cross-Ratio Group of $n!$ Cremona Transformations of Order $n - 3$ in Flat Space of $n - 3$ Dimensions.

Annals of Mathematics, fondées par Ormond Stone; in-4°, 2e série, vol. 1; prix d'abonnement à 1 vol. (4 nos), 2 dollars; Cambridge, Mass. U. S. A., Haward University.

N° 1 (octobre 1899). — E.-B. von Vleck : On the Determination of a Series of Sturm's Functions by the Calculation of a Single Determinant. — D.-N. Lehmer : Concerning the Tractrix of a Curve with Planimetric Application. — F. Morley : The « No-rolling » Curves of Amsler's Planimeter. — L.-E. Dickson : A Generalization of fermat's Theorem. — M. Böcher : Examples in the Theory of Functions. — A. Hamilton : The Irreducible Case of the Cubic Equation. — F.-H. Safford : A Note on Critical Points. — E.-B. Wilson : Note on the Function Satisfying the functional Relation $\Phi(u)$. $\Phi(v) = \Phi(u + v)$.

Transactions of the American Mathematical Society; in-4°, vol. I : Lancaster et New-York, Macmillan, 1900.

N° 1. — N.-S. White : Conics and cubics connected with a plane cubic by certain covariant relations. — P. Gordan : Formentheoretische Entwickelung der in Herrn White's Abhandlung über Curven dritter Ordnung enthaltenen Sätze. — E. Goursat : Sur la définition générale des fonctions analytiques, d'après Cauchy. — F.-R. Moulton : On a class of particular solutions of the problem of four bodies. — L.-E. Dickson : Definition of the Abelian, the two hypoabelian, and related linear groups as quotient-groups of the groups of isomorphisms of certain elementary groups. — H. Maschke : Note on the unilateral surface of Moebius. — M. Böcher : On regular singular points of linear differential equations of the second order whose coefficients are not necessarily analytic. — O. Bolza : The elliptic sigma-functions considered as a special case of the hyperelliptic sigma-functions. — G.-A. Miller : On the groups which are the direct products of two subgroups. — F.-H. Moore : On certain crinkly curves. — L.-E. Dickson : A new definiton of the general Abelian linear group.

N° 2 (avril). — F. Morley : On the metric geometry of the plane n-line. — A.-S. Chessin : On relative motion. — H.-S. White : Plane cubics and irrational covariant cubics. — J.-L. Coolidge : A purely geometric representation of all points in the projective plane. — E.-B. Wilson : The decomposition of the general collineation of space into three skew reflections. — H. Maschke : A new method of determining the differential parameter G.-W. Hill : On the extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motion. — J.-E. Campbell : On the types of linear partial differential equations of the second order in three indepens dent variables which are unaltered by the transformations of a continuous group.

Educational Review, dirigée par N.-M. Butler ; vol. 19 : prix d'abonnement annuel, 3 dollars : Rochway, N. J. et New-York, 1900.

Dans le numéro de février de cet intéressant recueil, nous avons lu avec plaisir un article de M. G. Compayré, recteur de l'Académie de Lyon : « Educational journals of France », où l'*Enseignement mathématique* a le grand honneur de se voir cité d'une façon bienveillante. C'est d'autant plus flatteur pour nous que M. Compayré appartient à ce qu'on appelle la classe des « littéraires » ; et chacun sait qu'en France il est de règle que littéraires et scientifiques vivent dans deux mondes séparés à ce point qu'ils s'ignorent les uns les autres. Ceci peut nous expliquer pourquoi M. Compayré, tout en connaissant l'existence de notre Revue, n'en connaît, même de nom, ni les Directeurs, ni les membres du Comité de Patronage.

Atti della Reale Academia dei Lincei., anno 297, série 5e, vol. IX, 1er semestre 1900 ; Rendiconti : Rome, tip. dell. R. acc. dei Lincei.

10 juin. — Rendiconto dell' Adunanza solenne. — L. Cremona : Commemorazione del Senatore Prof. Eugenio Beltrami.

Annali di Mathematica pura ed applicata, dirigées antérieurement par Fr. Brioschi et continuées par les professeurs L. Bianchi, L. Cremona, V. Dini, G. Jung ; série 3e, t. IV, 1900 ; Milan, C. Reberchini.

Fasc. 3 et 4. — De Sanctis : Alcuni nuovi teoremi sulle funzioni armoniche a tre variabili. — Timerding : Sur les lignes osculatrices d'une cubique gauche. — Pincherle : Di alcune operazioni atte ad aggiungere o togliere singolarità in una funzione analitica. — Lauricella : Su di una classe di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.

Revue de Mathématiques (Rivista di Mathematica), publiée par G. Peano, prof. d'Analyse infinitésimale à l'Université de Turin ; t. VII, 1900 ; Turin, Bocca frères.

N° 1. — G. Peano : Formules de logique mathématique. — M. Nasso : Alcuni teoremi di Aritmetica. — P. Burali : Alcune formule di logica. — P. Castellano : Alcune identità. — G. Vacca, M. Chini, G. Enestrôm, G. Peano, T. Boggio : Additions au Formulaire.

El Progreso matematico, revista de matemáticas puras y aplicadas director D. Zoel G. de Galdeano. Série 2, ano II, Zaragoza, 1900.

N° 13 et 14. — I. Hatzidakis : Deux démonstrations nouvelles des théorèmes de Euler et de Meusnier. — A. Aubry : Noticia historica sobre la cuadratura del circulo. — Sr. Gutberlet : Una observacion. — Sr. Gomes Teixeira : Sobre los focos de las espiricas de Perseo. — Z.-G. di G. : La moderna organizacion de la Matematica. — A. Droz-Farny : Notes géométriques. — Sr. Krahe : Cuadrilateros esfericos articulos. — A. Aubry : Etude élémentaire sur la théorie des maxima et minima. — G. Fontené : Teoremas de Geométria. — Senor Krahe : Integralde la ecuacion

$$\frac{d^2y}{dz^2} + 2z\frac{dy}{dz} + z^2y = 0.$$

Wiadomosci Matematyczne. Redaktor i wydawca S. Dickstein, t. IV, fasc. 1. Warszawa, 1900.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von prof. G. v. Escherich und prof. L. Gegenbauer : 11e année, 1900 : 3e fascicule. Eisenstein et Cie, Vienne.

S. Kantor : Theorie der Elementartheiler höherer Stufen. — Léop. Gegenbauer : Ueber ein Theorem des Herrn Mac-Mahon. Literatur-Berichte.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, begründet von Carl Ohrtmann, im Verein mit andern Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung der Herren Félix Müller und Albert Wangerin herausgegeben von Emil Lampe ; t. XXIX, année 1898 (en trois fascicules) : 2e fascicule, un vol. in-8o de IV-160 p. ; 1900. Georg Reimer, Berlin.

VIII. Reine, elementare und synthetische Geometrie. — IX. Analytische Geometrie.

Zeitschr. für math. u. naturw. Unterricht, herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann : 31e année, 1900. Teubner, Leipzig.

No 5 (Août). — H. Holzmüller : Ueber zwei Punkte der mathematischen Geographie.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von Prof. Dr B. Schwalbe und Prof. Fr. Pietzker : 6e année, 1900. O. Salle, Berlin.

No 3. — H. Schotten : Wissenschaft und Schule. — Schafheitlin u. Pietzker : Die Definitionen in der Trigonometrie. — Graeber : Ausmessung der Kugel.

No 4. — H. Schotten : Wissenschaft und Schule (Schluss). — R. Böger : Die Geometrie der Lage in der Schule. — H. Schubert : Ueber heronische Dreiecke mit ganzzahlicher Transversale.

No 5. — Alex. Wornicke : Schulaufgaben aus der Mechanik, unter besonderm Berücksichtigung der Technik. — Haentzschel : Die Definitionen in der Trigonometrie. — A. Maroff : Die Additionstheoreme für sinus und cosinus.

Zeitschr. f. d. Realschulwesen, herausgegeben und redigirt von Em. Czuber, Ad. Bechtel und Mor. Gloser, 25e année, 1900. Alf. Hölder, Vienne.

No 9. — A. Pichler : Ueber arithmetische Reihen von Primzahlen.

No 10. — E. Czuber : Zweiter internationale Mathematikercongress in Paris, August, 1900.

Paedagogisches Archiv, herausgegeben von prof. C. Dahn : 42me année, no 8, 9 et 10, 1900 : Dürr, Leipzig.

F. Michel. — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique**, à l'usage des classes de mathématiques spéciales ; solutions des problèmes donnés au concours d'admission à l'École polytechnique de 1860 à 1900. Un vol. in-8° de VI-240 p. ; prix : 6 fr. Paris, Gauthier-Villars, 1900.

S. Ortu Carboni. — **Sunto di Geometria Elementare; Planimetria**. Biblioteca degli studente, riassunti per tutte le Materie d'esame nei Licei, Ginnasi, Istituti tecnici ecc. vol. 46-47 ; un vol. de VI-116 p. ; prezzo : 1 L. Livorno, Raffaello Giusti, 1900.

I. Ghersi. — **Conti e Calcoli fatti**, 93 tabelle ed istruzioni pratiche sul modo di usarle ; un vol. de X-191 p. ; prezzo : L. 2,50 ; Milano, U. Hoepli, 1900.

E. Giorli. — **L'Aritmetica e la Geometria del l'operajo** ; un vol. de XI-183 p. ; prezzo : L 2 ; Milano, U. Hoepli, 1900.

Ern. Pascal. — **Die Determinanten**, eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesammtheit der neuen Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von Dr Herm. Leitzmann. Un vol. in-8° de 266 p. ; prix (relié) : M 10 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Osc. Schlömilch. — **Uebungsbuch zum Studium der hoheren Analysis** ; zweiter Theil : Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage bearbeitet von prof. Dr. R. Henke. Un vol. in-8° de 448 p. ; prix : M. 9 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Fr. Schilling. — **Ueber die Nomographie vom M. d'Ocagne** ; eine Einführung in dieses Gebiet. Une brochure de 48 pages in-8 ; prix : M. 2 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Moritz Cantor. — **Vorlesungen über Geschichte der Mathematik**. Dritter Band, erste Abtheilung, von 1668-1699 ; zweite Auflage. Un vol. in-8°, 261 p. ; prix : M. 6,60. B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Fried. Engel. — **Sophus Lie**, ausführliches Verzeichnis seiner Schriften. Mit dem Bildnis Sophus Lies in Heliogravüre. Une brochure de 41 pages in-8° ; prix : M. 2. Teubner, Leipzig, 1900.

Félix Müller. — **Vocabulaire mathématique** français-allemand et allemand-français contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. *Première partie : Français-Allemand*. Un vol. in-8° de 132 pages ; prix : M. 8 ; B.-G. Teubner, Leipzig ; Gauthier-Villars, Paris, 1900.

Le Gérant : C. NAUD.

TABLE DES MATIERES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Doctrine.

Aux lecteurs de « l'Enseignement mathématique » (*Les directeurs*) . . 1
L'application dans l'Enseignement de la mathématique (*R. Bettazzi*) . . 15
Sur le développement et l'état actuel de la Géométrie à *n* dimensions (*V. Schlegel*) 77
L'enseignement de la Géométrie et les Géométries non-euclidiennes (*J. Andrade*) 114
Les idées d'Auguste Comte sur la Philosophie des mathématiques (*A. Vassilief*) 157
Considérations sur la Géométrie non-euclidienne (*M. Frolov*) 179
Au sujet de questions chronologiques (*Ch. Berdellé*) 188
Sur les définitions (*H. Laurent*) 191
L'« Esperanto », langue auxiliaire artificielle de M. le Dr Zamenhof, ouvrant les plus larges perspectives à la littérature scientifique internationale (*Ch. Méray*) 265
Nouvelles considérations sur la Géométrie non-euclidienne (*M. Frolov*) 293
Euclidien et non-euclidien (*J. Andrade*) 298
Problèmes mathématiques (*D. Hilbert*) 349
Les Mathématiques au Congrès de Philosophie (*L. Couturat*) 397

Histoire ; organisation de l'enseignement.

Le droit des écoles techniques supérieures à la promotion au grade de docteur (*E. Czuber*) 49
Eugène Beltrami ; sa vie et ses travaux (*G. Frattini*) 173
Le développement historique de l'enseignement mathématique en Allemagne (*S. Günther*) 237
L'enseignement mathématique en Hollande (*J. Cardinaal*) 317
Liès-Bodart (*H. Laurent*) 356

ETUDES PÉDAGOGIQUES

Une première leçon de Dynamique (*Em. Picard*) 3
Nouveaux modèles cinématiques et introduction nouvelle à la théorie des courbes cycloïdales (*Fr. Schilling*) 31

Sur l'utilité de la notion de l'infini dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire (*L. Ripert*) 127
Question de langage géométrique (*G. Fontené*) 134
Théorèmes de Bézout et d'Euler (*A. Poussart*) 136
Sphère et ellipsoïde : sphères concentriques et ellipsoïdes concentriques homothétiques (*D. Kilbinger*) 196
Sur la démonstration des formules du demi-angle en trigonométrie plane (*F. Redl*) 201
Notion de l'infini en Géométrie élémentaire (à propos d'un article de M. Ripert) (*P. Appell*) 205
La Nomographie dans l'enseignement (*M. d'Ocagne*) 207
Sur la classe de mathématiques spéciales (*P. Appell*) 340
Sur la transcendance des nombres e et π (*V. Jamet*) 355
Théorie de l'équation quadratique (*A. Macfarlane*) 363
Sur la notion de l'infini en Géométrie élémentaire (*L. Ripert*) 370
Sur les polygones de Poncelet (*M. Lelieuvre*) 410
Définition et détermination analytique des foyers d'une conique (*L. Van Emelen*) 423
Les fonctions hyperboliques dans l'enseignement moyen (*P. Barbarin*) 441
Démonstration simplifiée de la formule de Taylor (*J.-N. Hatzidakis*) 448
Note sur les logarithmes (*H. Laurent*) 450
Sur le théorème des fonctions composées (*G. Fontené*) 451

CHRONIQUE

Congrès et Sociétés savantes.

Congrès de Munich; septembre 1899 55
Congrès international de philosophie 59
Congrès international des mathématiciens (Paris, 6-12 août 1900) . . . 139, 211, 378
Royal astronomical Society 145
Académie des sciences de Paris 145
Mathematical association 145
Congrès international de Bibliographie (Paris, 16-18 août 1900) . . . 121
Les congrès internationaux de l'Exposition universelle 213
Académie royale d'Irlande 301
Congrès des mathématiciens allemands : Aix-la-Chapelle 302
L'Association internationale des académies 380
Société mathématique de France 384
Association britannique pour l'avancement des sciences 384

Concours académiques.

Prix proposé par l'Académie de Madrid 144
Concours de l'Académie des sciences de Madrid 216
Prix proposés par l'Académie royale de Belgique 383
Les Smith's Prizes 384

Articles divers.

Le 25e anniversaire de M. A. Vassilief 57
Bibliotheca mathematica 58
Un nouveau journal mathématique 59
La langue internationale « Esperanto » 215
L'instruction mathématique en France 215
Cours de vacances à Göttingue 216
Université de Jena 217
La priorité de l'invention des Quaternions 301
Une belle carrière 382
Etats-Unis 384
Souscription pour la publication des œuvres complètes d'Eugène Beltrami 454
Les périodiques mathématiques des Etats-Unis 455
Œuvres complètes de Gauss 456

NÉCROLOGIE

M. Vaschy 58
M. Rebière (C.-A.-L.) 144
M. E. Beltrami 144
M. Joseph Bertrand 214
M. V. Liguine 217
M. Thomas Craig 302

CORRESPONDANCE

L. Ripert : Sur une construction due à M. Laisant 61
Dr M. Hulmann : A propos d'une « Causerie scientifique » 218
F. Gomes Teixeira : Sur les travaux mathématiques en Portugal . . . 219
B. Niewenglowski : Sur un article de M. Ripert 219
R. Lipschitz : A propos de l'article de M. V. Schlegel : indication bibliographique 219
A. Potier : Sur les analogies de Neper et de Delambre 303
P. Barbarin : A propos d'un article de M. Frolov 306
M. Tikhomandritzky : Sur le postulatum d'Euclide 385
P. Mansion : Sur le postulatum d'Euclide 457

BIBLIOGRAPHIE

Almeida (Mendes d') et R. Guimaraes. — Curso de Topographia (t. I) (*L. Ripert*) 69
Annuaire pour l'an 1900, publié par le Bureau des longitudes 150
Bertrand Alexis). — Les études dans la Démocratie (*Desaint*) . . . 62
Beyel (Chr.). — Ueber den Unterricht in der darstellenden Geometrie (*A. Bernoud*) 62
Böger (R.). — Ebene Geometrie der Lage (*Chr. Beyel*) 225

Bohnert (E.). — Ebene und sphärische Trigonometrie (*H. Fehr*) . . . 391
Borel (E.). — Leçons sur les fonctions entières (*C. A. Laisant*) . . . 146
Boyer (J.). — Histoire des Mathématiques (*S. Dickstein*) 309
Brillouin (M.). — Mémoires originaux sur la circulation générale de l'atmosphère (*A. Buhl*) 159
Burali-Forti (C.). — Les propriétés formales des opérations algébriques. 228
Burkhardt (H.). — Elliptische Funktionen (*C. Jaccottet*) 229
Cahen (E.). — Eléments de la Théorie des nombres (*C. Cailler*) . . . 307
Echegaray (J.). — Lecciones sobre resolucion de ecuaciones y teoria de ecuaciones (*Z. G. de Galdeano*) 227
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften (*H. Fehr*) 389
Guimaraes (R.). — Les mathématiques en Portugal au XIX^e^ siècle (*Er. Lebon*) 158
Haas (Aug.). — Integralrechnung, t. II, Anwendungen (*L. Crelier*) . . 71
Holzmüller (G.). — Elemente du Stereometrie, t. I (*J. May*) 67
Lampe (E.). — Die reine Mathematik in den Jahren 1884-1899. . . . 150
Laurent (H.). — Traité de perspective. 149
Lazzeri (G.). — Manuali de trigonometria piana (*C. A. Laisant*) . . . 147
Lebon (E.). — Histoire abrégée de l'Astronomie (*R. Guimaraes*) . . . 308
Mansion (P.). — Theoria sucinta de las funciones hiperbolicas . . . 147
Mansion (P.). — Introduction à la théorie des déterminants. — Eléments de la théorie des déterminants. 147
Müller (R.). — Leitfaden für die Vorlesungen uber darstellende Geometrie (*Alph. Bernoud*) 149
Niuwenglowski et Gérard. — Cours de Géométrie élémentaire (*L. Ripert*) 64
Pascal (Ern.). — Repertorio di Matematiche superiori. 68
Picard (Em.). — Clark University : decennial celebration : lectures on mathematics 389
Pressland and Tweedie. — Elementary Trigonometry (*H. Fehr*) . . . 221
Pund (O.). — Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie (*E. Bortolotti*). 391
Riddel (J.). — Pratical plane and solid Geometry (*E. Steinmann*) . . 220
Royer (Cl.). — La constitution du monde ; Dynamique des atomes (*D^r^ Collineau*) 223
Rueda (D. C. J.). — Tratado de las formas geometricas de 2^a^ categorie. 223
Vidal (Cl.). — Pour la Géométrie Euclidienne (*C. A. Laisant*) . . . 155

Bulletin bibliographique. 72, 152, 231, 311, 393, 466

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de Chronique, de lettres insérées dans la Correspondance, et de comptes rendus bibliographiques.

Les nos qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Andrade (J.). 68, 114, 298
Appell (P.) 205, 340
Barbarin (P.). 306, 443
Berdellé (Ch.). 188
Bernoud (Alph.). . . 62, 148, 237
Bettazzi (R.) 14
Bevel (Chr.). 225
Bortolotti (E.) 391
Bühl (A.) 459
Cailler (C.). 307
Cardinaal J.) 317
Collineau. 222
Couturat (L.) 397
Crelier (L.). 70
Czuber (E.) 49
Desaint. 461
Dickstein (S.) 309
Emelen (L. Van). 423
Fehr (H.) . . . 221, 378, 389, 391
Fontené (G.). 134, 451
Frattini (G.) 173
Frolov (M.). 179, 293
Galdeano (Z. G. de) 227
Gromeka (Mlle A.) 157
Guimarães (R.). 308
Günther (S.) 237
Hatzidakis (J. N.). 447
Hilbert (D.). 349
Hulmann (M.) 218
Jaccottet (C.). 229
Jamet (V.). 355
Laisant (C. A.). 144, 146, 147, 151
Kilbinger (D.). 196
Laurent (H.). . . . 194, 346, 450
Lebon (Ern.) 458
Lelieuvre (M.). 410
Lipschitz (R) 219
Macfarlane (A.). 363
Mansion (P.). 457
May (J.). 66
Méray (Ch.). 265
Niewenglowski (B. 219
Ocagne (M. d'). 207
Picard (E.) 3
Potier (A.) 303
Poussart (A.) 136
Redl (F.) 201
Ripert (L.) . . 61, 64, 69, 127, 371
Schilling (Fr.). 31
Schlegel (V.) 77
Steinmann (E.). 220
Teixeira (F. G.). 219
Tikhomandritzsky (M.). . . . 385
Vassilief (A.) 157

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

QA
11
E65
t.1-2

L'Enseignement mathémati que

Physical &
Applied Sc
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY